应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

非自治发展方程的收敛的逼近惯性流形族*

王宗信[①②] 范先令[②] 朱正佑[③]

(程昌钧推荐, 1997 年 3 月 24 日收到, 1998 年 5 月 15 日收到修改稿)

摘 要

本文讨论非自治无穷维动力系统的解的长时间行为. 在谱间隙条件成立的情况下, 对一类非自治发展方程, 我们构造了一族收敛的逼近惯性流形.

关键词 非自治方程 逼近惯性流形 谱间隙条件
中图分类号 O175

§1. 引 言

到目前为止, 自治的无穷维动力系统在理论上已得到深入地研究, 在实际中也得到广泛地应用[1~4]. 对于非自治的无穷维动力系统, [5~9] 讨论了吸引子的存在性及维数估计; [12] 讨论了惯性流形的存在性. 惯性流形在理论上分析非自治无穷维动力系统的解的长时间行为时是一种行之有效的工具, 然而, 它一般不能显式表示出来, 这样就为实际计算带来不便.

为了克服上述不足, 本文构造了一族可以显式表示出来的收敛的逼近惯性流形 M_N, $N = 1, 2, \cdots$, 当 $N \to +\infty$ 时, M_N 可以充分逼近精确的惯性流形. 由于这里构造的逼近惯性流形是可以显式表示出来的, 因此, 它可以用来很方便地近似计算方程的解.

§2. 准 备

设 H 是一个 Hilbert 空间, 具有范数 $|\cdot|$ 和内积 $(\cdot, \cdot)$; A 是 H 中稠定的自伴无界正定线性算子, 定义域为 $D(A) = \{u \in H; Au \in H\}$, A 是从 $D(A)$ 到 H 上的同构映射, 且 A^{-1} 在 H 中是紧的. 因此, 存在一组构成标准正交基的特征向量 $\{W_j\}_{j \in N}$ 和特征值:

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j \leqslant \cdots, \quad \lambda_j \to +\infty, \text{ 当 } j \to \infty$$

和通常一样, 由算子 A 我们可得到分数幂算子 $A^s (s \in R)$, 和分数幂空间 $D(A^s)$, 它们具有范数 $|\cdot|_s = |A^s \cdot|$, 特别地, $D(A^0) = H$.

本文讨论如下非自治的发展方程:

---

* 国家自然科学基金资助项目(17671040)
① 复旦大学数学研究所, 上海 200433
② 兰州大学数学系, 兰州 730000
③ 上海大学数学系, 上海 200072

$$\frac{du}{dt}+Au=F(u)+f(t) \tag{2.1}$$

$$u|_{t=\tau}=u_\tau,\qquad \tau\in R \tag{2.2}$$

其中, F 是从 $D(A^{\gamma+\alpha})$ 到 $D(A^\gamma)$ 的 Lipschitz, 函数 $\gamma\geqslant 0$, $\alpha\in[0,1/2]$, f 是从 R 到 $D(A^\gamma)$ 的 Lipschitz 函数, 且存在正常数 M 使得:

$$|F(x)-F(y)|_\gamma\leqslant M|x-y|_{\gamma+\alpha},\qquad \forall x,y\in D(A^{\gamma+\alpha}) \tag{2.3}$$

$$|F(x)|_\gamma\leqslant M(1+|x|_{\gamma+\alpha}),\qquad \forall x\in D(A^{\gamma+\alpha}) \tag{2.4}$$

$$|f(t_1)-f(t_2)|_\gamma\leqslant M|t_1-t_2|,\qquad \forall t_1,t_2\in R \tag{2.5}$$

$$|f(t)|_\gamma\leqslant M,\qquad \forall t\in R \tag{2.6}$$

由(2.3)知, 对 $u_\tau\in D(A^{\gamma+\alpha})$, 问题(2.1) ~ (2.2) 存在唯一解 $u(t)$:

$$u\in C([\tau,+\infty),D(A^{\gamma+\alpha}))\cap L^2((\tau,T),D(A^{\gamma+\alpha+\frac{1}{2}})),\qquad \forall T>\tau \tag{2.7}$$

因此, 映射 $P(t,\tau)u_\tau=u(t)$, $t\geqslant\tau$, 可以构成一个过程 $\{P(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$, 满足:

$$P(\tau,\tau)=I,\qquad \forall\tau\in R$$

$$P(t,s)P(s,\tau)=P(t,\tau),\qquad t\geqslant s\geqslant\tau,\ \tau\in R$$

我们易知, 线性方程

$$du/dt+Au=0,\quad u(0)=u_0$$

在 H 定义一个强连续线性半群 $\{e^{-At}\}_{t\geqslant 0}$:

$$e^{-At}D(A^\gamma)\subset D(A^{\gamma+\alpha}),\qquad \forall t>0$$

令 P_n 表示从 H 到 $\{W_1,W_2,\cdots,W_n\}$ 张成的空间的投影, $Q_n=I-P_n$, 则 P_nH, Q_nH 在 e^{-At} 作用下是不变的, $t\geqslant 0$. $\{e^{-At}\}_{t\geqslant 0}$ 在 P_nH 上可张成群 $\{e^{-At}\}_{t\in R}$ 且满足

$$|e^{-At}Q_n|_{L(D(A^\gamma),D(A^{\gamma+\alpha}))}\leqslant(1/t^\alpha+\lambda_{n+1}^\alpha)e^{-\lambda_{n+1}t},\qquad t>0 \tag{2.8}$$

$$|A^{-1}e^{-At}Q_n|_{L(D(A^\gamma),D(A^{\gamma+\alpha}))}\leqslant\lambda_{n+1}^{\alpha-1}e^{-\lambda_{n+1}t},\qquad t\geqslant 0 \tag{2.9}$$

问题(2.1) ~ (2.2) 的惯性流形是指满足如下性质的有限维 Lipschitz 流形 $M\subset D(A^{\gamma+\alpha})\times R$:

(i) $P(t,\tau)\pi M_\tau\subset\pi M_t$, $\qquad\forall t,\tau\in R,\ t\geqslant\tau$ (2.10)

这里 $M_s=M\cap(D(A^{\gamma+\alpha})\times\{s\})$, $\forall s\in R$, π 表示从 $D(A^{\gamma+\alpha})\times R$ 到 $D(A^{\gamma+\alpha})$ 的投影,

$$\pi(u,t)=u,\qquad \forall(u,t)\in D(A^{\gamma+\alpha})\times R$$

(ii) M 以指数速率吸引(2.1) ~ (2.2) 的所有轨道, 即: $\forall u_\tau\in D(A^{\gamma+\alpha})$, $\exists\ \delta>0$, $c\geqslant 0$, 成立:

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(P(t,\tau)u_\tau,\pi M_t)&=\inf_{m\in\pi M_t}|u(t)-m|_{\gamma+\alpha}\\&\leqslant ce^{-\delta(t-\tau)}\mathrm{dist}(u_\tau,\pi M_\tau),\qquad\forall t\geqslant\tau\end{aligned} \tag{2.11}$$

以下为了方便, 以 P 表示从 $D(A^{\gamma+\alpha})$ 到 $\{W_1,W_2,\cdots,W_n\}$ 张成的空间的投影, $Q=I-P$, 则, P, Q 与 A^s, $s\in R$, 可交换, 且

$$|A^{\gamma+\alpha}p|\leqslant\lambda_n^\alpha|A^\gamma p|,\qquad\forall p\in PD(A^{\gamma+\alpha}),\ \alpha\geqslant 0 \tag{2.12}$$

$$|A^{\gamma+\alpha}q|\geqslant\lambda_{n+1}^\alpha|A^\gamma q|,\qquad\forall q\in QD(A^{\gamma+\alpha}),\ \alpha\geqslant 0 \tag{2.13}$$

[12] 指出, 按下式可定义一个从 $PD(A^{\gamma+\alpha})\times R$ 到 $QD(A^{\gamma+\alpha})$ 的函数 Φ:

$$\Phi(y_\tau,\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}e^{(s-\tau)A}(QF(y(s)+\Phi(y(s),s))+Qf(s))ds \tag{2.14}$$

其中, $y_\tau \in PD(A^{\gamma+\alpha})$, $\tau \in R$, y 是下列方程的解:

$$dy/dt + Ay = PF(y + \Phi(y, t)) + Pf(t) \tag{2.15}$$

$$y|_{t=\tau} = y_\tau \tag{2.16}$$

则函数 Φ的图像满足(2.10)、(2.11)•

函数 Φ是如下定义的映射T 的不动点:

$$T\phi(y_\tau, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{(s-\tau)A}(QF(y(s) + \phi(y(s), s)) + Qf(s))\,ds \tag{2.17}$$

其中$y_\tau \in PD(A^{\gamma+\alpha})$, $\tau \in R$, y 由上面定义• [12] 说明映射 T 在F_b 上, 当$(\lambda_{n+1} - \lambda_n)/(\lambda_{n+1}^\alpha + \lambda_n^\alpha)$ 充分大时, 定义是合理的:

由

$$F_b = \left\{\phi: PD(A^{\gamma+\alpha}) \times R \to QD(A^{\gamma+\alpha}),\ \mathrm{Lip}\phi \leqslant b,\right.$$
$$\left.\sup\left[\frac{|\phi(y, t)|_{\gamma+\alpha}}{1 + |y|_{\gamma+\alpha}},\ y \in PD(A^{\gamma+\alpha}),\ t \in R\right] \leqslant b\right\} \tag{2.18}$$

集合 F_b 在如下定义的度量$|\cdot|_\infty$ 下是完备的度量空间:

$$|\phi|_\infty = \sup\left\{\frac{|\phi(y, t)|_{\gamma+\alpha}}{1 + |y|_{\gamma+\alpha}},\ y \in PD(A^{\gamma+\alpha}),\ t \in R\right\}, \qquad \forall \phi \in F_b$$

当$(\lambda_{n+1} - \lambda_n)/(\lambda_{n+1}^\alpha + \lambda_n^\alpha)$ 充分大时, 下面的定理给出了(2.1) ~ (2.2) 的惯性流形的存在性结果•

定理 2.1 设 b 给定, $0 < b \leqslant 1/8$, 且

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant 4M\frac{(1+b)}{b}(\Gamma(1-\alpha) + 1)(\lambda_{n+1}^\alpha + \lambda_n^\alpha)$$

$$\lambda_n^\alpha \geqslant \frac{10}{9}M\lambda_1^{2\alpha-1}$$

则, 映射 T 是从F_b 到自身的压缩映射• 映射 T 的不动点Φ的图像M 是方程(2.1) ~ (2.2) 的惯性流形•

这个定理详细证明见[12]•

§3. 逼近惯性流形的构造

首先, 我们任意选定时间长度 η 和正整数N, 定义$\{y_k\}_{k=0,1,\dots,N}$ 如下:

$$\left.\begin{aligned} y_{k+1} &= R_\eta y_k + S_\eta PF(y_k + \phi(y_k, \tau - k\eta)) + S_\eta Pf(\tau - k\eta) \\ y_0 &= y_\tau \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

其中, $k = 0, 1, \dots, N-1$• 我们希望y_k 能逼近$y(\tau - k\eta)$• 在(2.17) 的右边用 $y = y(s)$ 代替 $y = y(s)$, $y = y(s)$ 在$(\tau - (k+1)\eta, \tau - k\eta)$ 上, $k = 0, \dots, N-1$, 等于 y_k, 在$(-\infty, \tau - N\eta)$ 上等于 y_N• 则我们得到一个可以逼近映射 T 的映射T_N^η:

$$\begin{aligned} T_N^\eta\phi(y_\tau, \tau) = {} & A^{-1}(I - e^{-A\eta})\sum_{k=0}^{N-1} e^{-kA\eta}(QF(y_k + \phi(y_k, \tau - k\eta)) \\ & + Qf(\tau - k\eta)) + A^{-1}e^{-AN\eta}(QF(y_N + \phi(y_N, \tau - N\eta)) \\ & + Qf(\tau - N\eta)) \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中, $\{y_k\}_{k=0,1,\dots,N}$ 由(3.1) 计算得到• 我们假设(3.1) 中的 R_η 和S_η 是线性算子, 且满足:

$$\left.\begin{aligned} |R_\eta P|_{L(D(A^\gamma), D(A^{\gamma+\alpha}))} &\leqslant e^{\eta\lambda_n} \\ |S_\eta P|_{L(D(A^\gamma), D(A^{\gamma+\alpha}))} &\leqslant \lambda_n^{\alpha-1}(e^{\eta\lambda_n} - 1) \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

事实上,我们考虑简单的 Euler 方法:

$$(y_k - y_{k+1})/\eta + Ay_k = PF(y_k + \Phi(y_k, \tau - k\eta)) + Pf(\tau - k\eta)$$

则有

$$R_\eta = I + \eta A,\quad S_\eta = -\eta I$$

且 R_η, S_η 满足(3.3)•

现在,为了构造逼近惯性流形族,我们选取一列严格正整数 $\{\eta_N\}_{N\in\mathbf{N}}$, 定义一列函数 $\{\Phi_N\}_{N\in\mathbf{N}}$:

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_0 = 0\\ &\Phi_{N+1} = T_N^{\eta}(\Phi_N), \qquad N \geqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

定义 M_N 为 Φ_N 的图像• 在谱间隙条件成立的情况下,下面(第4节)我们要证明 M_N 收敛到精确的惯性流形,当 $\eta_N \to 0$, $N\eta_N \to +\infty$ 时• 在本节的最后,我们给出以后常用的几个引理•

引理 3.1　给定 $\Phi \in F_b$, $y_\tau \in PD(A^{\gamma+\alpha})$, y 是(2.15) ~ (2.16)的解,则

1) 对所有 $t \in (-\infty, \tau)$, 有

$$|dy(t)/dt|_{\gamma+\alpha} \leqslant a_1(\lambda_n)(1 + |y_\tau|_{\gamma+\alpha})e^{-(\lambda_n + k_1\lambda_n^\alpha)(t-\tau)} \tag{3.5}$$

2) 令 $y_k = y(\tau - k\eta)$, 则有

$$y_{k+1} = R_\eta y_k + S_\eta PF(y_k + \Phi(y_k, \tau - k\eta)) + S_\eta Pf(\tau - k\eta) + \varepsilon_k$$

$$|\varepsilon_k|_{\gamma+\alpha} \leqslant a_2(\lambda_n)(1 + |y_\tau|_{\gamma+\alpha})\eta^2 e^{(\lambda_n + k_1\lambda_n^\alpha)(k+1)\eta} \tag{3.6}$$

这里 k_1 不依赖于 N, η 和 n; $a_1(\lambda_n)$, $a_2(\lambda_n)$ 依赖于 λ_n 而不依赖于 N, η•

证明　1) 用 $A^{2(\gamma+\alpha)}y(t)$ 乘(2.15), 有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y|^2_{\gamma+\alpha} + |A^{1/2}A^{\gamma+\alpha}y|^2$$

$$= (A^\gamma F(y + \Phi(y, t)), A^\alpha A^{\gamma+\alpha}y) + (A^\gamma f(t), A^\alpha A^{\gamma+\alpha}y)$$

$$\frac{d}{dt}|y|_{\gamma+\alpha} \geqslant -(\lambda_n + M(1+b)\lambda_n^\alpha)|y|_{\gamma+\alpha} - (M(1+b)\lambda_n^\alpha + M\lambda_n^\alpha)$$

从 t 到 τ 积分, $t \leqslant \tau$, 得

$$|y(t)|_{\gamma+\alpha} \leqslant 2(1 + |y_\tau|_{\gamma+\alpha})e^{(\lambda_n + M(1+b)\lambda_n^\alpha)(\tau - t)}$$

所以有

$$\begin{aligned}|dy(t)/dt|_{\gamma+\alpha} &\leqslant \lambda_n|y(t)|_{\gamma+\alpha} + \lambda_n^\alpha M(1+b)(1 + |y(t)|_{\gamma+\alpha}) + \lambda_n^\alpha M\\ &\leqslant a_1(\lambda_n)(1 + |y_\tau|_{\gamma+\alpha})e^{-(\lambda_n + k_1\lambda_n^\alpha)(t-\tau)}, \qquad \forall t \in (-\infty, \tau)\end{aligned}$$

这里, $\quad a_1(\lambda_n) = 2(\lambda_n + M(1+b)\lambda_n^\alpha), \qquad k_1 = M(1+b)$

(3.5)得证•

2) 令 y 是(2.15)、(2.16)的解,定义 $y_k = y(\tau - k\eta)$, 则

$$(y_k - y_{k+1})/\eta + Ay_k = PF(y_k + \Phi(y_k, \tau - k\eta)) + Pf(\tau - k\eta) + \varepsilon_k^1$$

$$\varepsilon_k^1 = \frac{1}{\eta}\int_{\tau-(k+1)\eta}^{\tau - k\eta}\left(\frac{dy(s)}{dt} - \frac{dy(\tau - k\eta)}{dt}\right)ds$$

由此, $\varepsilon_k = \eta\varepsilon_k^1$• 利用(2.15), 我们得

$$\left|\frac{dy(s)}{dt} - \frac{dy(\tau - k\eta)}{dt}\right|_{\gamma+\alpha} \leqslant |A(y(s) - y_k)|_{\gamma+\alpha}$$

$$+ |PF(y(s)+\Phi(y(s),s)) - PF(y_k+\Phi(y_k,\tau-k\eta))|_{\gamma+\alpha}$$
$$+ |Pf(s) - Pf(\tau-k\eta)|_{\gamma+\alpha}$$

由于 $\Phi\in F_b$，利用(2.3)、(2.5)，我们得到

$$\left|\frac{dy(s)}{dt}-\frac{dy(\tau-k\eta)}{dt}\right|_{\gamma+\alpha}$$
$$\leqslant(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)|y(s)-y(\tau-k\eta)|_{\gamma+\alpha}+M(1+b)\lambda_n^\alpha|s-(\tau-k\eta)|$$
$$=(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)\int_s^{\tau-k\eta}\left|\frac{dy}{dt}\right|_{\gamma+\alpha}dt+M(1+b)\lambda_n^\alpha|s-(\tau-k\eta)|$$
$$\leqslant(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)|\tau-k\eta-s|\,a_1(\lambda_n)(1+|y_\tau|_{\gamma+\alpha})$$
$$\cdot e^{-(\lambda_n+k_1\lambda_n^\alpha)(s-\tau)}+M(1+b)\lambda_n^\alpha|s-(\tau-k\eta)|$$

所以有

$$|\varepsilon_k|_{\gamma+\alpha}=|\eta\varepsilon_k^1|_{\gamma+\alpha}\leqslant\int_{\tau-(k+1)\eta}^{\tau-k\eta}\left|\frac{dy(s)}{dt}-\frac{dy(\tau-k\eta)}{dt}\right|_{\gamma+\alpha}ds$$
$$\leqslant a_2(\lambda_n)(1+|y_\tau|_{\gamma+\alpha})\,\eta^2e^{(\lambda_n+k_1\lambda_n^\alpha)(k+1)\eta}$$

这里 $a_2(\lambda_n)=2(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha\max\left\{a_1(\lambda_n),1\right\})$

(3.6)得证.

引理3.2

1) 设 $\Phi\in F_b$，$(y_\tau,\tau)\in PD(A^{\gamma+\alpha})\times R$，按(3.1)定义$\left\{y_k\right\}_{k=0,1,\cdots,N}$，则有：

$$|y_k|_{\gamma+\alpha}\leqslant(1+|y_\tau|_{\gamma+\alpha})e^{k\eta(\lambda_n+M(2+b)\lambda_n^\alpha)}\qquad(k=0,1,\cdots,N)$$

2) 设 $\Phi_j\in F_b$，$y_\tau^j\in PD(A^{\gamma+\alpha})$，在(3.1)中分别以 $y_\tau=y_\tau^j$ 定义$\left\{y_k^j\right\}_{k=0,1,\cdots,N}$，$j=1,2$，则有

$$|y_k^1-y_k^2|\leqslant e^{k\eta(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)}|y_\tau^1-y_\tau^2|_{\gamma+\alpha}$$
$$+\lambda_n^\alpha k\eta 2M|y_\tau^1|_{\gamma+\alpha}|\Phi_1-\Phi_2|_\infty e^{k\eta(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)}\qquad(k=0,1,\cdots,N)$$

3) 令 $\Phi\in F_b$，$y_\tau\in PD(A^{\gamma+\alpha})$，$\tau_j\in R$，在(3.1)中分别以 $y_0=y_\tau$，$\tau=\tau_j$ 定义$\left\{y_k^j\right\}_{k=0,1,\cdots,N}$ $(j=1,2)$，则有

$$|y_k^1-y_k^2|_{\gamma+\alpha}\leqslant e^{k\eta(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)}|\tau_1-\tau_2|\qquad(k=0,1,\cdots,N)$$

证明 由(3.3)、(2.4)、(2.6)，$\Phi\in F_b$，立即得到

$$|y_{k+1}|_{\gamma+\alpha}\leqslant e^{\eta\lambda_n}|y_k|_{\gamma+\alpha}+\lambda_n^{\alpha-1}(e^{\eta\lambda_n}-1)M(1+b)(1+|y_k|_{\gamma+\alpha})$$
$$+\lambda_n^{\alpha-1}(e^{\eta\lambda_n}-1)M$$
$$\leqslant e^{\eta(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)}|y_k|_{\gamma+\alpha}+e^{\eta(\lambda_n+M(2+b)\lambda_n^\alpha)}$$

这里用到不等式:

$$e^{\eta\lambda_n}-1\leqslant\eta\lambda_ne^{\eta\lambda_n}\text{ 和 }1+\eta M(1+b)\lambda_n^\alpha\leqslant e^{\eta M(1+b)\lambda_n^\alpha}$$

利用简单的迭代就得到:

$$|y_k|_{\gamma+\alpha}\leqslant e^{k\eta(\lambda_n+M(2+b)\lambda_n^\alpha)}(1+|y_\tau|_{\gamma+\alpha})\qquad(k=0,1,\cdots,N)$$

2) 设$\left\{y_k^j\right\}$，$j=1,2$，由2)中定义，记 $y_k=y_k^1-y_k^2$，则有

$$|y_{k+1}|_{\gamma+\alpha}\leqslant e^{\eta\lambda_n}|y_k|_{\gamma+\alpha}+\lambda_n^{\alpha-1}M(e^{\eta\lambda_n}-1)(|y_k|_{\gamma+\alpha}$$

$$+|\Phi_1(y_k^1,\tau-k\eta)-\Phi_2(y_k^2,\tau-k\eta)|_{\gamma+\alpha})$$
$$\leqslant e^{\eta\lambda_n}|y_k|_{\gamma+\alpha}+\lambda_n^{\alpha-1}M(e^{\eta\lambda_n}-1)((1+b)|y_k|_{\gamma+\alpha}$$
$$+|\Phi_1-\Phi_2|_\infty(1+|y_k^1|_{\gamma+\alpha}))$$

将 1) 的结果用到 $\{y_k^1\}_{k=0,1,\cdots,N}$, 我们得

$$|y_{k+1}|_{\gamma+\alpha}\leqslant e^{\eta(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)}|y_k|_{\gamma+\alpha}+2M\eta\lambda_n^\alpha(1+|y_\tau^1|_{\gamma+\alpha})$$
$$\cdot|\Phi_1-\Phi_2|_\infty e^{(k+1)\eta(\lambda_n+M(2+b)\lambda_n^\alpha)}$$

再利用迭代关系, 就完成了证明•

3) 设 $\{y_k^j\}_{k=0,1,\cdots,N}$, $(j=1,2)$ 由 3) 中定义, 令 $h=\tau_1-\tau_2$, 则, 利用(3.1)、(2.3)、(2.5), $\Phi\in F_b$, 我们得

$$|y_{k+1}^1-y_{k+1}^2|_{\gamma+\alpha}$$
$$\leqslant e^{\eta\lambda_n}|y_k^1-y_k^2|_{\gamma+\alpha}+\lambda_n^{\alpha-1}(e^{\eta\lambda_n}-1)M((1+b)$$
$$\cdot|y_k^1-y_k^2|_{\gamma+\alpha}+b|h|)+\lambda_n^{\alpha-1}(e^{\eta\lambda_n}-1)M|h|$$
$$\leqslant e^{\eta(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)}|y_k^1-y_k^2|_{\gamma+\alpha}+\lambda_n^{\alpha-1}(e^{\eta\lambda_n}-1)M(1+b)|h|$$

再利用迭代关系, 就可完成证明•

引理 3.3 设 $\Phi\in F_b$, $y_\tau\in PD(A^{\gamma+\alpha})$, $\{e_k\}_{k=0,1,\cdots,N}$ 是 $PD(A^{\gamma+\alpha})$ 中一列元素, 按(3.1)定义 $\{y_k\}_{k=0,1,\cdots,N}$, 再按下式定义 $\{\bar{y}_k\}_{k=0,1,\cdots,N}$:

$$\bar{y}_{k+1}=R_\eta\bar{y}_k+S_\eta PF(\bar{y}_k+\Phi(\bar{y}_k,\tau-k\eta))+S_\eta Pf(\tau-k\eta)+e_k,\ \bar{y}_0=y_\tau$$

则有,

$$|y_k-\bar{y}_k|_{\gamma+\alpha}\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}e^{(k-1-j)\eta(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)}|e_j|_{\gamma+\alpha}$$

该引理的证明类似引理 3.2, 我们略去证明•

§4. 逼近惯性流形族的收敛性

现在, 我们讨论上一节构造的逼近惯性流形的收敛性• 为此, 我们先证明映射 T_N^η 与映射 T 具有同样的性质•

引理 4.1 假设条件(2.8)、(2.9)、(3.3)成立, 给定 b, $0<b\leqslant1/8$, 且成立:

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant4M\frac{1+b}{b}(\Gamma(1-\alpha)+1)(\lambda_{n+1}^\alpha-\lambda_n^\alpha)$$

则, 对任意正整数 N 和数 $\eta>0$, T_N^η 将 F_b 映照到自身, 且是压缩系数小于 1/2 的压缩映射•

证明　i) 设 $\Phi\in F_b$, $(y_\tau,\tau)\in PD(A^{\gamma+\alpha})\times R$, 按(3.1)式定义 $\{y_k\}_{k=0,1,\cdots,N}$, 按下式定义 $y(s)$:

$$y(s)=\begin{cases}y_k, & s\in(\tau-(k+1)\eta,\tau-k\eta],\ k=0,1,\cdots,N-1\\ y_N, & s\in(-\infty,\tau-N\eta]\end{cases}\tag{4.1}$$

由引理 3.2, 1), 对任意 $s\leqslant\tau$, 有

$$|y(s)|_{\gamma+\alpha}\leqslant e^{(\tau-s)(\lambda_n+M(2+b)\lambda_n^\alpha)}(1+|y_\tau|_{\gamma+\alpha})\tag{4.2}$$

由定义

$$T_N^\eta\Phi(y_\tau,\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}e^{(s-\tau)A}(QF(y(s)+\bar{\Phi}_\tau(y(s),s))+Qf_\tau(s))ds$$

其中

$$\bar{\Phi}_\tau(\cdot, s) = \begin{cases} \Phi(\cdot, \tau - k\eta), & s \in (\tau - (k+1)\eta, \tau - k\eta],\ k = 0, 1, \cdots, N-1 \\ \Phi(\cdot, \tau - N\eta), & s \in (-\infty, \tau - N\eta] \end{cases} \tag{4.3}$$

$$f_\tau(s) = \begin{cases} f(\tau - k\eta), & s \in (\tau - (k+1)\eta, \tau - k\eta],\ k = 0, 1, \cdots, N-1 \\ f(\tau - N\eta), & s \in (-\infty, \tau - N\eta] \end{cases} \tag{4.4}$$

利用(2.4)、(4.2)、(2.8)，$\Phi \in F_b$，得到

$$\begin{aligned} &| T_N^\eta \Phi(y_\tau, \tau) |_{\gamma+\alpha} \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\tau} M(1+b)(1+|y_\tau|_{\gamma+\alpha}) \left(\frac{1}{|s-\tau|^\alpha} + \lambda_{n+1}^\alpha \right) e^{(\lambda_{n+1} - \lambda_n - M(2+b)\lambda_n^\alpha)(s-\tau)} ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\tau} M_1(2+b) \cdot \left(\frac{1}{|s-\tau|^\alpha} + \lambda_{n+1}^\alpha \right) e^{\lambda_{n+1}(s-\tau)} ds \\ &\leqslant M(2+b)(\Gamma(1-\alpha)+1) \left(\frac{\lambda_n^{\alpha+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n - M(2+b)\lambda_n^\alpha} + \lambda_{n+1}^{\alpha-1} \right) (1+|y_\tau|_{\gamma+\alpha}) \\ &\leqslant b(1+|y_\tau|_{\gamma+\alpha}) \end{aligned}$$

ii) 设 $y_1, y_2 \in PD(A^{\gamma+\alpha})$，$\tau_1, \tau_2 \in R$，按下式分别定义 $\{y_k^j\}_{k=0,1,\cdots,N}$，$j = 1, 2, 3$：

$$\begin{aligned} y_{k+1}^1 &= R_\eta y_k^1 + S_\eta PF(y_k^1 + \Phi(y_k^1, \tau_1 - k\eta)) + S_\eta Pf(\tau_1 - k\eta) \\ y_0^1 &= y_1 \\ y_{k+1}^2 &= R_\eta y_k^2 + S_\eta PF(y_k^2 + \Phi(y_k^2, \tau_1 - k\eta)) + S_\eta Pf(\tau_1 - k\eta) \\ y_0^2 &= y_2 \\ y_{k+1}^3 &= R_\eta y_k^3 + S_\eta PF(y_k^3 + \Phi(y_k^3, \tau_2 - k\eta)) + S_\eta Pf(\tau_2 - k\eta) \\ y_0^3 &= y_2 \end{aligned}$$

再按(4.1)式分别定义 $y^j(s)$，$j = 1, 2, 3$，则，利用引理 3.2, 3.3，得：

$$\begin{aligned} &|y^1(s) - y^2(s)|_{\gamma+\alpha} \leqslant e^{(\tau-s)(\lambda_n + M(1+b)\lambda_n^\alpha)} |y_1 - y_2|_{\gamma+\alpha}, \qquad s \leqslant \tau_1 \\ &|y^2(s) - y^3(s+h)|_{\gamma+\alpha} \leqslant e^{(\tau-s)(\lambda_n + M(1+b)\lambda_n^\alpha)} |h|, \qquad s \leqslant \tau_1,\ h = \tau_2 - \tau_1 \end{aligned}$$

所以，从(2.8)、(2.3)、(2.5)，$\Phi \in F_b$，和上述不等式，得

$$\begin{aligned} &| T_N^\eta \Phi(y_1, \tau_1) - T_N^\eta \Phi(y_2, \tau_2) |_{\gamma+\alpha} \\ &\leqslant | T_N^\eta \Phi(y_1, \tau_1) - T_N^\eta \Phi(y_2, \tau_1) |_{\gamma+\alpha} + | T_N^\eta \Phi(y_2, \tau_1) - T_N^\eta \Phi(y_2, \tau_2) |_{\gamma+\alpha} \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\tau_1} | e^{(s-\tau_1)A} (QF(y^1(s) + \bar{\Phi}_{\tau_1}(y^1(s), s)) - QF(y^2(s) + \bar{\Phi}_{\tau_1}(y^2(s), s))) |_{\gamma+\alpha} ds \\ &\quad + \left| \int_{-\infty}^{\tau_1} e^{(s-\tau_1)A} (QF(y^2(s) + \bar{\Phi}_{\tau_1}(y^2(s), s)) + Qf_{\tau_1}(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\tau_2} e^{(s-\tau_2)A} (QF(y^3(s) + \bar{\Phi}_{\tau_2}(y^3(s), s)) + Qf_{\tau_2}(s)) ds \right|_{\gamma+\alpha} \\ &\leqslant M(1+b) \int_{-\infty}^{\tau_1} \left(\frac{1}{|s-\tau_1|^\alpha} + \lambda_{n+1}^\alpha \right) e^{(\lambda_{n+1} - \lambda_n - M(1+b)\lambda_n^\alpha)(s-\tau_1)} ds \cdot |y_1 - y_2|_{\gamma+\alpha} \\ &\quad + M(1+b)|h| \int_{-\infty}^{\tau_1} \left(\frac{1}{|s-\tau_1|^\alpha} + \lambda_{n+1}^\alpha \right) e^{(\lambda_{n+1} - \lambda_n - M(1+b)\lambda_n^\alpha)(s-\tau_1)} ds \\ &\quad + M(1+b)|h| \int_{-\infty}^{\tau_1} \left(\frac{1}{|s-\tau_1|^\alpha} + \lambda_{n+1}^\alpha \right) e^{\lambda_{n+1}(s-\tau_1)} ds \end{aligned}$$

$$\leqslant M(1+b)(\Gamma(1-\alpha)+1)\left(\frac{\lambda_{n+1}^{\alpha}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n-M(1+b)\lambda_n^{\alpha}}+\lambda_{n+1}^{\alpha-1}\right)$$
$$\cdot(|y_1-y_2|_{\gamma+\alpha}+|\tau_2-\tau_1|)$$
$$\leqslant b(|y_1-y_2|_{\gamma+\alpha}+|\tau_2-\tau_1|)$$

iii) 设 $\phi_1,\phi_2\in F_b,(y_\tau,\tau)\in PD(A^{\gamma+\alpha})\times R$, 在(3.1)中, 分别以 $\phi=\phi_1,\phi=\phi_2$, 构造 $\{y_k^1\}_{k=0,1,\dots,N}$ 和 $\{y_k^2\}_{k=0,1,\dots,N}$, 再按(4.1)式分别定义 $y^1(s)$ 和 $y^2(s)$, 则, 我们有

$$|y^1(s)-y^2(s)|_{\gamma+\alpha}$$
$$\leqslant 2M\lambda_n^{\alpha}(1+|y_\tau|_{\gamma+\alpha})|\phi_1-\phi_2|_\infty|\tau-s|e^{(\tau-s)(\lambda_n+M(2+b)\lambda_n^{\alpha})}$$

由定义,

$$T_N^{\eta}\phi_1(y_\tau,\tau)-T_N^{\eta}\phi_2(y_\tau,\tau)$$
$$=\int_{-\infty}^{\tau}e^{(s-\tau)A}Q(F(y^1(s)+\bar{\phi}_{1\tau}(y^1(s),s))-F(y^2(s)+\bar{\phi}_{2\tau}(y^2(s),s)))ds$$

然后, 利用(2.8)、(2.3), $\phi_1\in F_b,\phi_2\in F_b$, 得,

$$|T_N^{\eta}\phi_1(y_\tau,\tau)-T_N^{\eta}\phi_2(y_\tau,\tau)|_{\gamma+\alpha}$$
$$\leqslant M\int_{-\infty}^{\tau}\left(\frac{1}{|s-\tau|^{\alpha}}+\lambda_{n+1}^{\alpha}\right)e^{\lambda_{n+1}(s-\tau)}((1+b)|y^1(s)-y^2(s)|_{\gamma+\alpha}$$
$$+|\phi_1-\phi_2|_\infty(1+|y^1(s)|_{\gamma+\alpha}))ds$$
$$\leqslant M|\phi_1-\phi_2|_\infty\Big[2M(1+b)\lambda_n^{\alpha}(1+|y_\tau|_{\gamma+\alpha})$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{\tau}(|\tau-s|^{1-\alpha}+\lambda_{n+1}^{\alpha}|\tau-s|)e^{(s-\tau)(\lambda_{n+1}-\lambda_n-M(2+b)\lambda_n^{\alpha})}ds$$
$$+\int_{-\infty}^{\tau}\left(\frac{1}{|s-\tau|^{\alpha}}+\lambda_{n+1}^{\alpha}\right)e^{\lambda_{n+1}(s-\tau)}ds$$
$$+(1+|y_\tau|_{\gamma+\alpha})\int_{-\infty}^{\tau}\left(\frac{1}{|s-\tau|^{\alpha}}+\lambda_{n+1}^{\alpha}\right)e^{(\lambda_{n+1}-\lambda_n-M(2+b)\lambda_n^{\alpha})(s-\tau)}ds\Big]$$
$$\leqslant M(1+|y_\tau|_{\gamma+\alpha})|\phi_1-\phi_2|_\infty\Big[\lambda_{n+1}^{\alpha-1}(\Gamma(1-\alpha)+1)$$
$$+\frac{2M(1+b)\lambda_{n+1}^{\alpha}\lambda_n^{\alpha}}{(\lambda_{n+1}-\lambda_n-M(2+b)\lambda_n^{\alpha})^2}(\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)+1)$$
$$+\frac{\lambda_{n+1}^{\alpha}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n-M(2+b)\lambda_n^{\alpha}}(\Gamma(1-\alpha)+1)\Big]$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(1+|y_\tau|_{\gamma+\alpha})|\phi_1-\phi_2|_\infty$$

因此, 从 i)、ii)、iii), 引理 4.1 得证.

引理 4.2 在引理 4.1 的假设下, 对所有 $\phi\in F_b,N,\eta>0$, 有,

$$|T_N^{\eta}\phi-\Phi|_\infty\leqslant\frac{1}{2}|\phi-\Phi|_\infty+\varepsilon(N,\eta)$$

而
$$\varepsilon(N,\eta)=C_1\left(\left(a_1(\lambda_n)+\frac{a_2(\lambda_n)}{\lambda_{n+1}}+1\right)\eta+\frac{a_1(\lambda_n)+1}{\lambda_{n+1}^{\alpha}}e^{-\lambda_{n+1}N\eta}\right.$$

Φ 为映射 T 的不动点.

证明 由引理 4.1, 得

$$|T_N^{\eta}\phi-\Phi|_\infty\leqslant\frac{1}{2}|\phi-\Phi|_\infty+|T_N^{\eta}\Phi-\Phi|_\infty$$

剩下的证明只需估计 $|T_N^\eta \Phi - \Phi|_\infty$ 即可。给定 $(y_\tau, \tau) \in PD(A^{\gamma+\alpha}) \times R$, 令 y 表示下列方程的解

$$dy/dt + Ay = PF(y + \Phi(y, t)) + Pf(t), \quad y|_{t=\tau} = y_\tau$$

$\bar{y}_k = y(\tau - k\eta)$。在(3.1)中令 $\phi = \Phi$, 构造 $\{y_k\}_{k=0,1,\dots,N}$, 则, 利用引理 3.1, 3.3, 我们得

$$|y_k - \bar{y}_k|_{\gamma+\alpha} \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} e^{(k-1-j)\eta(\lambda_n + M(1+b)\lambda_n^\alpha)} |\varepsilon_j|_{\gamma+\alpha}$$

$$\leqslant a_2(\lambda_n)\eta^2(1 + |y_\tau|_{\gamma+\alpha}) k e^{k\eta(\lambda_n + M(1+b)\lambda_n^\alpha)}$$

再按(4.1)式定义 $\tilde{y}(s)$, 由引理 3.1, 对 $s \in (\tau - (k+1)\eta, \tau - k\eta)$, 我们有,

$$|y(s) - \tilde{y}(s)|_{\gamma+\alpha} \leqslant \eta a_1(\lambda_n)(1 + |y_\tau|_{\gamma+\alpha}) e^{-(\lambda_n + M(1+b)\lambda_n^\alpha)(s-\tau)}$$

$$+ \eta a_2(\lambda_n)(1 + |y_\tau|_{\gamma+\alpha})(s - \tau) e^{-(\lambda_n + M(1+b)\lambda_n^\alpha)(s-\tau)}$$

同理, 对 $s \in (-\infty, \tau - k\eta)$, 我们有

$$|y(s) - \tilde{y}(s)|_{\gamma+\alpha} \leqslant |s - \tau + N\eta| a_1(\lambda_n)(1 + |y_\tau|_{\gamma+\alpha}) e^{-(\lambda_n + M(1+b)\lambda_n^\alpha)(s-\tau)}$$

$$+ \eta a_2(\lambda_n)(1 + |y_\tau|_{\gamma+\alpha}) |s - \tau| e^{-(\lambda_n + M(1+b)\lambda_n^\alpha)(s-\tau)}$$

由定义

$$T_N^\eta \Phi(y_\tau, \tau) - \Phi(y_\tau, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{(s-\tau)A} Q(F(\tilde{y}(s) + \Phi_\tau(\tilde{y}(s), s)) - F(y(s)$$

$$+ \Phi(y(s), s)) + f_\tau(s) - f(s)) ds$$

因此, 利用(2.3)、(2.5), $\Phi \in F_b$, 我们得到

$$|T_N^\eta \Phi(y_\tau, \tau) - \Phi(y_\tau, \tau)|_{\gamma+\alpha}$$

$$\leqslant M(1+b)\int_{-\infty}^{\tau}\left(\frac{1}{|s-\tau|^\alpha} + \lambda_{n+1}^\alpha\right) e^{\lambda_{n+1}(s-\tau)}(|y(s) - \tilde{y}(s)|_{\gamma+\alpha} + \eta) ds$$

$$+ M(1+b)\int_{-\infty}^{\tau - N\eta}\left(\frac{1}{|s-\tau|^\alpha} + \lambda_{n+1}^\alpha\right) e^{\lambda_{n+1}(s-\tau)} |s - \tau - N\eta| ds$$

$$\leqslant M(1+b)(1 + |y_\tau|_{\gamma+\alpha})\left[\eta a_1(\lambda_n)\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{1}{|s|^\alpha} + \lambda_{n+1}^\alpha\right) e^{(\lambda_{n+1} - \lambda_n - M(1+b)\lambda_n^\alpha)s} ds\right.$$

$$+ \eta a_2(\lambda_n)\cdot\int_{-\infty}^{0}\left(|s|^{\alpha-1} + \lambda_{n+1}^\alpha |s|\right) e^{(\lambda_{n+1} - \lambda_n - M(1+b)\lambda_n^\alpha)s} ds$$

$$+ (a_1(\lambda_n) + 1)\int_{-\infty}^{\tau - N\eta} |s - N\eta| \left(\frac{1}{|s|^\alpha} + \lambda_{n+1}^\alpha\right) e^{(\lambda_{n+1} - \lambda_n - M(1+b)\lambda_n^\alpha)s} ds$$

$$\left. + \eta\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{1}{|s|^\alpha} + \lambda_{n+1}^\alpha\right) e^{\lambda_{n+1}s} ds\right]$$

$$\leqslant C_1(1 + |y_\tau|_{\gamma+\alpha})\left(\frac{a_1(\lambda_n)\lambda_{n+1}^\alpha \eta}{\lambda_{n+1} - \lambda_n - M(1+b)\lambda_n^\alpha} + \frac{a_2(\lambda_n)\lambda_{n+1}^\alpha \eta}{(\lambda_{n+1} - \lambda_n - M(1+b)\lambda_n^\alpha)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{(a_1(\lambda_n) + 1)\lambda_{n+1}^\alpha}{(\lambda_{n+1} - \lambda_n - M(1+b)\lambda_n^\alpha)^2} e^{-(\lambda_{n+1} - \lambda_n - M(1+b)\lambda_n^\alpha)N\eta} + \lambda_{n+1}^{\alpha-1}\eta\right)$$

$$\leqslant C_1(1 + |y_\tau|_{\gamma+\alpha})\left(a_1(\lambda_n)\eta + \frac{a_2(\lambda_n)}{\lambda_{n+1}}\eta + \eta + \frac{a_1(\lambda_n) + 1}{\lambda_{n+1}^\alpha} e^{-\lambda_{n+1}N\eta d}\right)$$

其中, C_1 是不依赖于 N, η 和 n 的正常数。

引理 4.1 得证。

由引理 4.1, 我们容易推得如下结果:

定理 4.1 选取一列 η_N 满足: 当 $N \to \infty$ 时, $\eta_N \to 0$, $N\eta_N \to +\infty$, 则在引理 4.1 的假设之

下, 由(3.4) 式定义的一族函数$\left\{\Phi_N\right\}_{N\in N}$以范数$|\cdot|_\infty$收敛于函数 Φ, 即, 逼近惯性流形族$M_N = \operatorname{graph}\Phi_N$收敛到惯性流形$M = \operatorname{graph}\Phi$.

参 考 文 献

1 R. Temam, Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer_Verlag, New York (1988).

2 J. Hale, Asymptotic behavior of dissipative systems, Math. Surveys and Monographs, **25**, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island (1988).

3 A. R. Bernal, Inertial manifold for dissipative semiflows in Banach spaces, Applicable Analysis, **37** (1990), 95—141.

4 A. Debussche and R. Temam, Convergent families of approximate inertial manifold, J. Math. Pure Appl., **73**(5) (1994), 489—522.

5 C. M. Dafermos, Semi_flows associated with compact and uniform processes, Math. Systems Theory, **8** (1974), 142—149.

6 G. R. Sell, Non_autonomous differential equations and topological dynamics, Ⅰ, Ⅱ, Trans. Amer. Math. Soc., **127** (1967), 241—263.

7 V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik, Attractors of nonautonomous dynamical systems and their dimension, J. Math. Pure Appl., **73**(3) (1994), 297—333.

8 T. Gill and W. Zachary, Dimensionabity of invariant sets for nonautonomous processes, SIAM J. Math. Anal., **23**(5) (1992), 1204—1229.

9 A. Haraux, Attractors of asymptotically compact process and applications to nonlinear partial differential equations, Comm. Partial Differential Equations, **13** (1988), 1383—1414.

10 M. W. Smiley, Global attractors and approximate inertial manifold for nonautonomous dissipative equations, Applicable Analysis, **50**(3_4) (1993), 217—241.

11 M. W. Smiley, Regularity and asymptotic behavior of solutions of nonautonomous differential equations, Journal of Dynamics and Differential Equations, **7**(2) (1995), 237—262.

12 王宗信、范先令、朱正佑, 非自治无穷维动力系统的惯性流形, 应用数学和力学, **19**(7) (1998), 649—657.

Convergent Families of Approximate Inertial Manifolds for Nonautonomous Evolution Equations

Wang Zongxing

(Institute of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433; Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, P.R.China)

Fan Xianling

(Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, P.R.China)

Zhu Zhengyou

(Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China)

Abstract

In this paper, the long time behavior of nonautonomous infinite dimensional dynamical systems is studied. A family of convergent approximate inertial manifolds for a class of evolution equations has been constructed when the spectral gap condition is satisfied.

Key words nonautonomous equation, approximate inertial manifold, spectral gap condition