应用数学和力学, 第 19 卷 第 10 期(1998 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

平稳随机过程的小波分析方法*

骆少明[①]　　张湘伟[①]

(1997 年 4 月 4 日收到, 1998 年 5 月 8 日收到修改稿)

摘　　要

利用小波变换对平稳随机过程进行了谱分析, 在小波变换的基础上给出了平稳随机过程的时—频功率谱及联合平稳随机过程的时—频互功率谱的概念, 并详尽地研究了它们所具有的性质及与传统功率谱的关系·

关键词　小波变换　谱分析　相关函数
中图分类号　O174

§1. 引　　言

在实际问题中, 随机振动是经常碰到的[1]· 例如, 由于道路不平, 它将给车轮以时间间隔不规则、量值大小不定的冲击激励, 从而引起车辆的随机振动, 此外, 结构在受到地震、海浪及突风等的作用时, 也将会产生随机振动, 而随机振动则是利用当代先进的数学工具——随机过程理论来处理振动问题的一门学科· 因此研究随机过程的理论对研究随机振动具有十分重要的意义·

对随机过程的研究, 一般从三个方面进行, 一是幅域描述, 它描述随机过程在各个时刻状态的统计特征——概率分布; 二是时域描述, 它描述随机过程变化的平均性质和过程在两个不同状态(截口) 相关联的概率特性, 又称为相关分析; 三是频域描述, 它描述随机过程的频率结构, 以揭示随机过程的频率成分· 其中随机振动频域描述具有重要地位, 它可查明有哪些频率成分的谱和分量参与振动, 以及这些分量中哪些在振动中占主导地位, 这在系统的防振、隔振和强度分析中非常重要· 传统的方法是利用 Fourier 变换, 建立随机过程的功率谱密度, 从而分析随机过程的频率结构· 然而, Fourier 变换是纯频域的, 它在时空没有任何分辨率, 因此, 不能对随机过程进行精细的分析· 小波变换则被认为是傅氏分析发展史上里程碑式的进展, 它优于傅氏分析之处在于, 它在时域和频域同时具有良好的局部化性质, 它有一个弹性的时—频窗, 对高频(低频) 信号成分, 时窗自动变窄(宽) · 由于小波分析能对高频成分采用逐渐精细的时域或空域取样步长, 因此可以对对象进行精细的分析· 将小波变换引入到随机过程的分析中来, 建立小波变换下的随机过程的时—频功率谱及时—频互功率谱, 可以更好地分析随机过程, 从而为更好地分析系统或结构的随机振动作好理论准备, 这正是本文的工作·

* 国家教委博士点基金资助项目(9461108)
① 汕头大学, 广东汕头 515063

§2. 小 波 变 换

定义 2.1　设 $\psi \in L^2 \cap L^1$ 且 $\hat{\psi}(0) = 0$, 则按如下方式生成的函数族 $\left\{\psi_{a,b}\right\}$

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \qquad b \in R,\ a \in R - \left\{0\right\} \tag{2.1}$$

叫分析小波或连续小波, ψ 叫基本小波或母小波(mother wavelet)•

定义 2.2　设 $\psi \in L^1 \cap L^2$ 且满足

$$C_\psi = \int_R \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \tag{2.2}$$

则 ψ 叫允许小波(admissible wavelet), (2.2) 式称为允许条件•

定义 2.3　设 ψ 是基本小波, $\left\{\psi_{a,b}\right\}$ 是由(2.1) 式给出的连续小波, 对 $\forall f \in L^2(R)$, f 的连续小波变换为[2]:

$$W_f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}}\langle f, \psi_{a,b}\rangle = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}}|a|^{-1/2}\int_R f(t)\,\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\,dt \tag{2.3}$$

容易证明下述定理[3]:

定理 2.1　设 ψ 是允许小波, 则对一切 $f, h \in L^2(R, dt)$, 有

$$\iint_{R^2} W_f(a,b)\,\overline{W_h(a,b)}\,\frac{da}{a^2}db = C_\psi\langle f, h\rangle \tag{2.4}$$

另外, 对任意 $f \in L^2$ 及 $t \in R$, 若 f 在 t 处连续, 则

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi}\iint_{R^2} W_f(a,b)\,\psi_{a,b}(t)\,\frac{da}{a^2}db \tag{2.5}$$

小波变换的有关定义及定理在下面对随机过程进行谱分析中将要用到•

§3. 平稳随机过程及其时—频功率谱

平稳随机过程 $X(t)$ 的样本函数 $x(t)$ 一般不满足能量有限条件, 因此定义一个随机过程 $X_T(t)$, 它由平稳随机过程 $X(t)$ 在区间$[-T, T]$ 上截断而得到:

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t), & |t| < T \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{3.1}$$

对于过程 $X_T(t)$ 的每一个样本函数 $x_T(t)$, 其自相关函数为

$$R_{X_T}(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)\,x_T(t+\tau)\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,x(t+\tau)\,dt \tag{3.2}$$

$R_{X_T}(\tau)$ 的 Fourier 变换 $S_{X_T}(\omega)$ 为:

$$S_{X_T}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{X_T}(\tau)\,e^{-i2\pi\omega\tau}d\tau = \frac{1}{2T}|X_T(\omega)|^2 \tag{3.3}$$

$$R_{X_T}(\tau) \leftrightarrow S_{X_T}(\omega)$$

“$\leftrightarrow$”表示互为 Fourier 变换•

若平稳过程具有各态历经性, 则过程自相关函数 $R_X(\tau)$

$$R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} R_{X_T}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,x(t+\tau)\,dt \tag{3.4}$$

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty} S_{X_T}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{X_T}(\tau)e^{-i2\pi\omega\tau}d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-i2\pi\omega\tau}d\tau = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|\hat{X}_T(\omega)|^2 \tag{3.5}$$

$R_X(\tau) \leftrightarrow S_X(\omega)$

若平稳过程不具有各态历经性,则有:

$$R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} E[R_{X_T}(\tau)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E[X_T(t)X_T(t+\tau)]dt \tag{3.6}$$

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty} E[S_{X_T}(\omega)]$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[R_{X_T}(\tau)]e^{-i2\pi\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-i2\pi\omega\tau}d\tau$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[|\hat{X}_T(\omega)|^2] \tag{3.7}$$

$S_X(\omega)$ 表示振动功率按频率的分布,称为过程的功率谱密度,它是相关函数 $R_X(\tau)$ 的 Fourier 变换•

同样地,联合平稳过程的 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数及互谱密度为:

$$R_{XY}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[X_T(t)\,Y_T(t+\tau)]dt \tag{3.8}$$

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)e^{-i2\pi\omega\tau}d\tau = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[|\hat{X}_T(\omega)\hat{Y}_T(\omega)|] \tag{3.9}$$

$R_{XY}(\tau) \leftrightarrow S_{XY}(\omega)$

自功率谱密度及互谱密度均是一种纯频率分析,在时空域没有任何分辩,这是其缺陷• 为克服这一缺陷,我们利用小波变换来对平稳随机过程进行分析,建立时—频功率谱[4]及时—频互功率谱定义•

定义 3.1 称

$$S_T(a,b) = \frac{1}{2T}|W_\psi X_T(a,b)|^2$$

为 $X_T(t)$ 的平均时—频功率谱,称

$$S(a,b) = \lim_{T\to\infty} S_T(a,b)$$

为 $X(t)$ 的时—频自功率谱•

进一步地,对联合平稳随机过程,笔者引进如下定义:

定义 3.2 称

$$S_{X_TY_T}(a,b) = \frac{1}{2T}|W_\psi X_T(a,b)\,W_\psi Y_T(a,b)|$$

为 $X_T(t)$ 和 $Y_T(t)$ 的平均时—频互功率谱,称

$$S_{XY}(a,b) = \lim_{T\to\infty} S_{X_TY_T}(a,b)$$

为 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的时—频互功率谱•

定义 3.3 随机过程 $X(t)$ 的平均功率定义为:

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt \tag{3.10}$$

联合平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的平均互功率定义为:

$$Q = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|X(t)\,Y(t)|\,dt \tag{3.11}$$

性质 3.1 设随机过程 $X(t)$ 的平均功率为 P, 联合平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互功率为 Q, 则:

$$\begin{cases} S(a,b) \leqslant \dfrac{P}{C_\psi} \cdot \|\psi\|_{L^2}^2 & (3.12) \\ S_{XY}(a,b) \leqslant \dfrac{Q}{C_\psi} \cdot \|\psi\|_{L^2}^2 & (3.13) \end{cases}$$

证明 只证明(3.13)式, 由 Cauchy_Schwartz 不等式有:

$$|W_\psi X_T(a,b)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \|\psi\|_{L^2} \cdot \|X_T\|_{L^2}$$

$$|W_\psi Y_T(a,b)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \|\psi\|_{L^2} \cdot \|Y_T\|_{L^2}$$

故

$$S_{X_T Y_T}(a,b) = \frac{1}{2T} |W_\psi X_T(a,b) W_\psi Y_T(a,b)|$$

$$\leqslant \frac{1}{2TC_\psi} \|\psi\|_{L^2}^2 \cdot \|X_T Y_T\|_{L^2}$$

$$S_{XY}(a,b) = \lim_{T\to\infty} S_{X_T Y_T}(a,b) \leqslant \frac{Q}{C_\psi} \|\psi\|_{L^2}^2$$

性质 3.2 联合平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 时一频互功率谱与平均功率之间有以下关系:

$$Q = \int_{R^*} \frac{da}{a^2} \left(\int_R S_{XY}(a,b)\, db \right)$$

即平均互功率是时一频互功率谱的一种加权积分平均.

证明

$$Q = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |X(t)Y(t)|\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_R \int_{R^*} |W_\psi X_T(a,b) W_\psi Y_T(a,b)|\, db \frac{da}{a^2}$$

$$= \int_{R^*} \frac{da}{a^2} \int_R \lim_{T\to\infty} \frac{|W_\psi X_T(a,b) W_\psi Y_T(a,b)|}{2T} db$$

$$= \int_{R^*} \frac{da}{a^2} \left(\int_R S_{XY}(a,b)\, db \right)$$

作为特例, 若 $X(t) = Y(t)$, 则

$$P = \int_{R^*} \frac{da}{a^2} \left(\int_R S(a,b)\, db \right)$$

即平稳随机过程平均功率也是时一频自功率谱的加权积分平均.

性质 3.3 设联合平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互功率谱及时一频互功率谱分别为 $S_{XY}(\omega)$ 和 $S_{XY}(a,b)$, 而 $X(t)$ 的功率谱及时一频自功率谱为 $S_X(\omega)$ 和 $S_X(a,b)$, $Y(t)$ 的功率谱及时一频自功率谱为 $S_Y(\omega)$ 和 $S_Y(a,b)$, 则 $S_X(a,b)$, $S_Y(a,b)$, $S_{XY}(\omega)$, $S_{XY}(a,b)$ 之间有如下关系成立:

1) $S_{XY}(a,b) = \sqrt{S_X(a,b) S_Y(a,b)}\, \mathrm{sgn}[W_\psi X_T(a,b) W_\psi Y_T(a,b)]$

2) $S_{XY}(\omega) = \left| \int_{R^*} |a|^{-3/2} da \int_R \sqrt{S_X(a,b)}\, \mathrm{sgn}(W_\psi X(a,b))\, e^{i\omega b} \psi(a\omega)\, db \right|$

$$\cdot\left|\int_{R^*}|a|^{-3/2}da\int_R\sqrt{S_Y(a,b)}\,\mathrm{sgn}(W_\psi Y(a,b))e^{i\omega b}\hat{\psi}(a\omega)db\right|$$

证明

1) $S_{XY}(a,b)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|W_\psi X_T(a,b)W_\psi Y_T(a,b)|$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{|W_\psi X_T(a,b)|}{\sqrt{2T}}\frac{|W_\psi X_T(a,b)|}{\sqrt{2T}}$$

$$=\sqrt{S_X(a,b)S_Y(a,b)}\,\mathrm{sgn}(W_\psi X_T(a,b)W_\psi Y_T(a,b))$$

2) 由前述公式(3.9)可知

$$S_{XY}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{|\hat{X}_T(\omega)\hat{Y}_T(\omega)|}{2T}\tag{3.14}$$

而由小波反演公式[5]可知

$$\hat{X}_T(\omega)=\int_R\left(\int_{R^*}\frac{da}{a^2}\int_R W_\psi X_T(a,b)\psi_{a,b}(t)db\right)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_{R^*}\frac{da}{a^2}\left\{\int_R[W_\psi X_T(a,b)]db\cdot\int_R\psi_{a,b}(t)e^{-i\omega t}db\right.$$

$$=\int_{R^*}\frac{da}{a^2}\int_R W_\psi X_T(a,b)|a|^{1/2}e^{i\omega b}\hat{\psi}(a\omega)db$$

$$=\int_{R^*}|a|^{-3/2}\left(\int_R W_\psi X_T(a,b)e^{i\omega b}\hat{\psi}(a\omega)db\right)da$$

完全相同地可得到 $\hat{Y}_T(\omega)$, 将 $\hat{X}_T(\omega)$ 和 $\hat{Y}_T(\omega)$ 代入(3.12)式, 由功率谱 $S_{XY}(\omega)$ 及时—频互功率谱 $S_{XY}(a,b)$ 的定义即可知结论成立•

特别地, 若 $X(t)=Y(t)$, 则其自功率谱与时—频功率谱有如下关系:

$$S(\omega)=\left|\int_{R^*}|a|^{-3/2}da\int_R\sqrt{S(a,b)}\,\mathrm{sgn}(W_\psi X(a,b))e^{i\omega b}\hat{\psi}(a\omega)db\right|^2$$

在研究随机过程时, 我们经常遇到已知过程的自相关或互相关函数, 而求随机过程的功率谱的情况• 此时随机过程功率谱极易由相关函数的 Fourier 变换求出, 而按性质 3.3 则不易求出随机过程的时—频功率谱, 因此我们给出随机过程时—频功率谱与功率谱之间的关系•

性质 3.4 平稳随机过程的时—频功率谱, 联合平稳随机过程的时—频互功率谱与其功率谱之间满足如下关系:

1) $S(a,b)=\dfrac{e^{2i\omega b}}{C_\psi}\left|\int_R S(\omega)\,\mathrm{sgn}(\hat{X}(\omega))\hat{\psi}(a\omega)d\omega\right|^2$

2) $S_{XY}(a,b)=\dfrac{e^{2i\omega b}}{C_\psi}\left|\int_R S_X(\omega)\,\mathrm{sgn}(\hat{X}(\omega))\hat{\psi}(a\omega)d\omega\right|\cdot\left|\int_R S_Y(\omega)\,\mathrm{sgn}(\hat{Y}(\omega))\hat{\psi}(a\omega)d\omega\right|$

证明 我们给出 2) 式的证明

$$W_\psi X_T(a,b)=\frac{1}{\sqrt{C_\psi}}|a|^{-1/2}\int_R X_T(t)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{C_\psi}}|a|^{-1/2}\int_R X_T(t)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{C_\psi}}|a|^{-1/2}|a|^{-1/2}e^{i\omega b}\int_R\hat{X}_T(\omega)\hat{\psi}(a\omega)d\omega$$

同理可得 $W_\psi Y_T(a,b)$ 表达式, 这样有

$$S_{XY}(a, b) = \lim_{T\to\infty} \frac{|W_\phi X_T(a, b) W_\phi Y_T(a, b)|}{T}$$
$$= \frac{e^{2i\omega b}}{C_\phi}\left|\int_R S_X(\omega)\operatorname{sgn}(\hat{X}(\omega))\hat{\phi}(a\omega)d\omega\right|\cdot\left|\int_R S_Y(\omega)\operatorname{sgn}(\hat{Y}(\omega))\hat{\phi}(a\omega)d\omega\right|$$

当 $X(t) = Y(t)$ 时便得到 1) 式•

在传统的随机过程分析中, 过程相关函数或互相关函数的 Fourier 变换即为自功率谱或互功率谱, 而在小波分析方法中, 这种直接关系并不存在, 不过我们有:

性质 3.5 随机过程的自相关函数的小波变换与其自功率谱及互功率谱之间满足如下关系:

1) $W_\phi R(a, b) = |a|^{1/2}e^{i\omega b}\langle S(\omega), \hat{\phi}(a\omega)\rangle$

2) $W_\phi R_{XY}(a, b) = |a|^{1/2}e^{i\omega b}\langle S_{XY}(\omega), \hat{\phi}(a\omega)\rangle$

上述公式极易证明:

$$W_\phi R_{XY}(a, b) = \langle R_{XY}(\tau), \phi_{a,b}\rangle$$
$$= \langle \hat{R}_{XY}(\omega), |a|^{1/2}e^{-i\omega b}\hat{\phi}(a\omega)\rangle$$
$$= |a|^{1/2}e^{i\omega b}\langle S_{XY}(\omega), \hat{\phi}(a\omega)\rangle$$

§4. 结 语

本文对平稳随机过程的小波分析方法进行了研究, 给出了小波变换下的时—频功率谱及时—频互功率谱的若干性质• 与传统的随机过程功率谱分析方法相比, 它可以给出过程更细微的分析, 但是其运算关系复杂• 可以预期, 随着小波研究的深入, 将会取得更多令人鼓舞的结论和方法•

参 考 文 献

1 Richard E. Mortensen, Random Signals and Systems, John Wiley & Sons, New York (1987), 1—80.
2 Charles K. Chui, An Introduction to Wavelet, Academic Press Inc., New York (1991), 60—64.
3 秦前清等,《实用小波分析》, 西安电子科技大学出版社, 西安 (1994), 4—17.
4 张世清等, 能量无限信号的小波分析方法, 重庆大学学报, **19**(4) (1996), 53—59.
5 刘贵忠等,《小波分析及应用》, 西安电子科技大学出版社, 西安 (1992), 17—30.

The Wavelet Aanalysis Method of Stationary Random Processes

Luo Shaoming Zhang Xiangwei
(Shantou University, Shantou, Guangdong 515063, P.R.China)

Abstract

The spectral analysis of stationary random processes is studied by using wavelet transform method. On the basis of wavelet transform, the conception of time_frequency power spectral density of random processes and time_frequency cross_spectral density of jointly stationary random processes are presented. The characters of the time_frequency power spectral density and its relationship with traditional power spectral density are also studied in details.

Key words wavelet transform, spectral analysis, correlation function