应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

关于"费尔马最后定理的证明"一文的评注

张宝善①

(钱伟长推荐, 1996 年 12 月 16 日收到, 1998 年 3 月 20 日收到修改稿)

摘　要

本文对"费尔马最后定理的证明"一文作出几点评注, 主要结论是该证明仅仅是对费尔马最后定理的部分情形的证明, 即并没有完全证明费尔马最后定理.

关键词　因式分解　共轭因数　互质　费尔马最后定理
中图分类号　O122, O156

§1. 引　　言

众所周知, 费尔马最后定理[1, 2, 3], "方程式

$$x^n + y^n = z^n \tag{1.1}$$

对于任意大于 2 的自然数 n 不存在 x, y, z 都不为 0 的正整数解." 是由法国数学家 *Fermat* 于 1673 年提出的数学难题. 三百多年来, 许多数学家在为寻求这个世界著名数学难题的证明作出不懈努力的同时对代数数论以及其它数学分支的研究和发展作出了巨大贡献, 而它的最终证明是最近的事情. 著名数学大师陈省身教授在以"中国的数学"为题[2]的演讲中简单介绍了英国数学家 Andrew Wiles 和 Richard Taylor 利用椭圆曲线理论证明费尔马最后定理的出色工作, 同时也指出"费尔马最后定理不能用初等方法证明, 试图寻求其初等证明的努力会是徒劳的". 文[3]以"费尔马最后定理的证明"为题所做的工作可谓是寻求其初等证明的努力. 这种努力和尝试的结果如何呢?本文对此问题进行一些探讨. 我们的结论是文[3]仅仅是对费尔马最后定理的部分情形的证明, 即并没有完全证明费尔马最后定理.

§2. 评　注

文"费尔马最后定理的证明"(以下简称"证明"), 将方程式(1.1)写成

$$(x-b)^n + x^n = (z+a)^n \tag*{(0.1)*}$$

的形式, 其中 a, b 是两个任意自然数, n 是大于 2 的质数. 这里, "(0.1)*"表示"证明"中的公式(0.1), 下面出现类似公式号时均如此. 由(0.1)* 导出方程式:

$$x^n - (a+b)\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}x^{n-r}\Phi_r + nx\Phi_{n-1}\right] = (a+b)\Phi_n \tag*{(4.8)*}$$

① 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072

其中, 整数 $\phi_r(r = 1, 2, \cdots, n)$ 由下式给出

$$\phi_r = \frac{a^r - (-b)^r}{a+b} = a^{r-1} - a^{r-2}b + a^{r-3}b^2 - \cdots + a^2b^{r-3} - ab^{r-2} + b^{r-1} \tag{2.1}$$

评注 1　“证明”在“五、应用条件: $\gcd(a, b) = 1$ 弃除 FLT 的贫庸解”的讨论中 a, b 的公因数 c 应该假设为质数•

因为, 由

$$x^n = (a+b)c\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}\phi_r \tag{5.1}^*$$

题的

知道 x^n 包含 c 作为它的因数• 但是, 当 c 不为质数时, 由 x^n 包含 c 作为它的因数并不能推出 x 本身包含 c 作为它的因数• 因此,“证明”中的

“于是 x^n 包含 c 作为它的因数• 但 x^n 是个整数, 所以 x 本身必须包含 c 作为它的因数•”

在没有 a, b 的公因数 c 为质数的假设下的表述是不恰当的• 尽管它并不影响条件 $\gcd(x, y, z) = 1$ 等价于条件 $\gcd(a, b) = 1$ 的正确性, 但作为数学证明的严密性, c 应该假设为质数是必不可少的•

评注 2　“证明”在“六、定理 2”的证明中用多项式的除法并通过 $n = 7$ 的例子推测出 $(a^n + b^n)/(a+b)^2$ 的末项为 $\dfrac{nb^{n-1}}{a+b}$, 同样没有给出严格的证明• 其实, 这个结果可以从初等数论中的如下结论导出($\gcd(a, b) = 1$, n 为奇质数):•

$$\gcd\left(\frac{a^n+b^n}{a+b}, a+b\right) = \begin{cases} 1 & (\gcd(a+b, n) = 1) \\ n & (\gcd(a+b, n) = n) \end{cases} \tag{2.2}$$

也可以直接从“证明”中的(6.1)式:

$$\frac{a^n+b^n}{(a+b)^2} = \left[\sum_{r=1}^{n}a^{n-r}(-b)^{r-1}\right]\Big\backslash(a+b) \tag{6.1}^*$$

推出• 事实上, 我们有

$$\frac{a^n+b^n}{(a+b)^2} = \left[\sum_{r=1}^{n}a^{n-r}(-b)^{r-1}\right]\Big\backslash(a+b) = \left[\sum_{r=1}^{n}((a+b)-b)^{n-r}(-b)^{r-1}\right]\Big\backslash(a+b)$$

$$\equiv \left[\sum_{r=1}^{n}(-b)^{n-r}(-b)^{r-1}\right]\Big\backslash(a+b) \equiv nb^{n-1}/(a+b)(\mathrm{mod}\, a+b) \tag{2.3}$$

由(2.3)即知“证明”中的定理 2 成立, 即 $(a^n + b^n)/(a+b)^2$ 是整数当且仅当 $a + b = n$•

评注 3　“证明”在“七、定理 3”的证明中仍然用多项式除法进行繁琐的讨论• 其实, 定理 3:“$(a^n + b^n)/(a+b)^3$ 对任意整数 $a, b(\gcd(a, b) = 1)$ 恒不是整数”的证明可以由定理 2 用反证法推导如下:

定理 3 的证明　如果 $(a^n + b^n)/(a+b)^3$ 是整数, 那么 $(a^n + b^n)/(a+b)^2$ 也必然是整数• 于是由定理 2 知必有 $a + b = n$, 此时

$$(a^n + b^n)/(a+b)^3 = ((n-b)^n + b^n)/n^3 \equiv b^{n-1}/n(\mathrm{mod}\, n^3) \tag{2.4}$$

但是, 注意到 $a + b = n$ 是质数及 a, b 是自然数的假设知道 b^{n-1}/n 不是整数, 此与 $(a^n + b^n)/(a+b)^3$ 是整数矛盾• 定理 3 得证•

评注 4　“证明”中的定理 2、3 是为证明费尔马最后定理作准备的• “证明”在“八、$a + b$ 是质数情形”的证明是正确的, 但在“九、$a + b$ 是偶数情形”和“十、$a + b$ 包含一个质因数幂 p^r

情形”的证明却是不完全的•

事实上,对于“证明”中的“九、$a+b$ 是偶数情形”,按“证明”中的

$$a+b=2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_t^{n_t}=2^{n_0}E,\quad E=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_t^{n_t} \qquad (9.1,2)^*$$

假设下,将$(4.8)^*$变为

$$x^n-2^{n_0}E\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}x^{n-r}\phi_r+nx\phi_{n-1}\right]=2^{n_0}E\phi_n \qquad (9.3)^*$$

此时,x 以 2 为因数是确定无疑•“证明”中令 $x=2^m w$ 作为变换式$(9.3)^*$变为

$$2^{mn}w^n-2^{n_0}E\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}2^{m(n-r)}w^{n-r}\phi_r+n2^m w\phi_{n-1}\right]=2^{n_0}E\phi_n \qquad (9.4)^*$$

恰当

也是可行的•但是,“证明”中的(9.4)式后面的讨论,即由

“如果我们选取整数 m,使 $m\geqslant\dfrac{n_0}{n-1}$, …” (2.5)

$$2^{mn-m-n_0}w^n-E\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}2^{m(n-r)-m}w^{n-r}\phi_r+nw\phi_{n-1}\right]=E\phi_n/2^m \qquad (9.5)^*$$

推断出不存在整数 w 适合$(9.5)^*$后断言“FLT 对此情形正确”的结论是不正确的•我们认为:“不存在整数 w 适合$(9.5)^*$”与“FLT 对此情形正确”并不是等价的•因为(2.5)式中人为地选取整数 m,使 $m\geqslant\dfrac{n_0}{n-1}$ 实际上成为一个约束条件,在这个约束条件下,“不存在整数 w 适合$(9.5)^*$ 表明不存在偶数 $x=2^m w$ 满足 $m\geqslant\dfrac{n_0}{n-1}$ 及适合$(9.3)^*$,并不排除存在偶数 $x=2^m w$ 满足 $m<\dfrac{n_0}{n-1}$ 及适合$(9.3)^*$ 的可能性•具体理由如下

一方面,尽管不存在整数 w 适合$(9.5)^*$,仍有可能存在有理数 α 适合$(9.5)^*$,而这个有理数 α 有可能使得$(9.3)^*$ 有整数解•这个问题的本质是首项系数为 1 的整系数代数方程 $f(x)=0$ 经变换 $x=kw$(k 是某个整数)化为首项系数不为 1 的整系数代数方程 $g(w)=0$ 后,两个代数方程是否关于存在整数解等价的问题•通常的答案是否定的•事实上,可以考虑下面的例子:

例子 考虑代数方程:$x^3+24x^2-8x=88$,并选取变换式 $x=4w$,则可以将所考虑的代数方程就化为代数方程:$8w^3+48w^2-4w=11$,这个代数方程显然没有整数解•但我们不能说原代数方程没有整数解,因为容易验证原代数方程有整数解 $x=2$•

另一方面,作为变换或函数变化式 $x=2^m w$ 中的整数 m 可以任意选取•但就整数代数方程而言,保证经变化式 $x=2^m w$ 后的代数方程与原代数方程在没有整数解的问题上等价的整数 m 应该是某个确定的或某些确定的数•况且“$(9.3)^*$ 中的 2 为 x 的因数”是在假定$(9.3)^*$ 有整数解的前提下而言的•如果$(9.3)^*$ 有整数解 $x=2^m w$,那么我们容易证明整数 m 的最大者必然满足 $mn=n_0$,即 $m=n_0/n<n_0/(n-1)$•这时的整数 m 并不在(2.5)式的考虑之列,而是属于 $m<\dfrac{n_0}{n-1}$ 的情形•因此,“证明”中不存在整数 w 适合$(9.5)^*$ 后断言“FLT 对此情形正确”的结论是不正确的,退一步讲至少是不全面的•

对于“证明”中的“十、$a+b$ 包含一个质因数幂 p^t 情形”的讨论与上述情况是类似的,这里就不再详细评述了•

§ 3. 结 论

通过上述讨论, 我们得出的结论是:“证明”仍然是对费尔马最后定理的部分证明, 并非是完全无误的完整证明• “证明”是否可以进一步改进使之成为真正的费尔马最后定理的完整的初等证明, 有待探讨• 当然, 如果 Andrew Wiles 和 Rechard Tavlor 利用椭圆曲线理论证明费尔马最后定理的出色工作准确无误的话(注: 笔者至今没有看到他们的证明全文), 寻求这个初等证明也是可有可无的了•

参 考 文 献

1 华罗庚,《数论导引》, 科学出版社 (1959), 14—45.
2 陈省身, 中国的数学, 数学进展, **25**(5) (1996), 1—7.
3 汪家 , 费尔马最后定理的证明, 应用数学和力学, **17**(11) (1996), 969—978.

A Comment on the Proof of Fermat's Last Theorem

Zhang Baoshan
(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract

In this paper, some comments on the proof of Fermat's last theorem are proposed. The main result is that the proof proposed by Wong Chiahe is only part of proof for Fermat's last theorem. That is to say, the proof is not all_full proof to Fermat's last theorem.

Key words factorization, cofactor, relative prime, Fermat's last theorem