应用数学和力学, 第 19 卷 第 7 期(1998 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

不变子流形和非线性自治系统的模态

赵国景　　魏建国

(陈至达推荐, 1997 年 2 月 17 日收到)

摘　要

本文就弱非线性自治系统, 引入了不变流形理论的几何描述, 应用稳定流形定理, Lyapunov 子中心流形定理以及中心流形定理, 给出了非线性模态的定义, 存在条件以及模态的轨道特性　采用了近似的级数展开方法确定模态子流形及模态运动　给出的算例是对本文方法的验证和解释

关键词　非线性　模态　不变子流形
中图分类号　O189

1 引　言

工程计算中, 常见到以系统的线性模态为基矢量去分析非线性系统(例如 Galerkin 方法) 由于缺乏根据, 其计算结果难免令人生疑　这使得人们对研究非线性模态产生兴趣　但是, 由于非线性系统固有的复杂性, 使得非线性模态的研究存在着困难　对于非线性动力系统的模态定义和计算问题, 一直是力学上未能很好解决, 而令众多学者关注的焦点之一　Rosenberg 在六十年代初将保守的非线性多自由度自治系统的正规模态定义为: 所有的质量以同一周期并在同一瞬时通过平衡位置的同步运动[1]　开创了非线性模态研究的先河　此后三十年不少学者对非线性模态问题进行了研究[2~7]　我国学者在八十年代采用 Rosenberg 的定义, 对非线性系统的特征值问题进行了研究[6~7]　到了九十年代, Shaw 和 Pireer 引入了不变流形的概念, 以几何观点给出了非线性模态的定义[3~4], 扩展了非线性模态的研究方法　他们的定义如下: 非线性自治系统的正规模态是一种发生在系统相空间二维不变流形上的运动, 它通过系统的稳定平衡点, 并在此点切于线性化系统的特征平面　Jezequel 和 Lamarque 则给出了用范式理论表达的非线性模态[5]

本文根据稳定流形定理, Lyapunov 子中心流形定理以及中心流形定理[8~13], 以流形可分性的观点, 论述非线性正规模态的定义、存在条件以及在不变流形上模态振动的轨道特征　特别是将一类非线性模态明确地定义在一维或二维子流形上, 并论证了它们的存在条件　这一定义适用于保守的和非保守的非线性自治系统　并采用了[3]建议的级数展开方法近似确定模态了流形和模态运动方程, 求解这些方程可以确定模态振子在流形上的运动轨道　文后给

中国矿业大学北京研究生部, 北京 100083
河北农业大学城建学院, 河北保定 071001

出两个算例, 对本文的定义和方法进行了验证和解释

2 非线性系统的模态

所谓模态, 对线性系统来说, 是将原系统解耦得到一系列的非耦合一阶或二阶方程, 每一个方程表示在一个一维或二维不变子空间 E_k 上的运动 这些子空间即为模态空间, 其对应的方程即为模态方程(此时假定系统没有重特征值, $k = 1, 2, \quad ; n = r + 2c; r, c$ 分别为系统的实特征值与复特征对的个数[11]) 当系统存在重特征值时, 对应于重特征值的模态方程一般不能解耦, 故在下面的讨论中不再考虑存在重特征值的情况 对于任意非线性系统, 如果能象线性系统那样, 分离出一系列解耦的各自独立的一维或二维的运动方程, 而其对应的流形具有不变性, 则此不变流形就是非线性动力系统的非线性模态 然而, 对于任意非线性动力系统, 要寻找这样的流形并非易事 下面我们仅限于讨论弱非线性自治系统在其孤立的平衡点邻近的性态

对于一般的实非线性动力系统, 其运动方程为:

$$x = f(x) \qquad (x \quad R^n, f(x) \quad C^r, r \quad 1) \tag{2 1}$$

不失一般性, 假定 $x = 0$ 是矢量场(2 1)的平衡点, 则存在坐标的线性变换可将此系统化为:

$$\left.\begin{aligned} x &= Ax + F(x, y, z) \\ y &= By + G(x, y, z) \qquad (x, y, z) \quad R^{n_0} \quad R^{n_+} \quad R^{n_-} \\ z &= Cz + H(x, y, z) \qquad n_0 + n_+ + n_- = n \end{aligned}\right\} \tag{2 2a, b, c}$$

其中, (2 1)的线性化矩阵 $Df(x)\,|_{x=0}$ 被分解为 A, B 和 C, 它们分别具有 n_0, n_-, n_+ 个纯虚的, 实部为正的或负的特征值 设 $m = n_0/2$, $m_- = (n_- - r_-)/2$ 及 $m_+ = (n_+ - r_+)/2$, r_- 和 r_+ 分别为矩阵 B 和 C 的实特征值的个数 一般来说(2 2)的三组方程是不可分的, 互相之间不能解耦 下面将依据列出的三个定理, 讨论其可分的条件

定理 1 (稳定或不稳定流形定理)

设 $n_0 = 0$, $x \quad 0$, 此时(2 2)的后两个方程给出双曲系统 在平衡点邻近, 矢量场存在两个 C^r 不变流形, 分别称为相空间的稳定流形和不稳定流形, 它们分别与其对应的线性化系统的不变子空间拓扑同胚, 并在平衡点与之相切[12, 13] 它们可分为 m_- 和 m_+ 个二维不变子流形以及 r_- 和 r_+ 个一维不变子流形 与矩阵 B 或 C 相对应, 这些子流形分别为稳定的或不稳定的 系统限制在这些子流形上的相流分别是收缩流或扩展流

定理 2 (Lyapunov 子中心流形定理)

考虑由方程(2 2)给定的实 C^1 类 Hamiton 系统 在平衡点邻近, 设矩阵 A 的 m 个纯虚特征对为 $\quad i\ _j (j = 1, \quad, m)$, 若对任一 $\ _j$, 方程(2 2) 线性化矩阵的特征值满足条件

$$\ _j \ \ _k^{-1} \quad 整数 \quad (1 \quad j; k \quad m; j \quad k) \tag{2 3}$$

则 Hamilton 系统有 m 个互异的, 局部 C^1 的二维不变子中心流形, 每一流形由嵌入单参数类闭轨组成[10]

定理 3 根据中心流形定理[9, 12, 13], 考虑 $n_0 = 2$, 方程(2 2a) 的特征对为 $\quad i \ _1$, 此时系统(2 2) 存在一个二维中心流形

$$\left\{(x, y, z) \quad R^{n_0} \quad R^{n_-} \quad R^{n_+} \mid y = h_y^c(x); z = h_z^c(x), Dh_y^c(0) = 0, Dh_z^c(0) = 0\right\} \tag{2 4}$$

若将 $y = h_y^c(x)$, 及 $z = h_z^c(x)$ 代入(2 2a), 可得到该子中心流形的运动方程 系统限制在二维中心流形上的相流若是周期轨道, 其周期一般不再等于 2 / $_1$, 而与系统的非线性部份有关, (由范式理论可知, 在保持定性不变的条件下, 系统的非线性部份可以只保留到三次项)

自然, 我们关心 n_0 　4 的情况, 由范式理论可以证明, 当 $n_0 = 4$ 时, 在 $k_1 \quad _1 + k_2 \quad _2 \quad 0$ ($|k_1| + |k_2|$ 　4, k_1, k_2 为整数) 的低阶非共振的情况下, 系统的最简形式为三次系统, 但其中含有不能解耦的三次项(采用极坐标)

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \quad {}_1 r_1 + a_1 r_1^3 + a_2 r_1 r_2^2 + \quad , \qquad {}_1 = \quad {}_1 + \\ r_2 &= \quad {}_2 r_2 + b_1 r_1^2 r_2 + b_2 r_2^3 + \quad , \qquad {}_2 = \quad {}_2 + \end{aligned}\right\} \tag{2 5}$$

即(2 2a) 的两个成对的方程组之间不能解耦　故在这种情况下, 一般不存在上述意义的模态　此时系统(2 2) 一般只有高于二维的中心流形

根据以上三个定理, 可以给出弱非线性自治系统的非线性模态定义及存在条件如下:

定义　若非线性自治系统具有孤立的平衡点, 则系统的非线性模态运动是在系统相空间上的一维或二维不变流形上的运动　这些流形分别与其对应的线性化系统的不变子空间在平衡点相切, 可以是中心的, 稳定的或不稳定的; 与中心不变子流形对应的模态运动可以是周期的或非周期的, 而与稳定子流形或不稳定子流形对应的模态运动则为收缩流或扩张流　这些一维或二维不变子流形的存在条件可由以上三个定理给出

以上定义为我们指明了存在非线性模态的一大类非线性系统　它是从几何观点出发, 以流形的可分性作为依据, 明确了非线性模态存在条件以及模态运动的特性　至于上述象(2 5) 一类高维中心流形一般是不可分的, 如果也将它作为模态, 可以叫做高维中心模态　这个问题尚需进一步研究, 在本文中不再予以讨论

3　模态子流形和模态运动的计算

非线性系统的正规模态流形, 以及流形上的模态运动方程, 即使它属于上述定义的类型, 却常难以得到精确解　为计算模态流形和模态振动, 现采用基于 Taylor 级数展开的近似解法来确定它们　考虑相空间上力学系统的运动方程如下:

$$x_i = y_i, \quad y_i = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \quad , n) \tag{3 1}$$

此处, $x = (x_1, x_2, \quad , x_n)^T$ 代表广义坐标, $y = (y_1, y_2, \quad , y_n)^T$ 代表广义速度　$f = (f_1, f_2, \quad , f_n)^T$ 代表广义力　　在许多工程实际问题中, 线性化系统只有负实部和纯虚部特征值, 故上述二维模态运动一定存在　　按照[3], 设模态坐标的(u, v), 将所有的位移和速度表示为该模态坐标(位移 _速度对) 的函数　　并可任选一对广义坐标, 如 $x_1 = u$, $y_1 = v$, 即

$$x_1 = X_1(u, v) = u, \quad y_1 = Y_1(u, v) = v \tag{3 2}$$

以及可以得到其余 $2n - 2$ 个模态方程如下:

$$x_i = X_i(u, v), \quad y_i = Y_i(u, v) \qquad (i = 2, \quad , n) \tag{3 3}$$

由此可知模态坐标的运动方程

$$u = v, \quad v = f_1(u, X_2(u, v), \quad , X_n(u, v), v, Y_1(u, v), \quad , Y_n(u, v)) \tag{3 4}$$

方程(3 4) 表示了一个单自由度系统的运动, 求解此方程可以得到模态运动解, 但一般难以得到精确的解析表达式　对于弱非线性系统, 我们可将 $X_i(u, v)$ 和 $Y_i(u, v)$ 展开为 Laylor 级数(只写出到三次项):

$$\left.\begin{aligned} X_i(u, v) = {} & a_{1i}u + a_{2i}v + a_{3i}u^2 + a_{4i}uv + a_{5i}v^2 \\ & + a_{6i}u^3 + a_{7i}u^2v + a_{8i}uv^2 + a_{9i}v^3 \\ Y_i(u, v) = {} & b_{1i}u + b_{2i}v + b_{3i}u^2 + b_{4i}uv + b_{5i}v^2 \\ & + b_{6i}u^3 + b_{7i}u^2v + b_{8i}uv^2 + b_{9i}v^3 \end{aligned}\right\} \qquad (3\ 5)$$

将(3 5)代入(3 1)中的后$2n-2$个方程, 并比较同类项系数, 可得到关于a_{ij}和b_{ij}的代数方程组, 解此代数方程组, 可得到a_{ij}, b_{ij}, 进而得到关于$X_i(u, v)$, $Y_i(u, v)$的近似表达式

4 算 例

非线性振动系统如图所示(图 1)

算例 1 设图 1 中$c_1 = c_2 = c_3 = 0$, 则运动方程为

$$x_1 = y_1,$$

$$y_1 = f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 - (g_1 + g_2)x_1^3 + g_2x_2^3$$

$$x_2 = y_2,$$

$$y_2 = f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = -(k_2 + k_3)x_3 + k_2x_1 - (g_2 + g_3)x_2^3 + g_2x_1^3$$

此系统为Hamilton系统, 可以算出它的线性化矩阵有两对纯虚特征值, 由前面的分析可知系统具有两个子中心流形, 流形上的解为闭轨 令$k_1 = k_2 = k_3 = 1\ 0$, $g_1 = 0\ 5$, $g_2 = g_3 = 0$, 可按前述方法解出两个模态振子方程为:

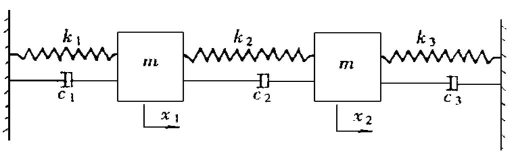

图 1 计算模型

模态 1: $u_1 + u_1 + 0\ 333u_1^3 - 0\ 25u_1u_1^2 = 0$

模态 2: $u_2 + 3u_2 + 0\ 1932u_2^3 - 0\ 0577u_2u_2^2 = 0$

对应两个模态的流形及模态振动的解由图 2 给出

算例 2 当图 1 中的c_1, c_2, c_3不全为零时, 系统为非线性非保守系统, 其运动方程为:

$$x_1 = y_1,$$

$$\begin{aligned} y_1 = f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = {} & -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 - (c_1 + c_2)y_1 \\ & + c_2y_2 - (g_1 + g_2)x_1^3 + g_2x_2^3 \end{aligned}$$

$$x_2 = y_2$$

$$\begin{aligned} y_2 = f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = {} & k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + c_2y_1 - (c_2 + c_3)y_2 \\ & + g_2x_1^3 - (g_2 + g_3)x_2^3 \end{aligned}$$

可以算得此方程对应的线性化特征值实部为负, 根据前述理论, 其对应的非线性模态流形为两个二维稳定了流形, 模态振子在流形上的解为收缩流 现设$c_1 = 0$, $c_2 = c_3 = 0\ 3$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1\ 0$, $g_1 = g_3 = 0$, $g_2 = 0\ 5$, 可得模态振子方程为:

模态 1, $u_1 = v_1$,

$$\begin{aligned} v_1 = {} & -2\ 9676u_1 - 0\ 7517v_1 - 1\ 1039u_1^3 - 0\ 1930u_1^2v_1 \\ & + 0\ 0042u_1v_1^2 + 0\ 0015v_1^3 \end{aligned}$$

模态 2, $u_2 = v_2$,

$$v_2 = -1\ 0109u - 0\ 1483v_2 - 0\ 0321u_2^3 - 0\ 1875u_2^2v_2$$

$$+\ 0\ 0869u_2v_2^2+\ 0\ 2349v_2^3$$

其对应的二维不变流形及模态振子的解由图 3 给出

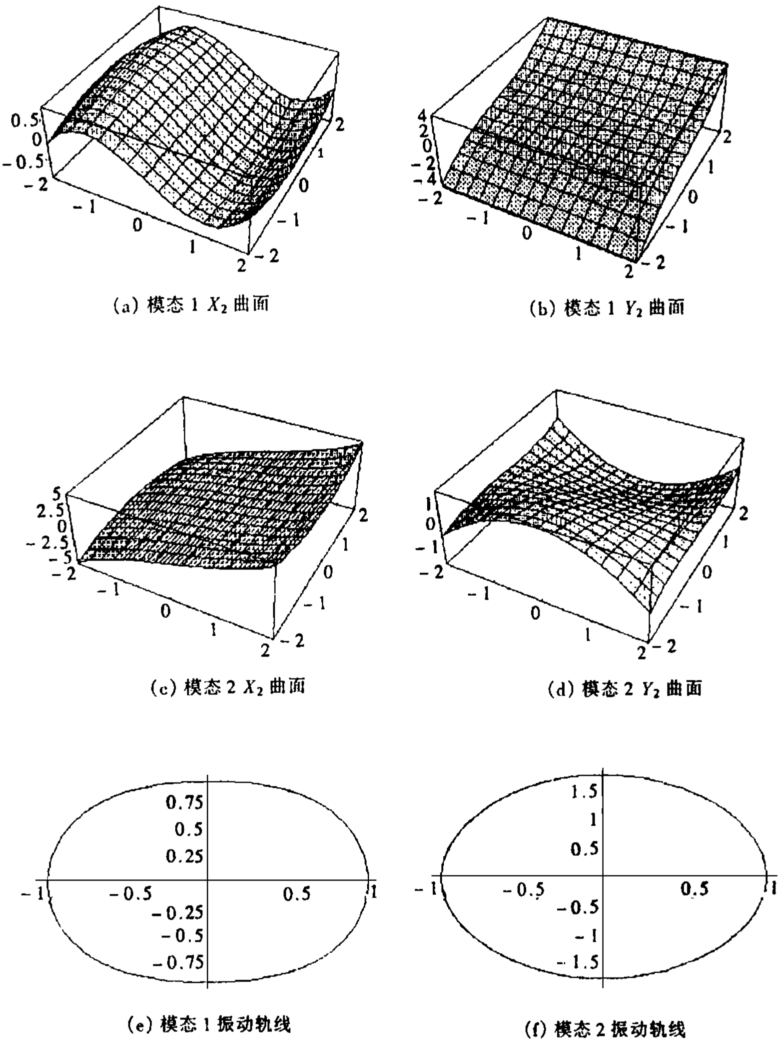

图 2 ((a), (b), (c), (d) 为模态 1、2 的不变非线性模态表面, (e), (f) 为模态振动轨线图)

5 结　论

1 当系统为保守的 Hamilton 系统时, 如非线性系统所对应的线性化系统具有纯虚部特征值时, 其模态子流形为二维中心型, 模态振子的相图为闭轨

2 当系统为非保守系统、且系统所对应的线性化系统具有负实部特征值时, 其模态子流形为稳定子流形, 其模态振子解的相图为收缩流

3 在计算中我们发现系统的刚度系数和阻尼系数 c 的变化会对非线性模态的性态产生

影响, 出现分岔现象　关于这部份内容的探索, 将另文研究

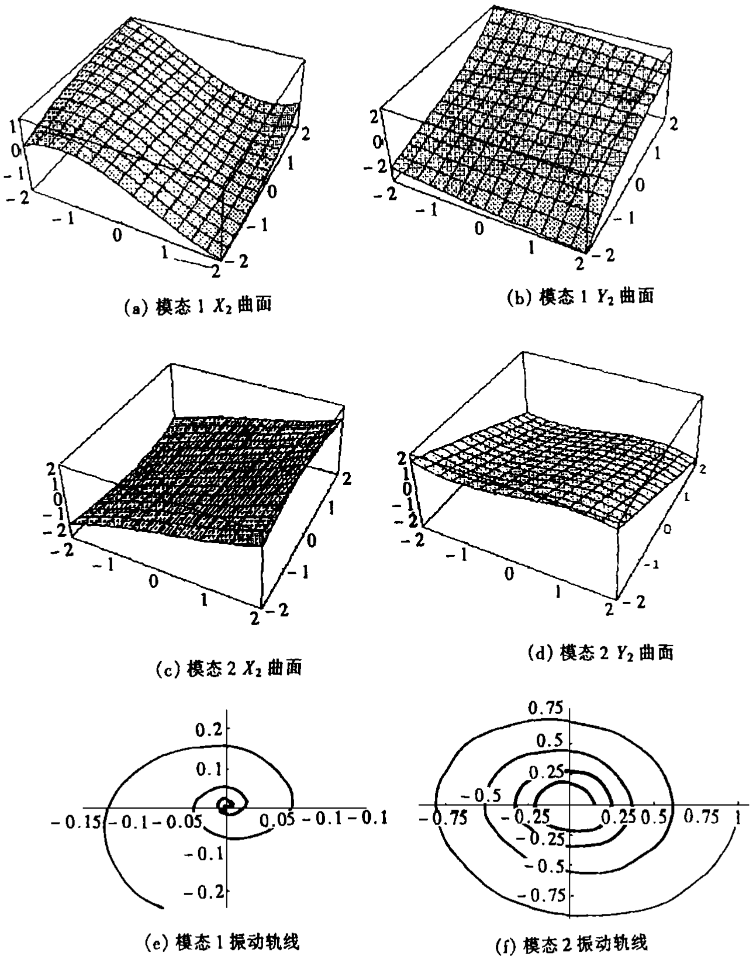

图 3　((a), (b), (c), (d) 为模态 1、2 的不变非线性模态表面, (e), (f) 为模态振动轨线图)

参 考 文 献

1　R. M. Rosenberg, On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom, Advances in Applied Mechanics, **9** (1966), 155　242.

2　R. H. Rand, Nonlinear normal modes in two degree of freedom systems, Journal of Applied Mechanics, **38**(2) (1971), 561.

3　S. W. Shaw and C. Pierre, Normal modes for nonlinear vibratory systems, Journal of Sound and Vabration, **164**(1) (1993), 85　124.

4　S. W. Shaw and C. Pierre, Normal modes of vibration for nonlinear continuous systems, Journal of Sound and Vibration, **169**(3) (1994), 319　347.

5　L. Jezequel and C. H. Lamarque, Analysis of nonlinear dynamical systems by the normal form theory, Journal of Sound and Vibration, **149**(3) (1991), 429　459.

6 刘链生、霍全忠、黄克累, 非线性振动系统主振型的一种求解方法及稳定判定, 应用数学和力学, **8**(6) (1987), 505 512.

7 刘链生、黄克累, 一种用于非线性振动系统的模态分析方法, 力学学报, **20**(1) (1988).

8 陈予恕, 非线性动力学中的现代分析方法 , 科学出版社 (1992).

9 J. Carr, Applications of Centre Manifold Theory, Springer_Verlag New York, (1981).

10 Al Kelley, On the Lyapunov subcentre manifold, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **18**(3) (1967), 472 478.

11 M. Hirsch and S. Smale, Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, New York (1974).

12 V. I. Arnold, Geometrical Method in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer_Verlag, New York (1988).

13 J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer_Verlag, New York (1986).

Invariant Sub_Manifolds and Modes of Nonlinear Autonomous Systems

Zhao Guojing

(Beijing Graduate School, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, P. R. China)

Wei Jianguo

(College of Urban and Rural Construction, Agricultural University of Hebei, Baoding, Hebei 071001, P. R. China)

Abstract

A definition of the modes of a nonlinear autonomous system was developed. The existence conditions and orbits nature of modes are given by using the geometry theory of invariant manifolds that include stable manifold theorem, center manifold theorem and sub_center manifold theorem. The Taylor series expansion was used in order to approach the sub_manifolds of the modes and obtain the motions of the mods on the manifolds. Two examples ware given to demonstrate the applications.

Key words invariant manifold, mode, nonlinear system