应用数学和力学, 第 19 卷 第 10 期(1998 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

多项式矩阵代数性质讨论*

梁治安[①]　　叶庆凯[①]

(1997 年 7 月 7 日收到)

摘　　要

本文利用系统与控制论中有关多项式矩阵的结果, 对多项式矩阵代数性质进行讨论, 得到的主要结果有多项式方阵环是主理想环, 也是主单侧理想环•

关键词　多项式矩阵　左(右) 互质　主理想环

中图分类号　O174

§ 1. 讨　　论

实数域或复数域上多项式矩阵是描述系统与控制数学模型的工具, 最常见的有系统矩阵与传递函数矩阵• 通过对这些矩阵的分析研究, 可以得到系统的属性• 显然作为纯代数的内容, 多项式矩阵理论的发展, 对于它在控制系统中的应用会有一定的益处• 本文基于这种思想, 利用多项式矩阵在应用中产生和建立的一些概念和结论, 来推导它的代数性质• 主要探讨由域上多项式环到域上多项式方阵环, 哪些原有的性质继承了下来•

数域上的多项式环是一个 Euclid 整环, 有相应的 Euclid 除法• 在多项式矩阵中, 也可以定义次数, 并且, 已证明它有相应的 Euclid 除法[1]• 另外, Euclid 整环是一个主理想环, 那么自然要考虑多项式方阵环的理想与单侧理想是否也有类似于多项式环的结果• 这就是本文要探讨的主要内容•

本文以 $R[x]^{n\times n}$ 表示实数域上 $n\times n$ 矩阵的全体; 以 $R(x)^{n\times n}$ 表示实数域上 $n\times n$ 有理分式函数矩阵的全体•

§ 2. 多项式方阵环的理想与单侧理想

我们知道多项式环 $R[x]$ 是主理想环, 下面可证多项式方阵环 $R[x]^{n\times n}$ 尽管不再是整环, 但它仍保留了每一个理想都是主理想的特性• 以$(\cdot)$表示由• 生成的主理想•

首先, 我们引用一个概念• 一个 $n\times n$ 矩阵称为 Smith 形矩阵, 如果它是一个对角矩阵, 且当有非零对角元时, 每一个非零对角元除尽其后的对角元•

定理 2. 1　多项式方阵环 $R[x]^{n\times n}$ 的每一个理想都是由一个纯量矩阵生成的主理想•

*　高等学校博士学科专项基金, 国家自然科学基金(69574001) 和内蒙古自然科学基金资助项目(950308)

①　北京大学力学与工程科学系, 北京 100871

证明 设 K 是 $R[x]^{n\times n}$ 的任一个理想. 当 $K=\{0\}$, 即 K 只包含 n 阶零矩阵时, $K=(0)$. 当 $K=R[x]^{n\times n}$ 时, $K=(I_n)$, 其中 I_n 是 n 阶单位矩阵.

现设 K 是 $R[x]^{n\times n}$ 的一个非平凡理想. 令 $A(x)\neq 0$ 是 K 中的一个非零元. 则存在单模矩阵 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 使得 $P(x)A(x)Q(x)$ 为 $A(x)$ 的 Smith 标准形, 由于 K 是 $R[x]^{n\times n}$ 的理想, $P(x)A(x)Q(x)\in K$, 故 K 中有 Smith 形矩阵. 在 K 中取一个 Smith 对角矩阵

$$D(x)=\operatorname{diag}(d_1(x), d_2(x), \cdots d_n(x))$$

使得在所有 K 中的 Smith 形矩阵中, $d_1(x)$ 的次数最小. 从而

$$\operatorname{diag}(d_1(x), 0, \cdots 0)=D(x)E_{11}\in K$$

其中 E_{11} 是 $(1,1)$ 位置为 1, 其余位置为零的 n 阶矩阵. 更进一步,

$$\operatorname{diag}(d_1(x), d_1(x), \cdots d_1(x))\in K$$

设 $A(x)$ 为 K 中的任一矩阵, 则存在单模矩阵 $P(x)$, $Q(x)$ 使得

$$P(x)A(x)Q(x)=\operatorname{diag}(f_1(x), \cdots, f_r(x), 0, \cdots 0)=A_1(x)$$

为 $A(x)$ 的 Smith 形. 我们说, $d_1(x)\mid f_1(x)$. 否则, 存在 $q(x), r(x)\in R[x]$ 使得

$$f_1(x)=q(x)d_1(x)+r(x)$$

$r(x)\neq 0$, 且 $\partial(r(x))<\partial(d_1(x))$.

从而有

$$\operatorname{diag}(r(x), f_2(x), \cdots, f_r(x), 0, \cdots, 0)=\operatorname{diag}(f_1(x), \cdots, f_r(x), 0, \cdots, 0)$$
$$-\operatorname{diag}(q(x), 0, \cdots, 0)\operatorname{diag}(d_1(x), d_1(x), \cdots, d_1(x))\in K$$

进而

$$\operatorname{diag}(r(x), 0, \cdots 0)=\operatorname{diag}(r(x), f_2(x), \cdots f_r(x), 0, \cdots, 0)E_{11}\in K$$

与 $D(x)$ 的取法矛盾. 故 $d_1(x)\mid f_1(x)$. 这样, 存在矩阵 $K(x)\in R[x]^{n\times n}$ 使得

$$A_1(x)=K(x)\operatorname{diag}(d_1(x), d_1(x), \cdots d_1(x))$$

从而

$$A(x)=P(x)^{-1}K(x)\operatorname{diag}(d_1(x), d_1(x), \cdots d_1(x))Q(x)^{-1}$$

所以 $A(x)\in(\operatorname{diag}(d_1(x), d_1(x), \cdots d_1(x)))=(d_1(x)I_n)$.

定理得证.

多项式环是交换环, 所以左(右)理想即为理想. 多项式矩阵环不满足交换律, 则有非理想的单侧理想. 我们在下面只考虑左理想, 对右理想有类似的结果. 我们将 $R[x]^{n\times n}$ 的左理想分成两类来考虑. 一类是含有非奇异矩阵的左理想, 另一类是不含非奇异矩阵的左理想.

定理 2.2 $R[x]^{n\times n}$ 的任一含有非奇异矩阵的左理想均是由一个非奇异矩阵生成的主左理想.

证明 设 K 是 $R[x]^{n\times n}$ 的任一含有非奇异矩阵的左理想. 在 K 中取一个具有最小行列式次数 r 的非奇异矩阵 $A(x)$.

当 $r=0$ 时, $A(x)$ 是单模矩阵, 则 $K=(A(x))_l=R[x]^{n\times n}$.

现设 $r>0$. $A(x)$ 与 K 中的任何非零矩阵都不是右互质的. 否则, 由[1], 若 $A(x)$ 与 $B(x)\in K$ 右互质, 存在 $D(x), C(x)\in R[x]^{n\times n}$ 使得

$$D(x)A(x)+C(x)B(x)=I_n$$

$I_n\in K$, 从而 $A(x)$ 的行列式次数在 K 中不是最低的, 与 $A(x)$ 的取法矛盾.

任取非零 $B(x)\in K$, 则 $A(x)$ 与 $B(x)$ 有非单模的最大右公因子 $D(x)$. 由[1], 存在

$$P(x),\ Q(x)\in R[x]^{n\times n}$$

使得

$$P(x)A(x)+Q(x)B(x)=D(x)$$

从而 $D(x)\in K$• 由 $A(x)$的取法, 可得 $A(x)=M(x)D(x)$, 其中 $M(x)$ 是单模矩阵• 从而 $A(x)$是 $B(x)$的右因子• 这样 $B(x)\in(A(x))_l$, 那么 $K=(A(x))_l$, 即 K 是由$A(x)$生成的主左理想•

定理得证•

利用类似的证法可得下面的结论:

定理 2. 3 $R[x]^{n\times n}$ 的任何有限生成左理想均是由一个矩阵生成的主左理想•

对于由奇异矩阵构成的左理想同样可得与定理 2. 2 相同的结果•

所谓 Schur 形矩阵, 即为形式如下的矩阵:

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1j_1}(x) & * & \cdots & & & & \cdots & & & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2j_2}(x) & * & \cdots & & & \cdots & * \\
 & \cdots & & & & \cdots & & & & \cdots & & & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & ,\ 0 & \cdots & 0 & a_{rj_r}(x) & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & \cdots & & & & \cdots & & & & \cdots & & & \cdots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

定理 2. 4 $R[x]^{n\times n}$ 的任何由奇异矩阵构成的左理想均是主左理想•

证明 设 L 是$R[x]^{n\times n}$的由奇异矩阵构成的非零左理想• 令

$S_i=\Big\{A(x)\in L\mid A(x)$只有一行不为零, 且非零行的左起第一个非零元在第 i 列上

设 $i\in I=\Big\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k\mid i_1<i_2<\cdots<i_k\Big\}$• 易知 S_i 是非空的• 在 S_i 中找一个矩阵$A_i(x)$, 使得 $A_i(x)$的第 i 列上的非零多项式和S_i 中其它元的第i 列上的非零多项式相比具有最小的次数• 这样, 我们即可推得下面的几个结论:

1. 对任意 $B_i(x)\in S_i$, $A_i(x)$第 i 列上的非零多项式整除$B_i(x)$的第 i 列上的多项式•

不妨设, $A_i(x)$, $B_i(x)$均是第一行不等于零, 其它各种情形均可类似证明• 利用反证法, 若结论不成立, 设 $A_i(x)$, $B_i(x)$ 的第一行第 i 列元分别为$a_{1i}(x)$, $b_{1i}(x)$, 则存在 $q(x)$, $r(x)\in R[x]^{n\times n}$使得

$$b_{1i}(x)=q(x)a_{1i}(x)+r(x),\qquad r(x)\neq 0$$

且 $\partial(r(x))<\partial(a_{1i}(x))$

这样

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & r(x) & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & \cdots & & \cdots & & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}=B_i(x)-\mathrm{diag}(q(x),0,\cdots,0)A_i(x)\in S_i$$

与$A_i(x)$的选取矛盾• 故结论成立•

2. 对任意 $B_{i_k}(x)\in S_{i_k}$, 不妨设 $B_{i_k}(x)$的第一行非零• 则一定存在 $d(x)\in R[x]$ 使得, $B_{i_k}(x)=Md(x)A_{i_k}(x)$, 其中 M 是行交换初等矩阵• 由 1,

$$B_{i_k}(x) - q(x)MA_{i_k}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & r_{1i_k+1}(x) & \cdots & r_{1n}(x) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in L$$

其中 M 是一个适当的行交换初等矩阵• 如果结论不成立, $r_{1i_k+1}(x), \cdots, r_{1n}(x)$不全为零• 与 i_k 的选取矛盾(i_k 是L 中非零矩阵的非零行的最小长度)• 故 $B_{i_k}(x) = Md(x)A_{i_k}(x)$

3. 任意 $B_{i_j}(x) \in S_{i_j}(x)$, 则 $B_{i_j}(x)$可由 $A_{i_j}(x), \cdots, A_{i_k}(x)$的组合表示•

存在 $D_{i_j}(x)$使得

$$B_{i_j}(x) - D_{i_j}(x)A_{i_j}(x) \in S_{ij+s_1} \quad \text{对某一个 } s_1, 1 \leqslant j+s_1 \leqslant k$$

存在 $D_{i_{j+s_1}}$使得

$$B_{i_j}(x) - D_{i_j}(x)A_{i_j}(x) - D_{ij+s_1}A_{ij+s_1}(x) \in S_{i_{j+s_2}} \quad s_1 \leqslant j+s_2 \leqslant k$$

这样作下去便得到

$$B_{i_j}(x) - D_{i_j}(x)A_{i_j}(x) - D_{ij+s_1}A_{ij+s_1}(x) - \cdots = D_{ij+s_t}(x)A_{ij+s_t}(x)$$

$$j+s_{t-1} \leqslant j+s_t \leqslant k$$

从而

$$B_{i_j}(x) = D_{i_j}(x)A_{i_j}(x) + D_{ij+s_1}A_{ij+s_1}(x) + \cdots + D_{ij+s_t}(x)A_{ij+s_t}(x)$$

最后, 设$B(x)$为 L 的任何一个非零矩阵, 则存在单模矩阵$P(x)$使得

$$P(x)B(x) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1}(x) & * & \cdots & & & & & & & & & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2j_2}(x) & * & \cdots & & & & & * \\ & \cdots & & & & \cdots & & & & \cdots & & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{rj_r}(x) & \cdots & & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ & \cdots & & & & \cdots & & & & \cdots & & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

为$B(x)$的Schur 标准形• $P(x)B(x) \in L$, 从而

$$P(x)B(x) = \sum B_{j_i}(x)$$

其中 $B_{j_i}(x)$属于某一个 S_i• 由于每一个$B_{j_i}(x)$可表示为 $A_i(x), i \in I$, 的组合, 则$B(x)$也可表示为$A_i(x), i \in I$, 的组合, 故

$$L = (A_{i_1}(x))_l + \cdots + (A_i(x))_l$$

即 L 为有限生成左理想• 由定理 2. 3, L 为某一个元生成的主左理想•

定理得证•

至次, 我们证得了 $R[x]^{n\times n}$ 是一个主理想环, 同样也是一个主单侧理想环, 又由 $R[x]^{n\times n}$的理想的形式, 我们易得 $R[x]^{n\times n}$又是一个素环• (即两个非零理想之乘积不等于零), 从而由[2] 可得

定理 2. 5 $R[x]^{n\times n}$是左(右) Noether 素环•

§3. Goldie 环 $R[x]^{n\times n}$ 及其性质

鉴于上面得到的结果,我们利用环论中的几个重要定理,描述 $R[x]^{n\times n}$ 及有理分式矩阵环 $R(x)^{n\times n}$ 的一些性质. 为了方便,列出了环论中的几个定义[2].

定义 3.1 环 R 中元素 a,如果它不是左零因子,也不是右零因子,就称之为正则元.

性质 3.1 $R[x]^{n\times n}$ 中的正则元即为所有非奇异矩阵.

定义 3.2 环 R 是环 Q 的子环. 称 Q 是 R 的左分式环,如果有

(1) R 的每一个正则元在 Q 中有逆元(因而 Q 必须有单位元);

(2) 任意 $x\in Q$,必有 $x=a^{-1}b$ 其中 $a, b\in R$, a 是正则元.

此时也说 R 是 Q 的左次环.

由于 $R(x)^{n\times n}$ 中的每一个元均有左仿分式分解,即,对任意 $G(x)\in R(x)^{n\times n}$,均有

$$G(x)=P(x)^{-1}Q(x),\qquad P(x), Q(x)\in R[x]^{n\times n}$$

且 $P(x)$ 非奇异. 从而易知

性质 3.2 $R[x]^{n\times n}$ 是 $R(x)^{n\times n}$ 的左次环,而 $R(x)^{n\times n}$ 是 $R[x]^{n\times n}$ 的左分式环.

定义 3.3 说环 R 是左 Ore 环,如果 R 含有正则元且满足下面条件:任给 $a, b\in R$, b 是正则元,则必有 $a_1, b_1\in R$, b_1 是正则元,且 $b_1a=a_1b$.

性质 3.3 $R[x]^{n\times n}$ 是左 Ore 环.

因为任意 $A(x), B(x)\in R[x]^{n\times n}$, $B(x)$ 是非奇异的,则 $A(x)B(x)^{-1}\in R(x)^{n\times n}$,且

$$A(x)B(x)^{-1}=P(x)^{-1}Q(x)\quad (\text{左仿分式分解})$$

从而

$$P(x)A(x)=Q(x)B(x)$$

$P(x)$ 是非奇异矩阵.

命题 3.1 $R[x]^{n\times n}$ 的由非奇异矩阵生成的左理想是稠密的,即与任何非零左理想均有非零交.

证明 设 $L=(A(x))_l$ 是由非奇异矩阵 $A(x)$ 生成的 $R[x]^{n\times n}$ 的主左理想, K 为任意一个非零左理想. 取 K 的一个非零元 $B(x)$,存在 $C(x), D(x)\in R[x]^{n\times n}$, $C(x)$ 非奇异,使得

$$B(x)A(x)^{-1}=C(x)^{-1}D(x)\quad (\text{仿分式分解})$$

从而, $C(x)B(x)=D(x)A(x)$ 是 $L\cap K$ 的非零元.

在上面的讨论中,如果 $A(x)$, $B(x)$ 均为非奇异矩阵,则 $P(x)A(x)=Q(x)B(x)$ 也是非奇异矩阵,这个结果可以给出 $R(x)^{n\times n}$ 中"通分"的可行性.

参 考 文 献

1 黄琳,《系统与控制理论中的线性代数》,科学出版社 (1984).

2 刘绍学,《环与代数》,科学出版社 (1983).

The Discussion on Algebraic Properties of Polynomial Matrices

Liang Zhian Ye Qingkai
(Department of Mechanics and Engineering Sciences,
Peking University, Beijing 100871, P. R. China)

Abstract

By using the results about polynomial matrix in the system and control theory, this paper gives some discussions about the algebraic properties of polynomial matrices. The obtained main results include that the ring of $n \times n$ polynomial matrices is a principal ideal and principal one_sided ideal ring.

Key words polynomial matrix, left (right) coprime, principal ideal ring