

一种非矩形平行平板流动腔的定常流分析^{*}

覃开荣^① 姜伟元^② 李惜惜^① 柳兆荣^①

(戴世强推荐, 1997 年 1 月 31 日收到, 1998 年 3 月 12 日收到修改稿)

摘 要

高度远小于横向和纵向几何尺寸的平行平板流动腔是当前用以体外研究细胞力学行为的主要工具之一。人们常用的是上下两平行平板是矩形边界的流动腔。这种流动腔内(除入口端和出口端的邻近区域外)的流场是均匀的^[1], 因而每次实验只能观测底部培养细胞受一种切应力值的影响情况。本文提出一种上下两平行平板不是矩形的平行平板流动腔。通过对腔内流体作定常流动的流场进行详细分析, 给出了流动腔内流速和腔底切应力值的分布。结果发现, 利用这种非矩形平行平板流动腔可以同时研究底部培养细胞在多种切应力值下的力学行为。本文理论结果与超声多普勒技术检测流速的实验结果吻合得相当好。

关键词 非矩形平行平板流动腔 切应力 定常流 细胞力学行为

中图分类号 O357

§ 1. 前 言

研究细胞生长与切应力关系^[1]首先必须解决的课题是如何在体外模拟既适合于细胞培养又能较方便地定量计算出切应力值的切应力环境。目前, 平行平板流动腔技术^[2]是体外模拟细胞生长的切应力环境的主要手段之一。

例如, 人们为了研究在切应力作用下动脉内皮细胞损伤、白细胞和血小板粘附和变形和动脉粥样硬化的关系, 常常采用矩形边界的流动腔^[3]。这种流动腔内(除入口端和出口端的邻近区域之外)的流场是均匀的^[4], 定常情况下流动腔底板上培养细胞所受的切应力 τ 可用公式 $\tau = 6\mu Q/(bh^2)$ (式中 Q 为流入流量, μ 为流体粘度, b 和 h 分别为流动腔的宽度和高度) 来计算^[4]。由于动脉粥样硬化往往发生在动脉狭窄部位, 所以为弄清其机理, 需了解细胞在狭窄部位(切应力值较高)与其它部位(切应力值较低), 即受不同切应力作用下, 结构和功能的差异情况。如用只有单一切应力值的矩形边界流动腔来研究不同切应力下内皮细胞的力学行为, 就必须通过改变流室宽度(b)和高度(h)或腔内流量(Q)而达到目的。改变流室宽度和高度必须要拆换装置; 而改变腔内流量时若不更换细胞则不同切应力作用下细胞的初始状态不一致, 所以每次改变流量时必须更换细胞。这些操作程序将不可避免地造成实验周期长、费用增多以及不同次实验细胞性能的差异而造成的数据可比性差等一系列的弊端。

* 国家自然科学基金重点项目与国家自然科学基金青年基金项目资助

① 复旦大学生物力学实验室, 上海 200433

② 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072

为了克服矩形边界流动腔在研究细胞力学行为时每次只能对一个切应力值进行的弊病,同时考虑到动脉粥样硬化往往发生在狭窄部位的事实,本文提出一种非矩形边界平行平板流动腔(如图1所示)·由上下两块沿 x 轴对称的平行平板构成一个沿 x 轴方向呈平行段、收缩段和另一平行段分布型状的扁平腔室,流体从左边界 b_1 流入,从右边界 b_2 流出,其余侧面封闭·当一定流量流体从较宽平行段经收缩段流向较狭平行段时,腔底的切应力将由较低值向较高值变化·从而实现一个流动腔底部呈现多种切应力值的分布·

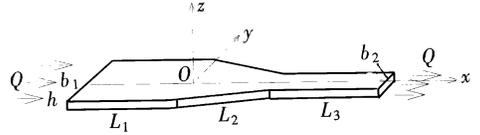


图1 非矩形平行平板流动腔

本文详细分析了非矩形流动腔内定常流的流场,给出了腔内流体平均速度和切应力场的分布·结果发现,利用这种非矩形流动腔有可能同时研究细胞在多种切应力值下的力学行为·本文理论结果与超声多普勒技术检测流速的实验结果吻合得相当好·

§ 2. 基本方程及其解

我们提出的非矩形流动腔如图1所示,其纵向长度 L_1, L_2, L_3 和横向长度 b_1, b_2 远大于垂直方向的高度 h ,即 $h \ll L_1, L_2, L_3, b_1, b_2$,因而 x, y 方向的速度分量 u, v 将远大于 z 方向的速度分量 w ($w \approx 0$),并且有 $\partial^2/\partial x^2, \partial^2/\partial y^2 \ll \partial^2/\partial z^2$,同时考虑到符合生理切应力值条件时,腔内流动属小雷诺数流动,这样,流动腔内流体运动方程中迁移加速度项与粘性项之比很小,可忽略不计,于是腔内流体作定常流动时的基本方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

其对应边界条件为

$$u|_{z=h/2} = 0, \quad v|_{z=h/2} = 0 \quad (2.5)$$

正如运动方程(2.4)所表明的,压力 p 仅是 x, y 的函数·考虑到边界条件(2.5),不难求得方程的解为

$$\textcircled{2} \quad u = -\frac{h^2}{8\mu} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.6)$$

$$v = -\frac{h^2}{8\mu} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.7)$$

关系式(2.6)和(2.7)表明速度 u, v 随 z 按抛物线规律变化·因此流动腔底部($z = -h/2$)的切应力表达式将为

$$\tau_{xz}|_{z=-h/2} = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \tau_{zy}|_{z=-h/2} = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.8)$$

为了进一步求得压力梯度,从而求得切应力随 x, y 的变化规律·让我们首先将关系式(2.6)和(2.7)中的速度 u, v 沿流动腔高度 h 取平均,注意到平行平板流动腔高度 h 是不变的,

即可得平均流速 $U(x, y)$, $V(x, y)$ 与压力梯度之间关系为

$$U = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} u dz = - \frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad V = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} v dz = - \frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.9)$$

由此可引进势函数 $\Phi = - \frac{h^2}{12\mu} p$, 使得

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2.10)$$

另一方面, 由连续性方程(2.1) 得平均流速 U 和 V 之间满足方程

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.11)$$

可进一步引进流函数 $\phi(x, y)$, 使得

$$U = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad V = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.12)$$

这样, 在复平面 $Z = x + iy$ 上可引进复势

$$W(Z) = \Phi(x, y) + i\phi(x, y) \quad (2.13)$$

其中, $i = \sqrt{-1}$. 一旦求得流动腔内的流动复势 $W(Z)$, 即可求得平均流速 $U(x, y)$, $V(x, y)$ 和压力 $p(x, y)$, 进而由关系式(2.8) 求得切应力由平均流速 $U(x, y)$, $V(x, y)$ 表出的关系式为

$$\tau_{zx} = \frac{6\mu U(x, y)}{h}, \quad \tau_{zy} = \frac{6\mu V(x, y)}{h} \quad (2.14)$$

§ 3. 平均流速 $U(x, y)$ 和 $V(x, y)$ 的确定

考虑单位高度流量 $Q^* = Q/h$ (其中 Q 为流量, h 为流动腔室的高度) 的流体自左边界流入, 从右边界流出. 由于 L_1 段距离入口端和 L_3 段距离出口端一定距离后流动腔在 xy 平面上的流动趋于均匀流动, 其流线基本上平行于 x 轴^[4], 因此, 可以将 xy 平面内的多边形渠道流动问题(见图 2a) 视为无穷远均匀来流经收缩段后再流入无限长渠道的势流问题. 对于 $Z = x + iy$ 平面上的这种渠道问题, 通过 Schwarz-Christoffel 变换可以变换成 $\zeta = \xi + i\eta$ 平面内在原点处置一个源(见图 2b) 所对应的上半平面中的流动问题; 为了数值计算的方便, 继续通过保角变换 $\zeta_1 = - (1/\pi) \ln \zeta + i$ 变换为 $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ 平面内平行渠道中的均匀流动问题(见图 2(c)). 下面详细介绍这一变换过程.

3.1 物理平面 z 到辅助平面 ζ 的变换

记物理平面上多角形各顶点为 $A_k (k = 1, 2, 3, \dots; \text{见图 } 2a)$, 内角为 θ_k , 则 Schwarz-Christoffel 变换将 Z 平面上多角形的顶点 A_k 分别变换为 ζ 平面上实轴上的点 A_k^* , 各点对应关系如表 1 所示.

表 1 SC 变换时 Z 平面上多边形的顶点与 ζ 平面上实轴上的点的对应关系

k	1	2	3	4	5
A_k	$L_2 + \frac{1}{2}b_2i$	$\frac{1}{2}b_1i$	∞	$-\frac{1}{2}b_1i$	$L_2 - \frac{1}{2}b_2i$
A_k^*	-1	-s	0	s	1
θ_k	$\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$	0	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$

于是, Schwarz_Christoffel 变换的表达式为^[5]

$$\left(\frac{dZ}{d\zeta} = M \prod_{k=1}^5 (\zeta - A_k^*)^{\frac{\theta_k}{\pi} - 1} = \frac{M}{\zeta} \left(\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - s^2} \right)^\lambda \right) \quad v \quad z$$

即

$$Z = M \int_{-1}^{\zeta} \frac{1}{\zeta} \left(\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - s^2} \right)^\lambda d\zeta + N \quad (3.1)$$

式中, $\lambda = \alpha / \pi, M, N$ 为待定复常数, s 为待定实常数。

先确定 M , 将上式对 ζ 沿圆心为 A_3^* , 半径为 $\varepsilon (\varepsilon \rightarrow 0)$ 的半圆 $C_{A_3^*}$ 顺时针积分, 由于 Z 从 $\frac{1}{2} b_1 i$ 变到 $-\frac{1}{2} b_1 i$, 则有

$$-\frac{1}{2} b_1 i = M \int_{C_{A_3^*}} \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{1}{\zeta} d\zeta = \frac{M}{s} \cdot (-\pi i)$$

所以

$$M = \frac{b_1}{\pi} s^{2\lambda} \quad (3.2)$$

由于 $\zeta = -1$ 时, $Z = L_2 + \frac{1}{2} b_2 i$, 所以

$$N = L_2 + \frac{1}{2} b_2 i \quad (3.3)$$

由表达式(3.1) ~ (3.3) 可知 Schwarz_Christoffel 变换式为

$$Z = \frac{b_1}{\pi} s^{2\lambda} \int_{-1}^{\zeta} \frac{1}{\zeta} \left(\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - s^2} \right)^\lambda d\zeta + L_2 + \frac{1}{2} b_2 i \quad (3.4)$$

其中 s 的值稍后给出。

公式(3.4) 将 $z = x + iy$ 平面上的流动腔内的流动(见图 2a) 变换成 $\zeta = \xi + i\eta$ 平面内在原点处置一个源(见图 2b) 所对应的上半平面中的流动问题。

3.2 辅助平面 ζ 到辅助平面 ζ_1 的变换

从变换式(3.4) 可以看出, 要写出反变换 $\zeta = f(Z)$ 的解析表达式是不可能的, 反变换只能进行数值解。为了数值计算时网格生成的方便^[5], 我们进一步做保角变换

$$\zeta_1 = -\frac{1}{\pi} \ln \zeta + i \quad (3.5)$$

变换式(3.5) 将辅助平面 ζ 所对应的上半平面的流动变换成辅助平面 ζ_1 的平行渠道的均匀流。

以上二个变换式(3.4) 和(3.5) 使得物理平面 Z 与辅助平面 ζ 和 ζ_1 建立了一一对应关系

$$Z \leftrightarrow \zeta \leftrightarrow \zeta_1$$

不难写出辅助平面 ζ 上所对应的上半平面的流动复势 $W(\zeta) = (Q^* / \pi) \ln \zeta$, 所以辅助平面 ζ_1 上和物理平面 Z 上的复势为

$$W(Z) = W(\zeta) = W(\zeta_1) = \frac{Q^*}{\pi} \ln \zeta = Q^* (i - \zeta_1) \quad (3.6)$$

因此, 流函数 ψ 和势函数 ϕ 的表达式分别为

$$\psi(x, y) = \psi(\xi, \eta) = \psi(\xi_1, \eta_1) = Q^* (1 - \eta_1) \quad (3.7)$$

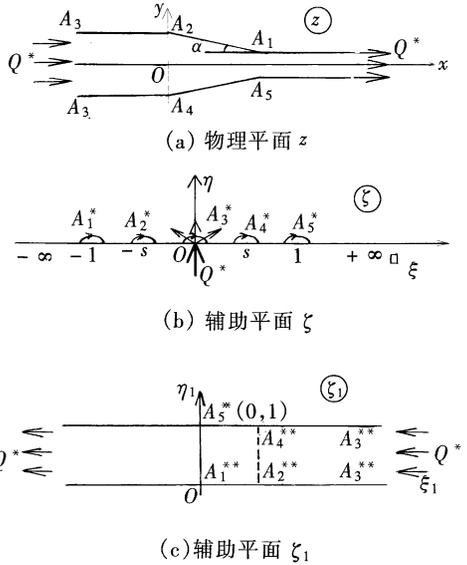


图 2 流动腔流动问题的归结

与

$$\varphi(x, y) = \varphi(\xi, \eta) = \varphi(\xi_1, \eta_1) = -Q^* \xi_1 \quad (3.8)$$

平均流速 U, V 满足

$$U - iV = \frac{dW(Z)}{dZ} = \frac{dW(\zeta)}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{Q^*}{b_1} \cdot \frac{1}{s^{2\lambda}} \cdot \left(\frac{\zeta^2 - s^2}{\zeta^2 - 1} \right)^\lambda \quad (3.9)$$

由于 $\zeta \rightarrow \infty$ 时, $U = Q^*/b_2$ 且 $V = 0$, 所以根据表达式(3.7)可知

$$-\frac{Q^*}{b_2} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{Q^*}{b_1 s^{2\lambda}} \left(\frac{\zeta^2 - s^2}{\zeta^2 - 1} \right)^\lambda = \frac{Q^*}{b_1 s^{2\lambda}}$$

于是

$$s = \left[\frac{b_2}{b_1} \frac{1}{\lambda} \right]^{\frac{1}{2\lambda}} \quad (3.10)$$

综上所述, 计算流动腔内的复势 $W(Z)$ 和平均流速 $U(x, y), V(x, y)$ 的方法为

(i) 给定物理平面上某一点 $Z = x + iy$, 根据(3.4)式求出 $\zeta = \xi + i\eta$ 的数值, 将 ζ 的值代入(3.5)式求出 $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$;

(ii) 将 ζ_1 的值代入(3.6)式求出复势 $W(Z)$;

(iii) 将 ζ 的值代入(3.9)式求出 $U(x, y)$ 和 $V(x, y)$ 。

§ 4. 数值结果及其与实验结果的比较

在进行具体的数值计算以前, 我们对公式(3.4)中的数值积分做一点说明。由于积分公式(3.4)中的被积函数含有奇点, 用通常的梯形公式计算在这些奇点附近的结果会产生较大的误差。这里, 我们用 R. Thomas Davis^[5]推荐的公式可以保证在包括奇点在内的所有区域内有两阶精度 $O(\Delta\zeta^2)$, 其表达式如下

$$z_{m+1} - z_m = \frac{b_1 s^{2\lambda}}{\pi} \cdot \frac{1}{(\Delta\zeta_m)^4} \prod_{k=1}^5 \frac{(\zeta - A_k^*)^{\frac{\theta_k}{\pi}}}{\frac{\theta_k}{\pi}} \Bigg|_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \quad (4.1)$$

式中, $\Delta\zeta_m = \zeta_{m+1} - \zeta_m$ 为步长, m 为节点数。

表2 计算流动腔流场时选用的典型参数

参数名称	参数值
宽阔均匀段长度 L_1	4.00cm
宽阔均匀段宽度 b_1	4.60cm
狭窄均匀段长度 L_3	3.00cm
狭窄均匀段宽度 b_2	0.94cm
收缩段长度 L_2	3.00cm
流动腔高度 h	0.022cm
流体粘性系数 μ	0.001P·s

为了具体了解流动腔内流体平均流动速度 U 和 V 以及切应力 τ 的分布和变化规律, 我们参考常用平行平板流动腔的几何尺寸, 选用一组典型参数为例进行讨论。所选用的典型参数如表2所示。

将上述典型参数代入公式(3.4), 利用积分公式(4.1)和变换式(3.5)求出流动腔在辅助平面 ζ 和 ζ_1 上的形状如图3所示。

设流量 $Q = 40.0\text{cm}^3/\text{min}$ 。首先计算流线和等势线(即等压线)。由(3.6)和(3.7)可

知定常流条件下流动腔在辅助平面 ζ_1 上的流线和等势线方程为

$$\eta_1 = \text{const}, \quad \xi_1 = \text{const} \quad (4.2)$$

正如图 3(c) 所示的, 在辅助平面 ζ_1 上, 流动腔内流线(实线)和等势线(虚线)是分别平行于 ξ_1 轴和 η_1 轴的直线。利用公式(3.4)和(3.5)可算得流线(实线)和等势线(虚线)在辅助平面 ζ 和物理平面 Z 的分布。正如图 3(a) 所示, 在流动腔的两个平行段中, 离开角点附近一定区域后, 流线基本上平行于轴向, 等压线基本上垂直于轴向, 这说明在腔室平行段, 离开角点附近一定区域后流动将趋于均匀流; 在收缩段中, 离开角点附近一定区域后, 流线基本上沿扇形的径向, 而等压线基本上沿扇形的周向, 这说明在收缩段, 离开角点附近一定区域后流动趋于径向流。

其次, 在辅助平面 ζ_1 上将流动腔均匀划分成矩形网格, 利用关系(3.4)和(3.5)以及平均流速表达式(3.9), 不难算出平均流速 $U(x, y)$ 和 $V(x, y)$ 在物理平面 Z 上沿流动腔平面的分布规律(见图 4 和图 5)。当进一步将平均流速 $U(x, y)$, $V(x, y)$ 的数值代入关系式(2.14), 可相应得到底板上所受切应力 τ_x , τ_y 沿流动腔底部的分布

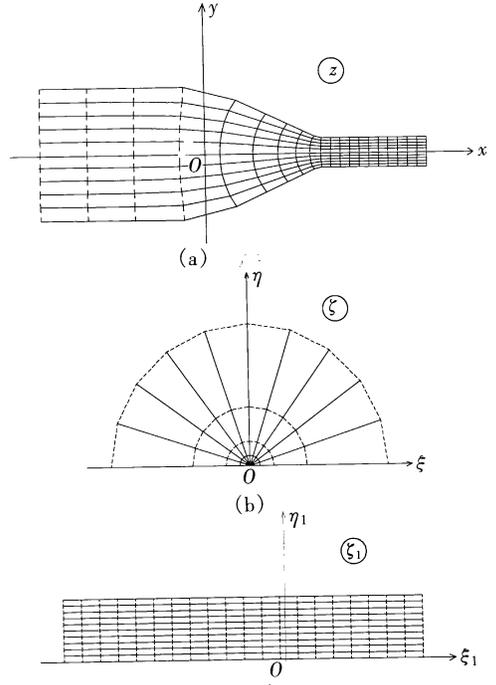


图 3 定常流情形下流动腔内流线(实线)和等压线(虚线)的分布

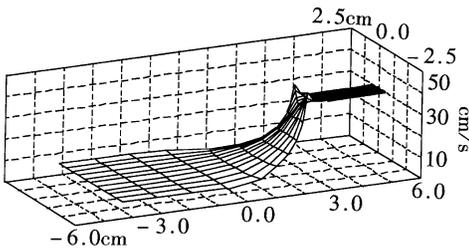


图 4 定常流情形下流动腔内平均流速 U 随 x, y 的变化

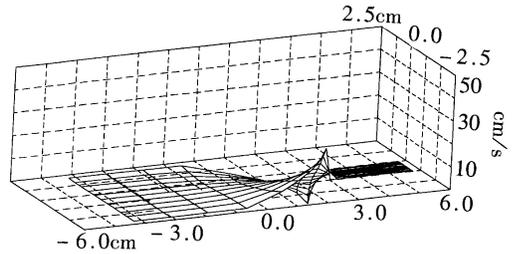


图 5 定常流情形下流动腔内平均流速 V 随 x, y 的变化

规律。将切应力分量 τ_x 和 τ_y 合成得切应力 $\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$ 的分布如图 6 示。从图 4~ 图 6 中可清楚看出, 平均流速 U, V 以及切应力 τ 在两个平行段(除去两端)中的数值基本不变, 两个平行段提供了一高一低的两个均匀切应力值, 而在两个平行段之间的过渡收缩段, 平均流速 U, V 以及切应力 τ 的数值由较低值逐步上升到较高值, 因此也实现了在一个流动腔内可同时呈现供观测细胞力学行为的多个不同切应力值的流场。

为了验证上述理论计算结果的正确性, 我们用超声多普勒测速技术对流动腔内的平均流速进行测量, 不失一般性, 我们以 x 方向的平均流速分量 U 为例, 正如图 7 所示, 在流动腔中心线(即 $y = 0$) 处, 对三种不同流量 Q (分别为 $Q = 40.0, 50.0$ 和 $65.0 \text{ cm}^3/\text{min}$), 沿 x 轴方向的不

同距离, 腔室内流速分量 U 的理论值和实验检测值吻合得相当好。同样如图 8 所示, 对于确定的流量(如 $Q = 40.0 \text{ cm}^3/\text{min}$), 腔室内不同位置所对应的流速分量 U 的理论值和实验值也吻合得相当好。对于速度分量 V 也可得到同样的结论, 因此可以预料, 进一步由关系式(2.14) 算出的切应力值也是合理的。

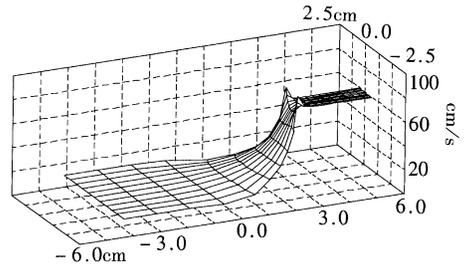


图 6 定常流情形下流动腔内切应力 τ 随 x, y 的变化

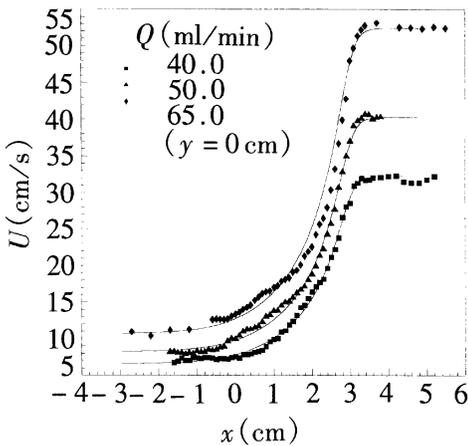


图 7 中心线($y = 0$)上不同流量 Q 下, 流速分量 U 的计算值(连续线)和实验值(实验点)的比较

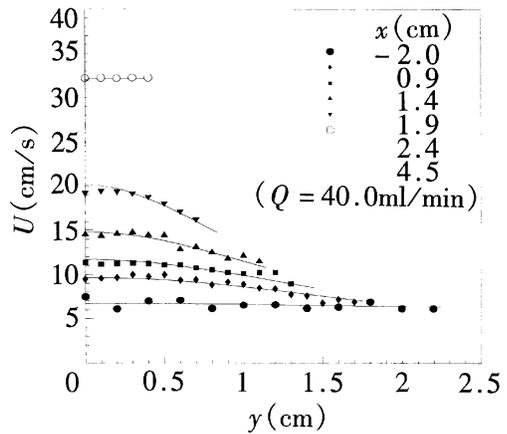


图 8 流量 $Q = 40.0 \text{ cm}^3/\text{min}$ 时, 不同位置流速分量 U 的计算值(连续线)和实验值(实验点)的比较

参 考 文 献

- [美]冯元桢著,《生物力学——运动、流动、应力和生长》(邓善熙译),四川教育出版社,(1993)•
- J. A. Frangos, et al., Shear stress induced stimulation of mammalian cell metabolism, *Biotechnology and Bioengineering*, **32**(10) (1988), 1053—1060•
- Daniel A. Hammer, Dynamics of cell adhesion under hydrodynamic flow, *Proceedings of the Fourth China Japan USA Singapore Conference on Biomechanics*, International Academic Publishers, Beijing (1995), 425—428•
- 姜伟元、李惜惜、覃开荣, 平行平板流动腔的合理设计和使用, *医用生物力学*, **11**(2) (1996), 97—102•
- R. Thomas Davis, Numerical methods for coordinate generation based on a mapping technique, J. A. Essers Ed. *Computational Methods for Turbulent, Transonic, and Viscous Flows*, Hemisphere Publishing Corporation (1983)•

On Analysis of the Steady Flow in an Irrectangular Parallel_Plate Flow Chamber

Qin Kairong

(Biomechanics Laboratory, Fudan University, Shanghai 200433, P. R. China)

Jiang Weiyuan

(Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P. R. China)

Li Xixi Liu Zhaorong

(Biomechanics Laboratory, Fudan University, Shanghai 200433, P. R. China)

Abstract

The parallel_plate flow chamber (PPFC), of which the height is far smaller than its own length and width, is one of the main apparatus for the in vitro study of the mechanical behaviors of cultured cells at the bottom of PPFC undergoing shear stress. The PPFC of which the upper and lower plates are rectangular is usually used by research workers, and the flow field in this kind of PPFC (except for the regions near the entrance and exit) is uniform^[1], so only the effect the shear stress with one value has on cultured cells can be observed during each experiment. A kind of PPFC of which the upper and lower plates are not rectangular is proposed in this paper. The distributions of the velocities inside and the shear stresses at the bottom of the chamber are given by analyzing the flow field of the steady flow in the PPFC. The results show that the mechanical behaviors of cultured cells undergoing the shear stresses with various values may be simultaneously observed by the use of this kind of irrectangular PPFC. The theoretical and experimental results obtained by the use of Ultrasonic Doppler show good agreement.

Key words irrectangular parallel_plate flow chamber, shear stress, steady flow, cell's mechanical behaviors