

高分辨率差分格式的数值分析 与限制因子的构造*

张梦萍^① 刘儒勋^①

(戴世强、刘慈群推荐, 1997 年 1 月 31 日收到)

摘 要

本文利用差分方法余项效应理论, 分析比较了一些典型的限制因子. 对不同的限制因子, 格式的表现明显差异主要是由其数值耗散性、色散性强弱不同所致. 在分析比较格式的数值耗散性、色散性之后, 本文提出了一种新的限制因子, 得到的格式在解的剧烈变化区具有更高的分辨率, 在光滑区避免了由于数值色散性较强导致的失真. 数值试验表明该格式具有较好的性质.

关键词 数值耗散 数值色散 限制因子

中图分类号 O241

§ 1. 引 言

适当地调节, 控制格式的数值耗散性和色散性效应是构造高分辨率无振荡格式(NOS)的关键. 自从 Van Leer^[1] 引入流量限制因子得到高分辨率无振荡格式以来, 为实现数值耗散效应, 色散效应和数值群速度效应的适时调节, 限制因子合理的选择已成为构造高分辨率无振荡格式的重要途径之一. Roe^{[2][3]}, Chakravarthy 和 O. Sher^[4] 等先后提出了不同形式的限制因子, 得到了锐利的图象. 对于线性波动方程, Sweby^[5] 得到了 Harten^[6] 提出的 TVD 格式的限制因子的较优的调节范围. Jameson^[7] 根据极大值非增, 极小值非减的思想, 通过限制因子的合理选择, 构造了在解的间断处具有较高精度的本质局部极值减小(Local Extratum Diminishing)的格式, 即 ELED 格式.

无论是 TVD 还是 ELED 格式, 对于不同的限制因子, 格式的表现存在明显的差异, 耗散性较强的格式在解剧烈变化区分辨率较低, 色散性较强的格式有时把光滑解压缩成间断解, 导致解的失真和计算不稳定. 本文根据差分方法的余项效应理论及数值实验结果, 分析格式的数值耗散性、色散性, 从而对于一些典型的限制因子进行鉴别, 指出其存在的利弊, 同时指出改进的方向. 为构造高精度格式的限制因子提供了理论根据.

本文在第二节回顾了具有代表性的限制因子. 在第三节中对其耗散性、色散性作理论分析. 在第四节给出了数值实验结果. 根据所得的结论在第五节中提出了一种有效的新的限制因子, 其数值试验表明具有更满意的效果, 在解的剧烈变化区内具有更高的分辨率.

* 国家自然科学基金资助项目

① 中国科技大学数学系, 合肥 230026

§ 2. 一些典型限制因子的数值分析

考虑单变量守恒律方程:

$$\left. \begin{aligned} u_t + f(u)_x &\equiv u_t + a(u) u_x = 0 \\ u(x, 0) &= \phi(x) \text{ 数值} (-\infty < x < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中, $a(u) = df/du$

(1) TVD 格式

Harten^[6] 引入总变差非增的概念, 开创性地构造了 TVD 格式. 考虑线性单变量守恒律方程, 即方程(2.1)中 $a(u) = \text{const} > 0$ 情况, Sweby^[5] 构造的守恒型差分格式为:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}) \quad (2.2)$$

其中, $\lambda = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, $f_{j+\frac{1}{2}}$ 为数值流量, 取为:

$$f_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) - \frac{a_{j+\frac{1}{2}}}{2}(1 - \phi(r)(1 - \lambda a_{j+\frac{1}{2}})) \Delta_{j+\frac{1}{2}} u \quad (2.3)$$

其中, $\Delta_{j+\frac{1}{2}} u = u_{j+1} - u_j$, $r = \frac{\Delta_{j-\frac{1}{2}} u}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} u}$, $\phi(r)$ 为限制因子.

$$a_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{f_{i+1} - f_j}{u_{j+1} - u_j} & (\text{当 } u_{j+1} \neq u_j) \\ \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=u_j} & (\text{当 } u_{j+1} = u_j) \end{cases} \quad (2.4)$$

对于 TVD 格式总变差非增, 要求限制因子的选择必须满足:

$$x \mathbf{0} \leq \left[\frac{\phi(r)}{r}, \phi(r) \right] \leq 2 \quad (2.5)$$

下列三个常见的限制因子满足关系(2.5):

1) Van Leer^[1] 提出的光滑因子

$$\phi(r) = \frac{|r| + r}{1 + |r|} \quad (2.6)$$

2) Roe^[2] 的 Minmod 因子

$$\phi(r) = \text{minmod}(r, 1) \quad (2.7)$$

3) Roe^[3] 的强压缩因子 (Superbee 因子):

$$\phi(r) = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2)) \quad (2.8)$$

(2) ELED 格式

TVD 格式即使在光滑区有高阶精度, 在极值点处仍退化为一阶精度, 为了提高格式在极值点处的精度, Jameson^[7] 引入了本质局部极值减少的概念. 在极限状态下 ($\Delta x \rightarrow 0$) 最大值非增, 最小值非减, 得到了理论上高精度的格式, 即 ELED 格式. 其中方程(2.2)中的数值流量取为:

$$f_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) - d_{j+\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}} \left[\Delta_{j+\frac{1}{2}} u - L \left[\Delta_{j+\frac{3}{2}} u, \Delta_{j-\frac{1}{2}} u \right] \right] \quad fo \quad (2.10)$$

其中, $\alpha_{j+\frac{1}{2}}$ 为参数, 要求满足 $\alpha_{j+\frac{1}{2}} \geq |a_{j+\frac{1}{2}}| \sqrt{2}$, $L(u, v)$ 为限制因子.

$$L^x(u, v) = \frac{1}{2} \left[1 - \left| \frac{u - v}{\max(|u| + |v|, \varepsilon \Delta x^r)} \right|^q \right] (u + v) \quad (2.11)$$

其中, q, ε, r 为参数, 且 q 取正数, $r > 1$. 当 $r = 3/2$ 时, 该格式在极值点处具有 $1 + q/2$ 阶精度.

§ 3. 数值耗散, 色散效应分析

根据 Liu^{[8]~[10]} 提出的差分方法的余项效应理论, 可以较深入地分析上述具有各类限制因子的格式的数值耗散性, 色散性和数值群速度效应. 利用 Warming 和 Lyett 的 MPDE(modified partial differential equation) 过程, 可导出上述差分格式完全等价的 MPDE. 其一般形式写为:

$$\begin{aligned} u_t + a(u) u_x &= R_s + R_p \\ R_s &= \sum_l \nu_{2l} (-1)^{l-1} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} + \dots \\ R_p &= \sum_m \mu_{2m+1} (-1)^{m-1} \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}} + \dots \end{aligned}$$

其中, $R = R_s + R_p$ 为格式的数值余项, R_s 为偶阶数值余项, 即数值耗散余项. R_p 为奇阶余项, 称为数值色散余项. 由于步长 Δx 足够小, 仅讨论余项的主项(即第一个不为零的偶阶余项和奇阶余项)形式即可. 这样得到耗散关系 α_N , 色散关系 ω_N 以及群速度 v_g^N :

$$\begin{aligned} \alpha_N &\approx (-1)^{L-1} \nu_{2L} \xi^{2L} \\ \omega_N &\approx (-1)^{M-1} \mu_{2M+1} \xi^{2M+1} \\ v_g^N &\approx (-1)^{M-1} (2M+1) \mu_{2M+1} \xi^{2M} \end{aligned}$$

当 $\alpha_N > 0$ 为耗散格式, 计算稳定. 若 $\alpha_N < 0$, 计算不稳定. $\omega_N > 0$ 为正色散格式, 反之为负色散格式. ω_N 的值越大, 色散性越强. 数值色散导致解的振荡和寄生波, 强色散引起较强的寄生振荡效应. 此外, 若 $v_g^N > 0$ 数值解的波速比真解超前且速度差为 v_g^N , 反之则滞后. 下面考虑一些典型的限制因子所对应的格式的数值特性.

(1) TVD 格式

将(2.3)式代入(2.2)式得:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= -\frac{c}{2}(1-c)\phi(r)u_{j+1}^n + (1-c)(1+c\phi(r))u_j^n \\ &\quad + c \left[1 - \frac{1-c}{2}\phi(r) \right] u_{j-1}^n \quad \text{限状} \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中, $c = \alpha\lambda$ 为 Courant 数. 其 MPDE 为:

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= \frac{a}{2}(1-c)\phi(r)\Delta x u_{xx} + \frac{a\Delta x^2}{6}(1-c)(2c-1-3c\phi(r))u_{xxx} + \dots \\ \alpha_N &= \frac{a}{2}(1-c)(1-\phi(r))\Delta x \xi^2 \\ \omega_N &= \frac{a}{6}(1-c)(2c-1-3c\phi(r))\Delta x^2 \xi^3 \\ v_g^N &= \frac{a}{2}(1-c)(2c-1-3c\phi(r))\Delta x^2 \xi^2 \end{aligned}$$

下面对不同的限制因子进行讨论.

$$1) \phi(r) = \frac{|r| + r}{1 + |r|}$$

当 $r \leq 0$ 时, $\phi(r) = 0$, 因此:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_N &= \frac{a}{2}(1-c)\Delta x \xi^2 \\ \omega_N &= -\frac{a}{6}(1-c)(1-2c)\Delta x^2 \xi^3 \\ v_g^N &= -\frac{a}{2}(1-c)(1-2c)\Delta x^2 \xi^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

制因

当 $r > 0$ 时, $\phi(r) = \frac{2r}{r+1}$, 则有:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_N &= \frac{a}{2}(1-c)\frac{1-r}{1+r}\Delta x \xi^2 \\ \omega_N &= -\frac{a}{6}(1-c)\left\{1+2c\frac{2r-1}{r+1}\right\}\Delta x^2 \xi^3 \\ v_g^N &= -\frac{a}{2}(1-c)\left\{1+2c\frac{2r-1}{r+1}\right\}\Delta x^2 \xi^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

由(3.2)、(3.3)式可见: $\alpha_N > 0$ 格式计算稳定, 且数值耗散效应随 c 的增大而减弱。当 $c < 0.5$ 时 $\omega_N < 0$, $v_g^N > 0$, 格式为负色散, 数值解滞后于精确解。当 $c > 0.5$ 时, $\omega_N > 0$, $v_g^N < 0$, 格式为正色散, 数值解超前于精确解。

$$2) \phi(r) = \min\text{mod}(1, r)$$

当 $r \leq 0$ 时, $\phi(r) = 0$ 。此时 α_N , ω_N , v_g^N 如(3.2)式所表示。

当 $0 < r < 1$ 时, $\phi(r) = r$ 。有:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_N &= \frac{a}{2}(1-c)(1-r)\Delta x \xi^2 \\ \omega_N &= -\frac{a}{6}(1-c)(1-2c+3cr)\Delta x^2 \xi^3 \\ v_g^N &\stackrel{\text{此外}}{=} -\frac{a}{2}(1-c)(1-2c+3cr)\Delta x^2 \xi^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

当 $r \geq 1$ 时, $\phi(r) = 1$, 有:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_N &= 0 \\ \omega_N &= -\frac{a}{6}(1-c^2)\Delta x^2 \xi^3 \\ v_g^N &= -\frac{a}{2}(1-c^2)\Delta x^2 \xi^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

由(3.2)、(3.4)、(3.5)式可见, 此时为耗散格式, 耗散性随 c 的增大而减小。当 $c < 0.5$ 时, 为负色散格式, 数值解滞后。当 $c > 0.5$ 时, 随 r 的变化, 格式可能为负色散, 也可能为正色散, 数值解或滞后或超慧, 取决于 r 的值。

$$3) \phi(r) = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2))$$

当 $r \leq 0$ 时, $\phi(r) = 0$, 与(3.2)式相同。

当 $0 < r < 0.5$ 时, $\phi(r) = 2r$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_N &= \frac{a}{2}(1-c)(1-2r)\Delta x\xi^2 \\ \omega_N &= -\frac{a}{6}(1-c)(1-2c+6cr)\Delta x^2\xi^3 \\ v_g^N &= -\frac{a}{2}(1-c)(1-2c+6cr)\Delta x^2\xi^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

当 $0.5 < r < 1$ 时, $\phi(r) = 1$ 与(3.5) 式情况相同·

当 $1 < r < 2$ 时, $\phi(r) = r$ 与(3.4) 式情况相同·

当 $r \geq 0$ 时, $\phi(r) = 2$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_N &= -\frac{a}{2}(1-c)\Delta x\xi^2 \\ \omega_N &= -\frac{a}{6}(1-c)(1+4c)\Delta x^2\xi^3 \\ v_g^N &= -\frac{a}{2}(1-c)(1+4c)\Delta x^2\xi^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

由此可见随 r 的变化, 格式的稳定性也在改变· 当 $r > 2$ 时, 出现计算不稳定, 色散性很强, 因而需要排除这种情况· 当 $c < 0.5$ 时, 格式为负色散, 数值解滞后· 当 $c > 0.5$ 时, 随 r 的变化, 格式时而为正色散, 时而为负色散, 数值解时而滞后, 时而超前, 使得数值解滞后超前现象不如 $c < 0.5$ 时明显·

比较上述三种限制因子的格式, 可以发现 Roe 的 Minmod 因子的格式数值耗散性最强, Van Leer 的光滑因子次之, Roe 的强压缩因子的格式数值耗散性最弱· Roe 的强压缩因子的格式数值色散性最强, Minmod 因子的格式数值色散性最弱·

(2) ELED 格式

将(2.9) 式代入(2.2) 式, 得:

$$u_{j+1}^{n+1} = u_j^n - \frac{c}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \lambda(d_{j+\frac{1}{2}} - d_{j-\frac{1}{2}}) \quad (3.8)$$

由(3.2), (2.10) 式得:

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}}\Delta_{j+\frac{1}{2}}u - \alpha_{j+\frac{1}{2}}(1-\beta) \frac{\Delta_{j+\frac{3}{2}}u + \Delta_{j-\frac{1}{2}}u}{2} \quad (3.9)$$

这儿, $\beta = \left| \frac{\Delta_{j+\frac{3}{2}}u - \Delta_{j-\frac{1}{2}}u}{\max\left[\left|\Delta_{j+\frac{3}{2}}u + \Delta_{j-\frac{1}{2}}u\right|, \epsilon\Delta x^r\right]} \right|^q$, 此格式为强非线性, 难以作精确的理论分析·

这儿采用线性化方法, 虽然不十分准确, 亦可借鉴·

令(3.9) 式中, $\alpha_{j+\frac{1}{2}} = \alpha = \text{常数}$ · 然后将其代入(3.8) 式:

$$u_{j+1}^{n+1} = -\frac{1-\beta}{2}\alpha\lambda u_{j+2}^n - \frac{\alpha\lambda}{2} + \left[1 + \frac{1-\beta}{2}\right]$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_N &= \left\{ \frac{ac}{2} - \beta\alpha \right\} \Delta x \xi^2 \\ \omega_N &= \left\{ \frac{a}{6} + \frac{ac^2}{3} - \beta\alpha c \right\} \Delta x^2 \xi^3 \\ v_g^N &= \left\{ \frac{a}{2} + ac^2 - 3\beta\alpha c \right\} \Delta x^2 \xi^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 2 \\ \xi \end{array} \quad (3.10)$$

显然, 稳定条件为:

$$\frac{ac}{2} > \beta\alpha \quad (3.11)$$

由此可见, ELED 格式较前面的 TVD 格式的耗散性弱, 但随 $\beta\alpha$ 的值的不同, 计算常出现不稳定, 使得计算结果难以达到理论分析中得到的高精度。

§ 4. 数值试验

利用线性单变量守恒律方程为模型, 试验上述格式。这儿取 $a=1$, 初始条件分别取为方波和尖波两种情况。

(1) 初始条件取为方波

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & (x \in [0.5, 1.0]) \\ 0 & (x \notin [0.5, 1.0]) \end{cases} \quad (4.1)$$

空间步长 $\Delta x = 0.05$ 。

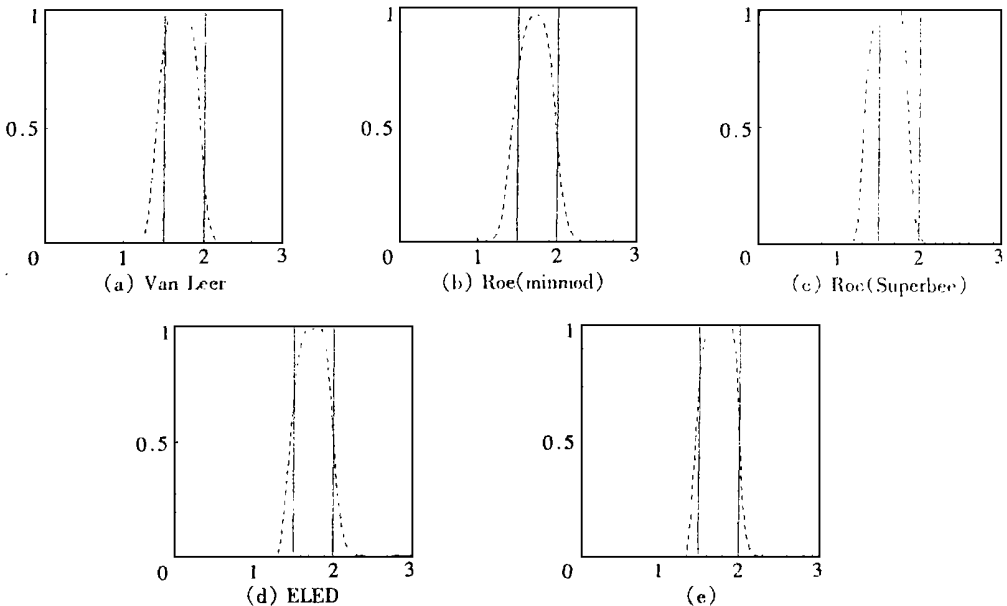


图 1 ($c = 0.4$)

1) $c = 0.4$ 时, 时间步长 $\Delta t = 0.02$, 图 1(a) ~ (c) 分别为时间 $t = 1$ 时, Van Leer 的光滑因子, Roe 的 Minmod 因子和强压缩 (superbee) 因子作限制因子的 TVD 格式的结果。图 1(d) 为 ELED 格式的结果, 这儿 $\varepsilon = 1$, $\alpha_+ \frac{1}{2} = 0.5$, $r = 1.5$, $q = 3.0$ 。由 ELED 格式得到的数值

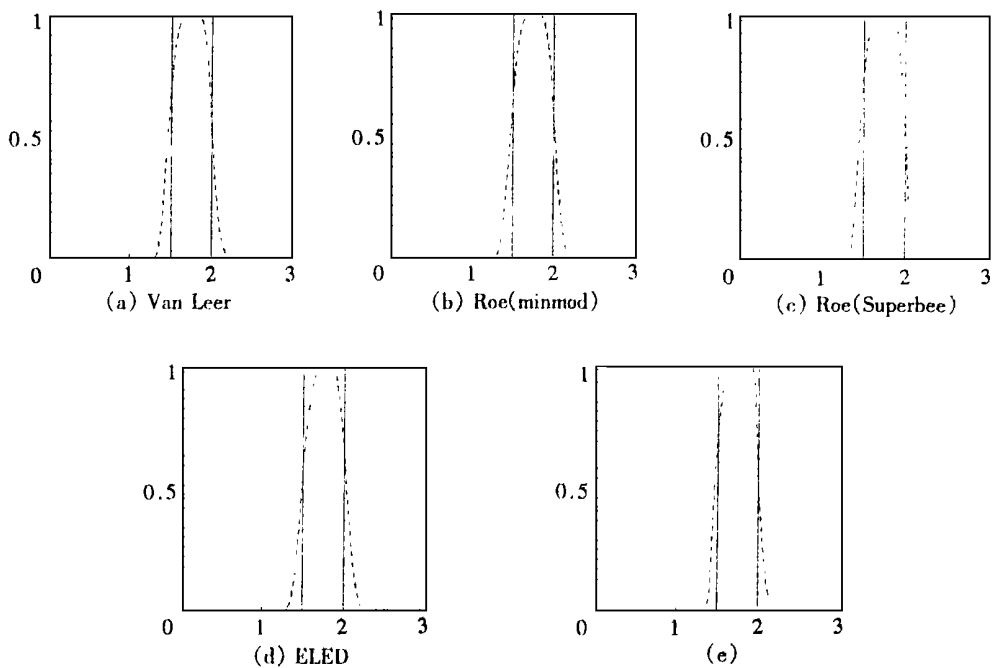


图 2 ($c = 0.8$)

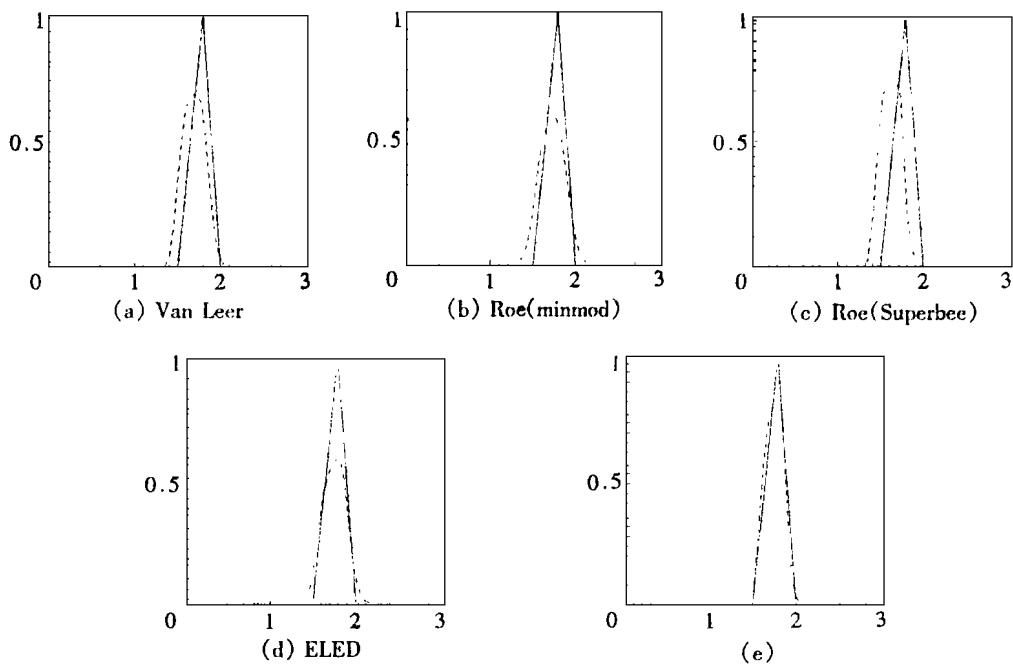


图 3 ($c = 0.4$)

解可以看出, 它没有达到理论分析得到的精度。

从图中还可以看出由不同的限制因子所构成的 TVD 格式呈现的耗散性, 色散性, 群速度

效应是不同的。Minmod 因子的格式耗散性最强, 强压缩因子的最弱, 色散性则为强压缩因子的最强。Minmod 因子的最弱, 且数值解均有滞后现象。这些结果与上一节中的理论分析的结论是一致的。

比较 ELED 格式与 TVD 格可见: ELED 格式虽然理论上具有较高的分辨率, 但数值试验表明该格式, 只有参数 $\alpha_{j+\frac{1}{2}}, r, q, \varepsilon$ 的选择合适时, 才能计算稳定, 且难以达到理论上的精度。

2) $c = 0.8$ 时, 时间步长 $\Delta t = 0.04$ 。图 2(a) ~ (c) 为 $t = 1$ 时, TVD 格式的计算结果。正如理论分析所表明的, 图中曲线明显地比 $c = 0.4$ 时锐利。此时耗散性较弱, 色散性较强。图 2(d) 为 ELED 格式的结果, 这儿 $\varepsilon = 1, \alpha_{j+\frac{1}{2}} = 0.5, r = 1.5, q = 0.8$ 。

(2) 初始条件为尖波

$$u(x, 0) = \begin{cases} 4x - 1 & (x \in [0.5, 0.75]) \\ -4x + 4 & (x \in [0.75, 1]) \\ 0 & (x \notin [0.5, 1]) \end{cases} \quad (4.2)$$

空间步长 $\Delta x = 0.05, c = 0.4, \Delta t = 0.04, t = 1$ 。三种 TVD 格式以及 ELED 格式的计算结果如图 3(a) ~ (d) 所示。此图更明显地反映了各格式的耗散性, 色散性的强弱。由此可见, 在实际应用中应根据问题的特点合理地选择格式。这儿 ELED 格式计算时, 取 $\varepsilon = 1, \alpha_{j+\frac{1}{2}} = 0.5, r = 1.5, q = 3.5$ 。

§ 5. 高分辨率无振荡格式的构造

由上述理论分析和数值试验结果可以看出, 有些耗散性强的格式, 色散性弱, 使得图象在间断解处不够“锐利”。尤其是对尖波, “削平”现象更为突出。有些色散性强的格式, 耗散性弱, 导致计算不稳定, 解失真。为了得到更精确的数值解, 必须使其在间断解处具有高分辨率且计算稳定。这就需要格式同时具有适当的耗散性和色散性。

分析 ELED 格式难以达到理论上的精度的原因可以发现, 此格式耗散性较弱且常出现 $\alpha v < 0$ 的情况, 使计算不稳定且出现虚假振荡。为克服这个困难, 可以通过增加格式的耗散性来实现。因此, 将 ELED 格式的限制因子与 TVD 格式中的耗散性较强的 Minmod 因子进行组合, 且为计算方便将它们作适当的简化, 减少参数。新得到的格式的数值流量仍取(2.8)式, 但式中的 $d_{j+\frac{1}{2}}$ 取为:

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}}{2} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}}{2} L(\Delta_{j+\frac{3}{2}} u, \Delta_{j+\frac{1}{2}} u, \Delta_{j-\frac{1}{2}} u) \quad (5.1)$$

这儿的 $\alpha_{j+\frac{1}{2}}$ 由(2.4)式确定, $L(u, v, w)$ 为限制因子, 取为:

$$L(u, v, w) = \begin{cases} L_0(v), & (\text{当 } |u| + |w| \leq \Delta x^{1.5}) \\ \frac{1}{2+q} L_0(v) + \left[1 - \frac{1}{2+q} L_1(u, w) \right] \lambda, & (\text{当 } |u| + |w| > \Delta x^{1.5}) \end{cases} \quad (5.2)$$

其中, $L_0(v)$ 为相应于 Roe 的 Minmod 因子的限制因子,

$$L_0(v) = \left[1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}} \lambda v(\text{minmod}(r, 1)) \right] \quad (5.3)$$

这儿, $r = w/v, L_1(u, w)$ 由 ELED 格式限制函数修改而得:

$$L_1(u, w) = \left[1 - \left| \frac{u-w}{|u|+|w|} \right|^q \right] \frac{u+w}{2} \quad \text{与上} \quad (5.4)$$

式中的 $q > 0$ 为参数。

由此得到的格式,在数值试验中得到了预期的效果。数值试验结果如图 1(e) $q=4.5$, 图 2(e) $q=0.6$, 图 3(e) $q=4.5$ 。它显示了新的格式在解的剧烈变化区具有较前面几种格式更高的分辨率,且计算稳定。

另外,数值试验表明参数 q 的选取依赖于 Courant 数 c 。一般说来,对于同一个 Courant 数, q 越大,格式的色散性越强。

§ 6. 结 论

本文分析了一些具有典型的限制因子的格式的耗散性,色散性和群速度效应。发现这些格式得不到理想的计算结果的原因之一:耗散性强的格式的色散性较弱,导致在解的间断区分辨率低。色散性强的格式的耗散性较弱,使得计算出现不稳定且产生虚假振荡。本文提出了一种新的格式,它具有较强的色散性使数值解有较高的分辨率,但同时具有适当的耗散性保证计算稳定及不产生虚假振荡。数值试验表明新的格式具有较好的性质。

参 考 文 献

- 1 B. Van Leer, Towards the ultimate conservative difference scheme, II, Monotonicity and conservation combined in a second order scheme, J. Comp. Phys., **14** (1974), 361—370.
- 2 P. L. Roe, Numerical algorithms for the linear wave equation, Royal Aircraft Establishment Technical Report 81047 (1981).
- 3 P. L. Roe, Some contributions to the modelling of discontinuous flows, in Proceedings AMS_SIAM Sum, on Large_Scale Comp. in Fluid Mech., 1983, edited by B. E. Engquist et al., Lectures in Appl. Math., **22**(2) (1985), 673.
- 4 S. R. Chakravarthy and S. Osher, High resolution applications of the Osher upwind scheme for the Euler equations, AIAA paper presented at 6th CFD Conference (1983).
- 5 P. K. Sweby, High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, SIAM J. Numer. Anal., **21**(5) (1984), 995—1011.
- 6 A. Harten, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys., **49** (1983), 357—393.
- 7 A. Jameson, Positive schemes and shock modelling for compressible flows, Internat. J. for Numer. Methods Fluids, **20** (1995), 743—770.
- 8 Liu Ruxun, The study of the remainder effects of FDS, J. Comput. Phys, **9**(4) (1992), 479. (in Chinese)
- 9 Liu Ruxun, The remainder_effect analysis of FDS and the applications to reforming or optimizing of FDS, J. of CUST, **24**(3) (1994), 271. (in Chinese)
- 10 刘儒勋、周朝, 差分格式的余项效应分析及其应用, 应用数学和力学, **16**(1) (1995), 81—90.

Numerical Analysis and Construction of Limiter of High Resolution Difference Scheme

Zhang Mengping Liu Ruxun

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China,
Hefei, Anhui 230026, P. R. China)

Abstract

In the paper, based on the theory of the remainder effects of difference schemes, some typical limiters are analysed and compared. For different limiters, the different strength of numerical dissipation and dispersion of schemes is the reason why the schemes show obvious different characteristics. After analysing and comparing the numerical dissipation and dispersion of various schemes, a new kind of limiter is proposed. The new scheme has high resolution in sharp discontinuities, and avoids the “distortion” due to the stronger numerical dispersion in the relatively more smooth region. Numerical experiments show that the scheme has good properties.

Key words numerical dissipation, numerical dispersion, limiter