应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

正交多项式及 Pade 逼近*

法埃兹　阿赫买德①

(钱伟长、丁协平推荐, 1997 年 2 月 1 日收到)

摘　　要

利用 Legendre 多项式的性质, 得到 $\exp(x)$, $\tan x$ 和 $\tanh x$ 简单形式的对角 Pade 逼近, 在 $[-1, 1]$ 上 $P_n(x)$ 对于任意较低次幂的多项式是正交的• 在求得某些函数的分母时, 利用了 Gauss 求积公式•

关键词　正交多项式　Pade 逼近　Legendre 多项式　数值逼近
中图分类号　O174, O241

§1. 引　　言

Pade 逼近为一类有理分式函数逼近• 设 f 的幂级数表示为

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{1.1}$$

如果 $U_l(x)$ 是次数最高为 l 次的多项式, $V_m(x)$ 是次数最高为 m 次的多项式, 且

$$f(x) - U_l(x)/V_m(x) = O(x^{l+m+1}) \tag{1.2}$$

则 $U_l(x)/V_m(x)$ 称为 $f(x)$ 的 l, m Pade 逼近• 如果 $l = m$, Pade 逼近就称为对角 Pade 逼近• 在一个比某函数的 Taylor 级数(1.1)的收敛区间更大的集上, 近似表示该函数, Pade 逼近将十分有效[1, 3]•

正交多项式与 Pade 逼近理论有密切联系• 设 $w(x) > 0$, $(a < x < b)$ 且定义

$$b_n = \int_a^b x^n w(x)\,dx \tag{1.3}$$

及

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

那么, 除了一个乘积常数外, 对 M 的逐次值, $B(x)$ 的 $[(M-1)/M]$ Pade 逼近式有分母多项式, 该分母多项式与在 (a, b) 上正交于 $w(x)$ 的正交多项式的集的第 M 个成员密切相关[1, 第7章]•

已知函数 $f(x)$ 的 $U_l(x)$ 和 $V_m(x)$ 的表达式可利用行列式求出• 但是如果一个函数可用 Gauss 超几何函数表出, 那么它的分母就可用另一个超几何函数表出• 除了这类函数外, 还有几个 Pade 逼近函数可用优美的形式表出•

---

* 本文原文为英文由吴承平译为中文, 丁协平校

① 巴基斯坦古艾德• 艾• 亚赞大学数学系

设$\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$为关于权函数 $w(x)$ 在(a, b)上的正交多项式的集, 很容易得出:

$$\int_a^b x^k Q_n(x) w(x) dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \tag{1.4}$$

我们将利用上式导出 $\exp(x)$, $\tan x$ 和 $\tanh x$ 的优美的 Pade 对角逼近• $U_l(x)$ 和 $V_l(x)$ 中的一致性系数原来是计算值为 1 的 l 次 Legendre 多项式的各阶导数• (1.4) 式也可利用 Gauss 求积公式得出, 即

$$\int_a^b w(x) f(x) dx \simeq \sum_{k=1}^{l} A_k f(x_k) \tag{1.5}$$

其中, $x_1, x_2, \cdots, x_l$ 为(a, b)中 $Q_l(x)$ 的 l 个实零点, $A_1, A_2, \cdots A_l$ 为适当的常数, 这些常数是在(1.5) 式成立的条件下, 用低于 $2l$ 次的任意多项式替换$f(x)$得出的• 利用(1.5) 式可得到某些可用积分表出的函数的 Pade 逼近式的分母• 其中某些结果, 例如 $\ln[(1+x)/(1-x)]$ 的 Pade 逼近式已经获得[2], 现在可能得出一些其它的结果• 尽管我们的方法还是初等的, 但已经得出了一些精彩的结果•

§ 2. $L_n^{(k)}(0)$ 的恒等式

本节将介绍(1.4) 式的简单应用, 导出一个关于 Laguerre 多项式一致性系数的有趣的结果• 设 $L_n(x)$ 为 n 次 Laguerre 多项式:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n! x^k}{(k!)^2 (n-k)!} \tag{2.1}$$

$\{L_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$在$(0, \infty)$上是正交于 $\exp(-x)$ 的• 考虑

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) e^{ax} dx \qquad (0 < a < 1)$$

利用(1.4) 式可得

$$\int_0^{\infty} e^{-(1-a)x} L_n(x) dx = O(a^n)$$

对上式左端进行分部积分, 得

$$\frac{L_n(0)}{1-a} + \frac{L_n'(0)}{(1-a)^2} + \cdots + \frac{L_n^{(n)}(0)}{(1-a)^{n+1}} = O(a^n) \tag{2.2}$$

由于

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k, \qquad \frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a^k, \ \cdots$$

我们可将(2.2) 式写成为 n 个恒等式, 其前三个恒等式如下:

$$L_n(0) + L'_n(0) + \cdots + L_n^{(n)}(0) = 0 \qquad (n \geqslant 1)$$

$$L_n(0) + 2L'_n(0) + \cdots + (n+1) L_n^{(n)}(0) = 0 \qquad (n \geqslant 1)$$

$$L_n(0) + 3L'_n(0) + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)}{2} L_n^{(n)}(0) = 0 \qquad (n \geqslant 1)$$

如果将由(2.1) 中得出的 $L'_n(0)$, $L''_n(0)$, …等代入上式, 则上述恒等式又可写为如下的紧凑形式:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n! (k+l)!}{(k!)^2 (n-k)!} = 0 \qquad (l = 0, 1, \cdots, n-1)$$

类似地, 在下节将给出 $\exp(x)$ 和 $\tan x$ 的 Legendre 多项式的对角逼近•

§3. Pade 对角逼近

利用(1.5),我们可以写出

$$\int_{-1}^{1} e^{ax} P_n(x)\,dx = O(a^n) \tag{3.1}$$

对上式左端进行 n 次分部积分得

$$\left[e^{ax}\left\{ \frac{P_n(x)}{a} - \frac{P'_n(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n \frac{P_n^{(n)}(x)}{a^{n+1}} \right\} \right]_{-1}^{1} = O(a^n)$$

其中

$$P_n^{(r)}(x) = \frac{d^r}{dx^r} P_n(x)$$

上式乘以 a^{n+1}后可写为

$$\begin{aligned} & e^a[a^n P_n(1) - a^{n-1}P'_n(1) + a^{n-2}P''_n(1) - \cdots + (-1)^n P_n^{(n)}(1)] \\ & \quad = e^{-a}[a^n P_n(-1) - a^{n-1}P'_n(-1) + \cdots + (-1)^n P_n^{(n)}(-1)] + O(a^{2n+1}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

当 n 为偶数时, $P_n(x)$完全由 x 的偶次幂构成, 则有

$$P_n^{(r)}(-1) = (-1)^{n-r} P_n^{(r)}(1) \tag{3.3}$$

(3.2)式左端方括号内的式子以及 e^{-a}都是 $O(1)$的, 因此由(3.2)可得

$$e^{2a} - U_n(a)/V_n(a) = O(a^{2n+1}) \tag{3.4}$$

其中

$$U_n(a) = \sum_{r=0}^{n} P_n^{(n-r)}(1)\,a^r, \qquad V_n(a) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^r P_n^{(n-r)}(1)\,a^r$$

(3.4)式说明, $U_n(a)/V_n(a)$即为 e^{2a}的$[n/n]$Pade 逼近• 引入记号

$$c(n, r) = P_n^{(n-r)}(1)$$

则 e^x 的$[n/n]$ Pade 逼近又可写为

$$\sum_{r=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^r c(n, r)\,x^r \Big/ \sum_{r=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^r c(n, r)\,x^r \tag{3.5}$$

为求得 $\tan x$ 的 Pade 逼近, 我们考虑如下积分:

$$\int_0^1 \sin(ax)P_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(ax)P_n(x)\,dx = O(a^n) \qquad (当\ n\ 为奇数)$$

$$\int_0^1 \cos(ax)P_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(ax)P_n(x)\,dx = O(a^n) \qquad (当\ n\ 为偶数)$$

求导过程同前• 略去详细推导过程, 最后得到

$$\tan x \approx \frac{c(n,1)x - c(n,3)x^3 + \cdots + (-1)^{n/2-1}c(n, n-1)x^{n-1}}{c(n,0) - c(n,2)x^2 + \cdots + (-1)^{n/2}c(n, n)x^n} \qquad (当\ n\ 为偶数) \tag{3.6a}$$

$$\tan x \simeq \frac{c(n,1)x - c(n,3)x^3 + \cdots + (-1)^{(n-1)/2}c(n, n-1)x^n}{c(n,0) - c(n,2)x^2 + \cdots + (-1)^{(n-1)/2}c(n, n-1)x^{n-1}} \qquad (当\ n\ 为奇数) \tag{3.6b}$$

(3.6a)、(3.6b)的右边即为 $\tan x$ 的 Pade 对角逼近•

将(3.6a)、(3.6b)中的 x 换为 ix，又可得到 $\tanh x$ 的 Pade 对角逼近，即

$$\tan x \simeq \frac{c(n,1)x + c(n,3)x^3 + \cdots + c(n,n-1)x^{n-1}}{c(n,0) - c(n,2)x^2 + \cdots + c(n,n)x^n} \qquad (\text{当 } n \text{ 为偶数}) \qquad (3.7a)$$

$$\tan x \simeq \frac{c(n,1)x + c(n,3)x^3 + \cdots + c(n,n-1)x^n}{c(n,0) + c(n,2)x^2 + \cdots + c(n,n-1)x^{n-1}} \qquad (\text{当 } n \text{ 为奇数}) \qquad (3.7b)$$

e^x, $\tan(x)$ 的 Pade 逼近是大家熟知的所以(3.5) ~ (3.7) 并不是新的结果• 令人感兴趣的是 Legendre 多项式的对角逼近与求导相联系• 本文方法对采用简单公式求解 $\sin x$, $\cos x$ 的对角逼近提供了有益的成果•

§4. Pade 逼近式的分母

考虑如下积分

$$\int_{-1}^{1} \frac{du}{1 - xu} \qquad (|x| < 1)$$

因为 $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $(-1, 1)$ 上的简单正交的多项式集(即 $w(x) \equiv 1$)，利用(1.5)式可得

$$\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x} = \int_{-1}^{1}\frac{du}{1-xu} = \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{1-xu_k} + O(x^{2n})$$

其中，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ 为 $P_n(u)$ 的零点，$A_1, A_2, \cdots A_n$ 为对应的常数• 如果 n 为偶数，u_k 均不为零，可以得出

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{1-xu_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{-Ak/u_k}{x-1/u_k} = R_{n-1}(x)/S_n(x)$$

其中，$R_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次多项式，$S_n(a)$ 为 n 次多项式，其零点与 $P_n(x)$ 的零点互为倒数•因此

$$S_n(x) = x^n P_n(1/x) \tag{4.1}$$

且

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{xR_{n-1}(x)}{S_n(x)} + O(x^{2n+1})$$

所以，当 n 为偶数时，$\ln[(1+x)/(1-x)]$，$|x| < 1$ 的 $[n/n]$ Pade 逼近式的分母由 $P_n(x)$ 给出，除非是倒序的一致性系数表示的积性常数• 如果 n 为奇数，容易看出，$[n/(n-1)]$ Pade 逼近式的分母为 $n-1$ 次多项式，并且除原点的 0 外，其零点与 $P_n(x)$ 的零点互为倒数•

考虑由下式定义的函数

$$f(x) = \int_0^{\infty}\frac{e^{-u}du}{1+xu} \qquad (x > 0)$$

采用上述相同作法后得出，$f(x)$ 的 $[n/(n-1)]$ Pade 逼近式的分母为 $Q_n(x)$，即

$$Q_n(x) = x^n L_n(-1/x)$$

这个多项式的零点是 n 次 Laguerre 多项式的零点的负倒数•

考虑

$$\int_{-1}^{1}\frac{du}{1+x^2u^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{1+(xu_k)^2} + O(x^{2n}) \tag{4.2}$$

其中，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ 为 $P_n(x)$ 的零点• 为明确起见，设 $n=4$• 如果设定 $P_n(u)$ 的零点满足 $u_1 < u_2 < u_3 < u_4$，则容易得出 $u_1^2 = u_4^2$, $u_2^2 = u_3^2$, $A_1 = A_4$, $A_2 = A_3$• 由于 $P_n(u)$ 中 u 的幂要么

全是偶数,要么全是奇数,这样处理是必要的• 这时(4.2)变为

$$\frac{2}{x}\tan^{-1}x = \frac{2A_1}{1+x^2u_1^2}+\frac{2A_2}{1+x^2u_2^2}+O(x^8)$$

由此可知 $\tan^{-1}x$ 的[3/4] Pade 逼近式的分母为 $T_4(x)$,即

$$T_4(x) = (1+x^2u_1^2)(1+x^2u_2^2) = u_1^2u_2^2(x-i/u_1)(x-i/u_2)(x-i/u_3)(x-i/u_4)$$

$$= u_1^2u_2^2x^4P_4(i/x)$$

由于 $P_4(x) = (35x^4-30x^2+3)/8$

因此除积性常数外有

$$T_4(x) = 3x^4+30x^2+35$$

一般说来,n 为偶数时,$\tan^{-1}x[(n-1)/n]$ Pade 逼近的分母,由改变 $P_n(x)$ 所有的负号为正号得到,并按一致性系数的倒序写出• 如果 n 为奇数,$\tan^{-1}x$ 的[$n/(n-1)$] Pade 逼近的分母,由改变 $P_n(x)/x$ 所有的符号为正号得到,并按 x 的幂的倒序写出• 例如,当

$$P_5(x) = (63x^5-70x^3+15x)/8$$

时,$\tan^{-1}x$ 的[5/4] Pade 逼近的分母为

$$15x^4+70x^2+63$$

最后我们注意到下式定义的函数 $g(x)$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-u^2}du}{1+x^2u^2}$$

也可用类似的方法讨论,只不过采用 Hermite 多项式 $\left\{H_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ 来替换上述分析中 $\left\{P_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ 所起的作用• (

参 考 文 献

1 G. A. Baker, Jr., Essentials of Padé Approximants, Academic Press (1975).

2 W. B. Jones and W. J. Thron, Continued Fractions: Analytic Theory and Applications, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications II, Addison Wesley Publ. Co. (1980).

3 E. B. Saff and R. S. Varga (Editors), Padé and Rational Approximation, Academic Press (1977).

The Orthogonal Polynomials and the Pade' Approximation

Faiz Ahmad

(Department of Mathematics, Quaid_i_Azam University, Islamabed, Pakistan)

Abstract

The diagonal Pade' approximats for exp(x), tan x and tanh x are obtained in a simple manner by using the property of Legendre polynomials that on [−1, 1] $P_n(x)$ is orthogonal to every polynomial of lower degree. Gauss' s quadrature formula is used to fined the denomiators of some functions.

Key words orthogonal polynomials, Pade' approximation, Legendre polynomials, numerical approxiamtion