

Bingham 流体数值模拟的双罚函数—正交投影的隐式求解方法*

沙德松^① 郭杏林^① 顾元宪^①

(1997 年 3 月 26 日收到, 1998 年 3 月 16 日收到修改稿)

摘 要

本文对 Bingham 流体给出了双罚函数逼近和正交投影的隐式求解方法。这个方法把 Bingham 流体处理为承受不等式应力约束的 Newton 流体的逼近解。有效地模拟了可以出现流动或不流动的“刚性核”的 Bingham 流体的流动问题。

关键词 Bingham 流体 罚函数 正交投影 有限元
中图分类号 O242, O351

§ 1. 引 言

Non-Newton 流体的 Bingham 模型与 Newton 流体的主要区别在于它由两个参数控制: 应力屈服极限和粘性。当应力状态在屈服极限以下时材料为刚体; 当超过屈服极限时材料以准 Newton 方式流动^[1, 2, 7]。因此, 流体在流动的过程中常常产生一些流动或不流动的“刚体”核, 这些核的形状和大小取决于流体应力状态, 且在瞬态流动过程中是变化的。这种特性体现在石油开采和混凝土技术中的某些原油和水泥中。根据 Stangroom (1990)^[3]和其它大量研究工作^[4], 也可以用 Bingham 塑性模型来描述电流变体(ER)。因此, 关于 Bingham 流体的数值模拟的研究, 特别是电流变体在结构振动控制, “Smart”润滑等方面的应用, 已越来越引起人们的注意。大多数的研究工作都集中在一些特殊的问题的解析解和数值解上^[1, 6], 更一般情况的三维数值模拟还很少见到。

本文首先通过引进两种适当的粘性系数把流体处理为近似不可压和屈服极限以下的近似刚性, 并且采取“正交投影”的方法对应力的强度施加约束。逐渐增大这两种粘性系数使解答逼近 Bingham 流体的解; 在有限元方法中, 采用了减缩和选择积分的技术以克服压力“锁”的问题; 在数值方法上, 给出了可以使用一维变带宽存储的 Pre_Bi_CG 法和 Newton_Raphson 方法求解非对称的非线性方程组; 在时间域内使用无条件稳定的后 Euler 时间积分格式。为了更便于说明本文方法的有效性, 本文对变截面管道的流动问题进行了数值模拟。稳定后的结果出现三个“刚体核”, 以及除边界附近外的大约 45 度的流动带。结果的合理性说明了本文的方法是成功的。

* 国家自然科学基金资助项目(19472015)

① 大连理工大学工程力学系, 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023

§ 2. 本构模型

2.1 Bingham 流体的特性定律

根据 Bingham 流体的定义, 它的散逸函数为^[2]

$$\sigma_{ij} D_{ij} = 2g(D_{II})^{1/2} + 4\eta D_{II} \quad (2.1)$$

这里 g 和 η 分别是流体的屈服极限和粘性系数; D_{ij} 是应变率分量:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$$

其 v_i 是质点的速度分量, 并且 D_{ij} 服从约束

$$D_{kk} = \operatorname{div} v = 0$$

即 Bingham 塑性材料是不可压缩; 而

$$D_{II} = \frac{1}{2} D_{ij} D_{ij}$$

是张量 $\{D_{ij}\}$ 的第二不变量。

于是, 对 $D_{II} \neq 0$, 特性定律为

$$\sigma_{ij} = p \delta_{ij} + g D_{ij} / D_{II}^{1/2} + 2\eta D_{ij} \quad (2.2)$$

其中 p 为应力张量的球面部分, 若 $D_{II} = 0$, 应力张量不确定。

从式(2.2)并结合散逸函数(2.1), 容易得到 $\sigma_{II}^{1/2}$ 和 $D_{II}^{1/2}$ 的关系为

$$\sigma_{II}^{1/2} = g + 2\eta D_{II}^{1/2} \quad (2.3a)$$

这里, σ_{II} 被定义为

$$\sigma_{II} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D$$

其中 σ_{ij}^D 是应力偏量的分量, 即

$$\sigma_{ij}^D = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}$$

又从式(2.2)可以知道

$$D_{ij} / D_{II}^{1/2} = \sigma_{ij}^D / \sigma_{II}^{1/2} \quad (2.3b)$$

因此, 从式(2.2)可以得 Bingham 流体偏量部分的特性定律为^[2]

$$D_{ij} = \frac{1}{2\eta} \langle 1 - g / \sigma_{II}^{1/2} \rangle \sigma_{ij}^D \quad (2.4)$$

其中, $\langle \cdot \rangle$ 被定义为

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \\ 0, & \text{当 } x \leq 0 \end{cases}$$

2.2 Bingham 流体的逼近

综合上述, Bingham 流体具有下面主要性质:

1) 流体是不可压缩的, 即

$$D_{kk} = 0$$

2) 应力状态在屈服极限以下为刚性, 即

$$D_{ij} = 0, \quad \text{若 } \sigma_{II}^{1/2} \leq g$$

3) 应力状态在屈服极限以上具有粘性且应变率张量与应力偏量张量成比例, 即

$$D_{ij}/D_{II}^{1/2} = \sigma_{ij}^D/\sigma_{II}^{1/2}$$

对于约束 1) 和 2) 引进两种人工粘性使

$$\alpha_{kk} = \lambda D_{kk} \quad (2.5a)$$

$$\alpha_{ij}^D = 2\mu D_{ij}^D \quad (2.5b)$$

$$D_{ij}^D = D_{ij} - \frac{1}{3}D_{kk}\delta_{ij} \quad (2.5c)$$

其中 λ 和 $\mu \gg \eta$ 分别是对应于体积应变率和偏应变率的粘性系数。实质上, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 这个本构关系描述的正是 Newton 流体的逼近形式。

进一步, 修改屈服极限为

$$g^* = g \frac{\mu}{\mu - \eta} \quad (2.5d)$$

则 Bingham 流体的逼近模型是

$$\sigma_{ij} = \lambda D_{kk}\delta_{ij} + P_k(2\mu D_{ij}^D) \quad (2.6)$$

其中 P_k 是 σ_{ij} 在凸集 K :

$$K = \left\{ \sigma \mid \sigma = \{\sigma_{ij}\} \in R^6, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, F(\sigma) \leq 0 \right. \\ \left. F(\sigma) = \sigma_{II}^{1/2} - (g^* + 2\eta D_{II}^{1/2}) \right.$$

上的正交投影算子。

可以证明

$$\sigma_{ij}^D = P_k(2\mu D_{ij}^D) = \begin{cases} 2\mu D_{ij}^D, & \text{当 } 2\mu D_{II}^{1/2} \leq g^* + 2\eta D_{II}^{1/2} \\ 2\eta D_{ij}^D + g^* \frac{D_{ij}^D}{D_{II}^{1/2}}, & \text{当 } 2\mu D_{II}^{1/2} \geq g^* + 2\eta D_{II}^{1/2} \end{cases} \quad (2.7)$$

事实上, 根据正交投影定义, $\sigma_{ij}^D = P_k(2\mu D_{ij}^D)$ 满足下面极小化问题:

$$\min \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^D - 2\mu D_{ij}^D) (\sigma_{ij}^D - 2\mu D_{ij}^D) + \gamma F(\sigma)$$

$$S. t \quad \gamma \geq 0, F(\sigma) \leq 0, \forall F(\sigma) = 0$$

其中 γ 是 Lagrange 乘子。根据 Kuhn-Tucker 最优性必要条件, 对于 $\gamma > 0$ 可以得到

$$\sigma_{ij}^D = 2\mu D_{ij}^D - \gamma \frac{\sigma_{ij}^D}{2\sigma_{II}^{1/2}} = 2\mu D_{ij}^D - \gamma \frac{D_{ij}^D}{2D_{II}^{1/2}} \quad (2.8)$$

代入上式到

$$F(\sigma) = \left[\frac{1}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D \right]^{1/2} - (g^* + 2\eta D_{II}^{1/2}) = 0$$

中, 可求出 γ , 再代入到 (2.8) 式则得到 (2.7) 式。

本构模型 (2.6) 具有性质:

- 1) 应力张量是应变率张量的连续函数;
- 2) 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 和 $\mu \rightarrow \infty$ 时, $g^* \rightarrow \infty$, 且在 3.2 节将证明

$$D_{kk} \rightarrow 0 \text{ 和 } D_{ij}^D \rightarrow 0 \quad \text{当 } \sigma_{II}^{1/2} \leq g$$

因此, 可用本构模型 (2.6) 逼近 Bingham 流体模型 (2.4)。而 λ 和 μ 实际上是惩罚因子。

§ 3. 虚功方程

下面给出 Bingham 流体的有限元的分析方法。

3.1 时间积分法

采用 Euler 描述, 则动力方程有下面的弱形式

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D_{ij}(w) \sigma_{ij}(v) d\Omega + \int_{\Omega} \rho w_i (v_{i,j} v_j + v_j^{\dot{)}} d\Omega \\ & = \int_{\Omega} w_i b_i d\Omega + \int_{\Gamma_f} w_i f_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3.1)$$

这里 $\{v_i\}$ 是满足速度边界条件的速度场, $\{w_i\}$ 是“检验”速度场, $\{v_j^{\dot{}}\}$ 是加速度矢量, ρ 是物质密度, $\{b_i\}$ 是体积力矢量, $\{f_i\}$ 是外力矢量, 应力张量 $\{\sigma_{ij}\}$ 满足本构方程(2.6)。

使用广义梯形法则^[2], 有

$$\frac{v_i^t}{\Delta t} = \frac{v_i^{t-\Delta t}}{\Delta t} + v_i^{\dot{}} \Delta t, \quad v_i^{\dot{}} = (1-\gamma) v_i^{\dot{}} \Delta t + \gamma v_i^{\dot{}}$$

$[\Delta t]$ 是时间间隔; 这里, $\gamma \in [0, 1]$ 。当 $\gamma = 0$, 是前 Euler 法(前差分); $\gamma = 0.5$ 是 Crank-Nicolson 法(梯形法则, 或中点法则); 当 $\gamma = 1$, 是后 Euler 法(后差分)。在这篇文章中, 我们仅讨论后 Euler 法。这时有

$$v_i^{\dot{}} = (v_i^t - v_i^{t-\Delta t}) / \Delta t \quad (3.2)$$

于是得 t 时刻速度场 $\{v_i^t\}$ 的虚功方程

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D_{ij}(w) \sigma_{ij}(v^t) d\Omega + \int_{\Omega} \rho w_i (v_{i,j}^t v_j^t + v_j^{\dot{}}) d\Omega \\ & = \int_{\Omega} w_i b_i^t d\Omega + \int_{\Gamma_f} w_i f_i^t d\Gamma \end{aligned} \quad (3.3)$$

详细地,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{N}_{ii}(w) D_{kk}(\mathbf{v}^t) d\Omega + \int_{\Omega} D_{ij}^D(w) P_k[2\mathcal{H}D_{ij}^D(\mathbf{v}^t)] d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho w_i (v_{i,j}^t v_j^t + v_j^{\dot{}}) d\Omega = \int_{\Omega} w_i b_i^t d\Omega + \int_{\Gamma_f} w_i f_i^t d\Gamma \end{aligned} \quad (3.4)$$

它的 Newton-Raphson 迭代求解格式为

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{N}_{ii}(w) D_{kk}(\Delta v^t) d\Omega + \int_{\Omega} D_{ij}^D(w) \Delta \{P_k[2\mathcal{H}D_{ij}^D(\mathbf{v}^t)]\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho w_i (v_{i,j}^t \Delta v_j^t + \Delta v_{i,j}^t v_j^t + \Delta v_j^{\dot{}}) d\Omega \\ & = \int_{\Omega} w_i b_i^t d\Omega + \int_{\Gamma_f} w_i f_i^t d\Gamma - \int_{\Omega} \mathcal{N}_{ii}(w) D_{kk}(\mathbf{v}^t) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} D_{ij}^D(w) P_k[2\mathcal{H}D_{ij}^D(\mathbf{v}^t)] d\Omega - \int_{\Omega} \rho w_i (v_{i,j}^t v_j^t + v_j^{\dot{}}) d\Omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2 双罚函数逼近的收敛性

(3.4) 式进一步可以写为

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{N}_{ii}(w) D_{kk}(\mathbf{v}^t) d\Omega + \int_{\Omega_1} 2\mathcal{H}D_{ij}^D(w) D_{ij}^D(\mathbf{v}^t) d\Omega \\ & + \int_{\Omega_2} D_{ij}^D(w) [2\mathcal{H}D_{ij}^D(\mathbf{v}^t) + g^* D_{ij}^D(\mathbf{v}^t) / D_{ij}^D(\mathbf{v}^t)] d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho w_i [v_{i,j}^t v_j^t + (v_i^t - v_i^{t-\Delta t}) / \Delta t] d\Omega \\ & = \int_{\Omega} w_i b_i^t d\Omega + \int_{\Gamma_f} w_i f_i^t d\Gamma \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ 。设速度场 $\{v_i^t\}$ 对任意检验函数 $\{w_i\}$ 满足虚功方程(3.6) 和位移边界条件, 取检验函数 $\{w_i = \{v_i^t\}$ 且位移边界条件为零, 则

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{M}_{ii}(\mathbf{v}^t) D_{kk}(\mathbf{v}^t) d\Omega + \int_{\Omega_1} 2\mu D_{ij}^D(\mathbf{v}^t) D_{ij}^D(\mathbf{v}^t) d\Omega \\ & + \int_{\Omega_2} D_{ij}^D(\mathbf{v}^t) [2\eta D_{ij}^D(\mathbf{v}^t) + g^* D_{ij}^D(\mathbf{v}^t) / D_{ii}^{1/2}(\mathbf{v}^t)] d\Omega \\ = & \int_{\Omega} \rho v_i^t [v_{i,j}^t v_j^t + (v_i^t - v_i^{t-\Delta t}) / \Delta t] d\Omega \\ = & \int_{\Omega} v_i^t b_i^t d\Omega + \int_{\Gamma_f} v_i^t f_i^t d\Gamma \end{aligned} \quad (3.7)$$

若每项积分都可积, 则当 $\lambda \rightarrow \infty$ 和 $\mu \rightarrow \infty$ 时, 由于对域内任一点有

$$D_{ii}(\mathbf{v}^t) D_{kk}(\mathbf{v}^t) \geq 0, \quad D_{ij}^D(\mathbf{v}^t) D_{ij}^D(\mathbf{v}^t) = 2D_{ii} \geq 0$$

所以对整个域 Ω 内有 $D_{kk} \rightarrow 0$ 和对 $F(\sigma) \leq 0$ 的域 Ω_1 内有 $D_{ij} \rightarrow 0$ 。从而有上一节的性质 2):

$$D_{kk} \rightarrow 0 \text{ 和 } D_{ij}^D \rightarrow 0 \text{ 当 } \sigma_{ii}^{1/2} \leq g$$

§ 4. 数值分析方法

4.1 有限元逼近

3

.3

方程(3.4) 是以速度场 $\{v_i^t\}$ 为未知量的非线性方程。设

$$v_i^h(\mathbf{x}) = \Phi^q(\mathbf{x}) \delta_j u_j^q \quad (4.1)$$

命

$$N_{ij}^q = \Phi^q(\mathbf{x}) \delta_j \quad (4.1)'$$

则(4.1) 式为

$$v_i^h(\mathbf{x}) = N_{ij}^q u_j^q$$

或

$$\mathbf{v}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^q u_j^q \quad (4.1)''$$

这是速度场 $\{v_i^t\}$ 的有限维逼近。其中 $\{u_i^q\}$ 是 $\{v_i^h\}$ 在取定基

$$\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n$$

下的分量, n 是维数。在有限元方法中, Φ^q 和 $\{u_{ij}^q\}$ 通常叫形函数和节点速度。 D_{kk} 和 D_{ij}^D 分别被逼近为

$$D_{kk}(\mathbf{v}^h) = \Phi_{,k}^q \delta_{k\beta} u_{\beta}^q$$

和

$$D_{ij}^D(\mathbf{v}^h) = \left[\frac{1}{2} (\Phi_{,j} \delta_{i\beta} + \Phi_{,i} \delta_{j\beta}) - \frac{1}{3} \Phi_{,k} \delta_{k\beta} \delta_{ij} \right] u_{\beta}^q$$

用 $\{v_i^h\}$ 和 $\{w_i^h\}$ 代替方程(3.4) 中的 $\{v_i^t\}$ 和 $\{w_i\}$, 则得到非线性方程(3.4) 的以 $\{u_i^q\}$ 为未知量的 Galerkin 逼近的有限维非线性方程组

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{M}_{ii}(\mathbf{N}_{\alpha}^p) D_{kk}(\mathbf{v}^h) d\Omega + \int_{\Omega} D_{ij}^D(\mathbf{N}_{\alpha}^p) P_k [2\mu D_{ij}^D(\mathbf{v}^h)] d\Omega \\ & + \int_{\Omega^h} \rho N_{i\alpha}^p (v_{i,j}^h v_j^h + v_i^h) d\Omega - \int_{\Omega^h} N_{i\alpha}^p b_i^t d\Omega - \int_{\Gamma_f} N_{i\alpha}^p f_i^t d\Gamma \end{aligned}$$

$$= 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n; \alpha = 1, 2, 3) \quad (4.2)$$

有限维非线性方程组(4.2)的 Newton_Raphson 迭代格式可以给出如下

$$J_{\alpha\beta}^{pq}(v^h) \Delta u_{\beta}^q = -r_{\alpha}^p(v^h) \quad (4.3)$$

其中

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta}^{pq}(v^h) = & \int_{\Omega^h} \mathcal{M}_{ii}(\mathbf{N}_{\alpha}^p) D_{kk}(\mathbf{N}_{\beta}^q) d\Omega + 2\mu \int_{\Omega} (1-\vartheta) D_{ij}^D(\mathbf{N}_{\alpha}^p) D_{ij}^D(\mathbf{N}_{\beta}^q) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \vartheta \left\{ 2\eta D_{ij}(\mathbf{N}_{\alpha}^p) D_{ij}(\mathbf{N}_{\beta}^q) + g \left[\frac{D_{ij}(\mathbf{N}_{\alpha}^p) D_{ij}(\mathbf{N}_{\beta}^q)}{D_{II}^{1/2}(v^h)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{D_{ij}(\mathbf{N}_{\alpha}^p) D_{\bar{j}}(v^h) D_{kl}(v^h) D_{kl}(\mathbf{N}_{\beta}^q)}{D_{II}^{3/2}(v^h)} \right] \right\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho N_{i\alpha}^p \left[v_{i,j}^h N_{j\beta}^q + v_j^h N_{i\beta}^q + \frac{1}{\Delta t} N_{i\beta}^q \right] d\Omega \end{aligned} \quad (4.4a)$$

$$\vartheta = \begin{cases} 0, & \text{当 } F(2\mu D_{ij}) < 0 \\ 1, & \text{当 } \mathcal{B}(2\mu D_{ij}) \geq 0 \end{cases} \quad (4.4b)$$

为 Jacobi 矩阵,

$$\begin{aligned} r_{\alpha}^p(v^h) = & \int_{\Omega} \mathcal{M}_{ii}(\mathbf{N}_{\alpha}^p) D_{kk}(\mathbf{v}^h) d\Omega + \int_{\Omega} D_{ij}^D(\mathbf{N}_{\alpha}^p) P_k[2\mu D_{ij}^D(\mathbf{v}^h)] d\Omega \\ & + \int_{\Omega^h} \rho N_{i\alpha}^p (v_{i,j}^h v_j^h + v_j^h) d\Omega - \int_{\Omega^h} N_{i\alpha}^p b_i^t d\Omega - \int_{\Gamma_f} N_{i\alpha}^p f_i^t d\Gamma \end{aligned} \quad (4.5)$$

为残余力向量。

应该注意的是,无论在什么应力状态下流体为不可压。因此,为了克服压力锁的问题,在计算 Jacobi 矩阵和残余力向量时,对(4.4a)式中的第一项积分和(4.5)式中的第一项积分需要采用非正常的 reduced 和 selected 积分的技术^[5]。

4.2 非对称方程组求解进一步改进

用标准的 Newton_Raphson 方法求解非线性方程组(4.3),每次迭代必须首先形成 Jacobi 矩阵和残余力向量(4.4—4.5),然后解线性方程组(4.3)。这不仅计算量很大,而且非对称的 Jacobi 矩阵(4.4a, b)需要较大的计算机内存。为了克服这两个缺点,我们把 Jacobi 矩阵(4.4a, b)分成对称和反对称两部分。用 $S_{\alpha\beta}^{pq}(v^h)$ 表示对称矩阵, $U_{\alpha\beta}^{pq}(v^h)$ 为反对称矩阵,则

$$J_{\alpha\beta}^{pq}(v^h) = S_{\alpha\beta}^{pq}(v^h) + U_{\alpha\beta}^{pq}(v^h)$$

定义

$$S_{\alpha\beta}^{pq}(v^h) = [J_{\alpha\beta}^{pq}(v^h) + J_{\beta\alpha}^{qp}(v^h)]/2$$

$$U_{\alpha\beta}^{pq}(v^h) = [J_{\alpha\beta}^{pq}(v^h) - J_{\beta\alpha}^{qp}(v^h)]/2$$

可以得到

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}^{pq}(v^h) = & \int_{\Omega^h} \mathcal{M}_{ii}(\mathbf{N}_{\alpha}^p) D_{kk}(\mathbf{N}_{\beta}^q) d\Omega + 2\mu \int_{\Omega} (1-\vartheta) D_{ij}^D(\mathbf{N}_{\alpha}^p) D_{ij}^D(\mathbf{N}_{\beta}^q) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \vartheta \left\{ 2\eta D_{ij}(\mathbf{N}_{\alpha}^p) D_{ij}(\mathbf{N}_{\beta}^q) + g \left[\frac{D_{ij}(\mathbf{N}_{\alpha}^p) D_{ij}(\mathbf{N}_{\beta}^q)}{D_{II}^{1/2}(v^h)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{D_{ij}(\mathbf{N}_{\alpha}^p) D_{\bar{j}}(v^h) D_{kl}(v^h) D_{kl}(\mathbf{N}_{\beta}^q)}{D_{II}^{3/2}(v^h)} \right] \right\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho \left[\frac{1}{\Delta t} N_{i\alpha}^p N_{i\beta}^q + N_{i\alpha}^p D_{\bar{j}}(v^h) N_{j\beta}^q \right] \end{aligned}$$

$$+= \frac{1}{2} (N_{i\alpha}^p v_j^h N_{\beta,j}^q + N_{j\alpha}^p v_i^h N_{\beta}^q) \Big] d\Omega \quad (4.6a)$$

其中

$$\vartheta = \begin{cases} 0, & \text{当 } F(2\mathcal{W}_{ij}) < 0 \\ 1, & \text{当 } F(2\mathcal{W}_{ij}) \geq 0 \end{cases} \quad (4.6b)$$

和

$$U_{\alpha\beta}^{pq}(v^h) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (N_{i\alpha}^p v_j^h N_{\beta,j}^q - N_{j\alpha}^p v_i^h N_{\beta}^q) d\Omega \quad (4.7)$$

(4.3) 式也可以写为矩阵的形式

$$\mathbf{J}(v^h) \Delta \mathbf{u} = -\mathbf{r}(v^h) \quad (4.8a)$$

$$\mathbf{J}(v^h) = \mathbf{S}(v^h) + \mathbf{U}(v^h) \quad (4.8b)$$

考虑到 Jacobi 矩阵的非对称性和尽量减少计算机存储, 我们给出预处理的双共轭梯度法 (Pre_Bi_CG) 求解方程(4.8a, b) 其具体求解步骤为

$$\begin{cases} \mathbf{R}_0 = -\mathbf{r}(v^h) - \mathbf{J}\Delta \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{R}_0 = -\mathbf{r}(v^h) - \mathbf{J}^T \Delta \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad \mathbf{N}$$

$n \geq 1$:

$$\begin{cases} \mathbf{S}\mathbf{R}_{n-1}^* = \mathbf{R}_{n-1} \\ \mathbf{S}\mathbf{R}_{n-1}^* = \mathbf{R}_{n-1\Omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{R}_{n-1}^* \\ \mathbf{R}_{n-1}^* \end{cases}$$

$$\rho_n = \langle \mathbf{R}_{n-1}^*, \mathbf{R}_{n-1}^* \rangle$$

$$\beta_n = \rho_n / \rho_{n-1}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_n = \mathbf{R}_{n-1}^* + \beta_n \mathbf{v}_{n-1} \\ \mathbf{v}_n = \mathbf{R}_{n-1}^* + \beta_n \mathbf{v}_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{p}_n = \mathbf{J}\mathbf{v}_n \\ \mathbf{p}_n = \mathbf{J}^T \mathbf{v}_n \end{cases}$$

$$\alpha_n = \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{p}_n \rangle$$

$$\alpha_n = \rho_n / \sigma_n$$

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_n = \Delta \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{v}_n \\ \Delta \mathbf{u}_n = \Delta \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{v}_n \\ \mathbf{R}_n = \mathbf{R}_{n-1} - \alpha_n \mathbf{p}_n \\ \mathbf{R}_n = \mathbf{R}_{n-1} - \alpha_n \mathbf{p}_n \end{cases}$$

在这个算法中, 预处理矩阵 \mathbf{S} 是对称的, 可以用一维向量存储; 又因为是常矩阵, 只须形成并 Cholesky 分解一次; 求解 \mathbf{R}_{n-1}^* 和 \mathbf{R}_{n-1} 时仅仅进行回代, 这只相当于矩阵和向量相乘的计算量; 矩阵 \mathbf{J} (或 \mathbf{J}^T) 和向量相乘可以使用(4.8b) 且 \mathbf{U} (或 \mathbf{U}^T) 和向量相乘可以在单元量级上进行, 节省了矩阵 \mathbf{J} 的存储。

4.3 数值计算过程

分别使用不同时刻及迭代过程中的 Jacobi 矩阵, 可以得到不同的算法。如 Newton_Raphson 迭代格式和修正的 Newton_Raphson 迭代格式。从而对 Pre_Bi_CG 方法提供不同的预处理矩阵 \mathbf{S} 。

标准的 Newton_Raphson 迭代及预处理双共轭梯度法的数值计算过程为:

1) 给定初始速度和常数 $k > 1$

2) 对时间增量步进行循环

2. 1) 给定初始罚参数 λ 和 μ

2. 2) 对罚参数循环

a) Newton_Raphson 迭代

a 1) 计算残余力向量(4. 5)

a 2) 计算对称矩阵(4. 6a, b) 和反对称矩阵(4. 7)

a 3) 对称矩阵进行 Cholesky 分解

a 4) 用 Pre_Bi_CG 方法解线性方程组(4. 8a, b)

a 5) 检查残余力向量的范数是否满足要求的精度。如果满足, 则结束 Newton_Raphson 迭代

b) 更新罚参数: $\lambda \leftarrow k\lambda$ 和 $\mu \leftarrow k\mu$

c) 检查不可压约束和刚性约束是否满足($F(\sigma) < 0$)。如果满足, 则结束罚参数循环, 转到 2)

为了加快收敛速度, 可以进一步使用一维收索的方法。本文不进一步讨论这一问题。

§ 5. 算 例

变截面管道和有限元网格如图 1 所示。左端给定 x 方向流速按抛物线 $v_1 = 4Vy(1 - y/h)$ 分布, 其中 V 为中点的流速(最大), y 方向流速为零($v_2 = 0$); 右端给定压力为零; 其它边界给

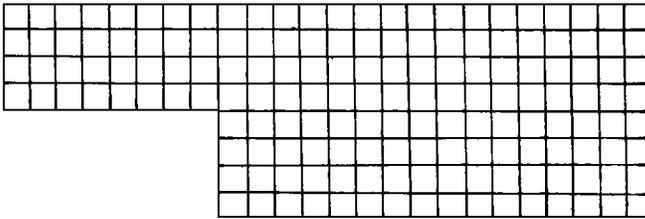


图 1 Bingham 流体在变截面管道中的有限元网格示意图

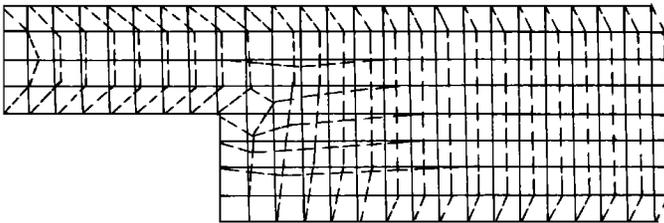


图 2 接点上的质点运动速度矢量的终点
按有限元网格的规则连接示意图

定速度为零($v_1 = v_2 = 0$)。取管道窄截面宽度为 1m, 宽截面宽度为 2m, 窄截面长度为 2m,

宽截面宽度为 4m, 时间增量 $\Delta t = 10^{-6}$ s, 屈服极限 $g = 10^3$ Pa, 罚参数 $\lambda = 7.142857 \times 10^4$ Pa s/m, $\mu = 7.142857 \times 10^3$ Pa s/m, 粘性系数 $\eta = 1$ Pa s/m, 常数 $k = 5$ 。采用四节点等参元, 计算 10 步, 结果基本稳定。为了更清楚地说明问题, 将起点在节点上的质点运动的速度矢量的终点按有限元网格的规则连接起来(虚线网格), 如图 2 所示。虚线网格保持正方形的为刚性, 即应力状态在屈服极限以下。否则, 应力状态达到或超过屈服极限, 发生流动。从图中可以看出, 除了沿着管道壁发生流动外, 在截面变化处有大约 45 度的流动带。在宽截面的左下角附近, 速度为零(不动的刚体核)。在管内有两个流动的刚体核。

§ 6. 结 论

Bingham 流体的流动是一个高度非线性问题, 而且具有不可压缩和刚性两个约束条件。因此, 有限元数值计算很困难。本文给出的双罚函数—正交投影法有效地解决了这个问题。用这个方法对三维的变截面管道问题进行计算, 同样具有很好的收敛性和稳定性, 由于结果显示的困难, 本文未予列出。但对于高 Reynolds 数的情况下, 也有类似于 Navier-Stokes 方程解的收敛性和稳定性问题。

参 考 文 献

- 1 John A. Tichym, Hydrodynamic lubrication theory for the Bingham plastic flow model, *J. Rheol.*, **35** (4) (1991), 477—496.
- 2 G. 迪沃, J. L. 利瓮斯, 《力学和物理学中的变分不等方程》, 王耀东译, 科学出版社 (1987).
- 3 J. E. Stangroom, The Bingham plastic model of ER fluids and its implications, *Proceedings of the Second International Conference on ER Fluids*, Technomic, Lancaster, PA (1990), 41—52.
- 4 Therese C. Jordan, Electrorheology, *IEEE Transaction on Electrical Insulation*, **24**(5) (1989), 849—878.
- 5 Thomas J. R. Hughes, *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632 (1987).
- 6 K. W. Wang, Y. S. Kim and D. B. Shea, Structural vibration control via electrorheological fluid based actuator with adaptive viscous and frictional damping, *J. Sound Vibration*, **177**(2) (1994), 227—237.
- 7 J. Lubliner, *Plasticity Theory*, Macmillan Publishing Company, New York (1990).

An Implicit Solution of Bi_Penalty Approximation with Orthogonality Projection for the Numerical Simulation of Bingham Fluid Flow

Sha Desong Guo Xinglin Gu Yuanxian

(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Department of
Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, P.R.China)

Abstract

An implicit algorithm of Bi_penalty approximation with orthogonality projection for the numerical simulation of Bingham fluid flow problems is proposed in this paper. A Newton fluid flow with two kinds of artificial viscosity subjected to the inequality constraint is introduced to approximate the Bingham fluid flow. This approach can effectively simulate the Bingham fluid flow with floating rigid cores or fixing rigid cores.

Key words Bingham fluid flow, penalty, orthogonality projection, finite element