

三圆盘扭振系统主共振的理论实验研究

杨志安 邱家俊 李 骊

(1996 年 5 月 17 日收到, 1997 年 10 月 13 日收到修改稿)

摘 要

本文应用非线性振动的平均法, 分析了一个具有立方非线性并受简谐激励作用的三圆盘扭振系统的第二阶主共振, 求得了稳态响应的分岔方程, 并进行了奇异性分析, 理论结果与实验结果相符

关键词 三圆盘扭振系统 平均法 主共振 奇异性理论 跳跃现象
中图分类号 TM301.0325

1 引 言

转子轴系在工程上有广阔的应用背景, 轴系的扭振越来越受到重视 本文所建模型为国产 200MW 汽轮发电机组模化后轴系的截断模型, 简化后的模型为一个具有立方非线性并受简谐激励作用的三圆盘扭振系统, 讨论当外激励频率 ω 与第二阶固有频率 ω_2 相接近时的动力学现象 文中首先应用非线性振动的平均法导出系统在第二阶主共振时的稳态响应分岔方程, 并对分岔方程进行了奇异性分析, 得到了分岔方程对应的转迁集和分岔图 理论分析与实验结果均揭示了系统的响应曲线存在跳跃现象, 实验结果还证实, 系统在两个不同的参数区域上其幅响曲线具有两种不同的拓扑结果, 此结论与应用奇异性理论分析的结果相符

2 数学模型

图 1 为简化后三圆盘扭振系统的力学模型 图中 3 个具有集中质量的圆盘由弹簧联成一个转子轴系, 图中 I_i , θ_i ($i = 1, 2, 3$) 表示第 i 个圆盘的转动惯量和扭振角; c_{12} , c_{23} 为阻尼系数; K_{12} , K_{23} 为线性扭转刚度; K 代表立方非线性刚度; $F \cos t$ 为外部简谐激励 按图 1, 可求得系统的动能 T , 势能 V 和耗散函数 R 如下

$$T = \frac{1}{2}I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}I_3 \dot{\theta}_3^2$$
$$V = \frac{1}{2}K_{12}(\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2}K_{23}(\theta_2 - \theta_3)^2 + \frac{1}{4}K(\theta_1 - \theta_2)^4$$

国家自然科学基金资助项目 (19672041)
天津大学力学与工程测试系, 天津 300072
北京工业大学基础科学系, 北京 100022

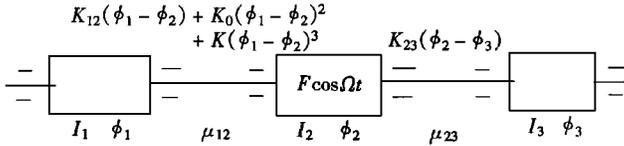


图1 力学模型

$$R = \frac{1}{2} \dot{\phi}_2 (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) + \frac{1}{2} \dot{\phi}_3 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3)$$

式中 为小参数,引入 Lagrange 函数 $L = T - V$, 代入 Lagrange 方程^[1], 得

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\phi}_1 + K_{12}(\phi_1 - \phi_2) + \dot{\phi}_2 (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) + K(\phi_1 - \phi_2)^3 &= 0 \\ I_2 \ddot{\phi}_2 - K_{12}(\phi_1 - \phi_2) + K_{23}(\phi_2 - \phi_3) - \dot{\phi}_2 (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) + \dot{\phi}_3 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3) \\ &- K(\phi_1 - \phi_2)^3 = F \cos t \\ I_3 \ddot{\phi}_3 - K_{23}(\phi_2 - \phi_3) - \dot{\phi}_3 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

方程组(2.1)是三圆盘扭振系统的振动方程

若令 $\psi_1 = \phi_1 - \phi_2$, $\psi_2 = \phi_2 - \phi_3$, 经变换, 消除系统的转动运动, 方程组(2.1)可以转换成关于相对扭振角 ψ_1 的扭振方程(2.2), 即

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\psi}_1 + \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} K_{12} \psi_1 - \frac{K_{23}}{I_2} \psi_2 &= \frac{1}{I_1 I_2} [- (I_1 + I_2) \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_1 - (I_1 + I_2) K \psi_1^3 \\ &+ I_1 \dot{\psi}_2 \dot{\psi}_2 - I_1 F \cos t] \\ \ddot{\psi}_2 - \frac{K_{12}}{I_2} \psi_1 + \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} K_{23} \psi_2 &= \frac{1}{I_2 I_3} [I_3 \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_1 - (I_2 + I_3) \dot{\psi}_2 \dot{\psi}_2 \\ &+ I_3 K \psi_1^3 + I_3 F \cos t] \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

上面两式中, $(\dot{\psi}_i)$ 代表对时间求一阶导数, $(\ddot{\psi}_i)$ 代表对时间求二阶导数, 利用(2.2)可以分析三圆盘扭振系统在不同共振条件下的各种振动问题

方程组(2.2)的线性无阻尼自由振动方程为

$$\ddot{\psi}_1 + \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} K_{12} \psi_1 - \frac{K_{23}}{I_2} \psi_2 = 0, \quad \ddot{\psi}_2 - \frac{K_{12}}{I_2} \psi_1 + \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} K_{23} \psi_2 = 0 \quad (2.3)$$

对应的频率方程为

$$\omega^4 - \omega^2 (a_1 K_{12} + a_4 K_{23}) + a_1 a_4 K_{12} K_{23} - a_2 a_2 K_{12} K_{23} = 0 \quad (2.4)$$

由韦达定理, 得

$$(a_1 a_4 - a_2 a_2) K_{12} K_{23} = \omega_1^2 \omega_2^2, \quad a_1 K_{12} + a_4 K_{23} = \omega_1^2 + \omega_2^2 \quad (2.5)$$

(2.5)式确定了系统的固有频率 ω_i 与轴段刚度 K_{ij} 之间的关系, 对于本文, 在已知各圆盘的转动惯量 I_i 和系统的固有频率 ω_i 后, 由(2.5)式可反解出刚度

上面两式中

$$a_1 = \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}, \quad a_2 = \frac{1}{I_2}, \quad a_3 = \frac{1}{I_2}, \quad a_4 = \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} \quad (2.6)$$

3 理论分析

本节讨论当 $\omega = \omega_2$ 时的动力学问题 引入主共振调谐值 σ , 则共振关系可表示为

$$= 2- \quad (3.1)$$

式中 γ_2 为小参数

由非线性振动的平均法^[2], 得三圆盘扭振系统第二阶主共振的一次近似方程, 即

$$\frac{dy_2}{dt} = (-2\gamma_2 + f_2 \sin \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 2- + \left[-\frac{f_2}{\gamma_2} \cos \varphi + \gamma_2^2 \right] \quad (3.2)$$

令 $dy_2/dt = d\varphi/dt = 0$, 并注意到(3.1)式以及 $\gamma_2 = 0$, 则得对应的稳态解方程为

$$2\gamma_2 + f_2 \sin \varphi = 0, \quad \gamma_2 + \gamma_2^3 - f_2 \cos \varphi = 0 \quad (3.3)$$

式中, γ_2 为非循环坐标, 2 为模态阻尼系数, γ_2 为模态振幅, 1 为综合系数, f_2 为变换后激励幅值

在(3.3)式中消去 φ , 得主共振响应曲线的分岔方程, 即

$$2\gamma_2^6 + 2 - \gamma_2^4 + (\frac{2}{1} + \gamma_2^2)\gamma_2^2 - f_2^2 = 0 \quad (3.4)$$

关于稳态解的稳定性, 由胡尔维茨判据决定 对应稳态解的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 2- & f_2 \cos \varphi \\ + 3 - \gamma_2^2 & f_2 \sin \varphi \end{vmatrix}_{\gamma_2 = \gamma_2^0, \varphi = \varphi^0} = 0$$

展开上式, 得

$$2- (\frac{2}{1} + f_2 \sin \varphi) - (+ 3 - \gamma_2^2) f_2 \cos \varphi = 0 \quad (3.5)$$

稳态解 (γ_2^0, φ^0) 稳定的充要条件为

$$(+ 3 - \gamma_2^2) f_2 \cos \varphi |_{\gamma_2 = \gamma_2^0, \varphi = \varphi^0} > 0, \quad 2 + f_2 \sin \varphi |_{\gamma_2 = \gamma_2^0, \varphi = \varphi^0} < 0 \quad (3.6)$$

若令

$$0 = \frac{f_2^2}{1}, \quad \frac{2}{1} = \frac{2 + \gamma_2^2}{1}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{1} \quad (3.7)$$

则方程(3.4)可写成下面形式

$$\begin{aligned} G(\gamma_2, 0, \varphi) &= \gamma_2^7 - \gamma_2 + \gamma_2^3 + \gamma_2^5 = \gamma_2(u^3 - \gamma_2 + u + u^2) \\ &= \gamma_2 R(u, 0, \varphi) \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中 $u = \gamma_2^2$

方程(3.8)是GS范式

$$\gamma_2^7 - \gamma_2 = 0 \quad (3.9)$$

的普适开折, 它 Z_2 对称余维数为 2 这里, γ_2 作为方程(3.8)的开折参数, 表明物理参数的不同取值会导致振幅产生不同的分岔模式; 0 为分岔参数, 表明在确定的分岔模式下, 振幅将随另外的参数而变化

下面求分岔方程(3.8)的转迁集和分岔图, 由奇异性理论^[3]知, 具有 Z_2 对称的分岔方程

$$G(\gamma_2, 0, \varphi) = \gamma_2 R(u, 0, \varphi), \quad \text{其中 } u = \gamma_2^2$$

的转迁集定义为

(a) 分岔集

$$B_1(Z_2) = \left\{ \begin{array}{l} R^k | (u, 0), u > 0, \text{ 使得在 } (u, 0, \varphi); \\ u = 0 \text{ 处, } R = R_u = R_{\varphi} = 0 \end{array} \right\}$$

$$B_0(Z_2) = \left\{ R^k | 0, \text{ 使得在 } (0, 0, \varphi) \text{ 处, 对于 } R_{\varphi} = 0 \right\}$$

(b) 滞后集

$$H_1(Z_2) = \left\{ \begin{array}{l} R^k | (u, 0), u > 0, \text{使得在}(u, 0) \text{处,} \\ R = R_u = R_{uu} = 0 \end{array} \right\}$$

$$H_0(Z_2) = \left\{ \begin{array}{l} R^k | 0, \text{使得在}(u, 0) \text{处, } R = R_u = 0 \end{array} \right\}$$

(c) 双极限集

$$D(Z_2) = \left\{ \begin{array}{l} R^k | (u_1, u_2), u_1 < u_2, \text{且 } u_1, u_2 > 0, \text{使得} \\ R = uR_u = 0, \text{在}(u_i, 0), (u_i = 1, 2) \end{array} \right\}$$

(d) 转迁集

$$(Z_2) = B_1(Z_2) \cup B_0(Z_2) \cup H_1(Z_2) \cup H_0(Z_2) \cup D(Z_2)$$

由以上定义可以得到分岔方程(3.8)的转迁集为

(1) 分岔集

$$B_0(Z_2) = B_1(Z_2) = \emptyset \text{ (为空集)}$$

(2) 滞后集

$$H_0(Z_2) = \left\{ \alpha = 0, H_1(Z_2) = \left\{ \alpha = \frac{2}{3}, \beta = 0 \right\} \right\}$$

(3) 双极限集

$$D(Z_2) = \left\{ \alpha = \frac{2}{3}, \beta = 0 \right\}$$

转迁集

$$(Z_2) = B_0 \cup B_1 \cup H_0 \cup H_1 \cup D$$

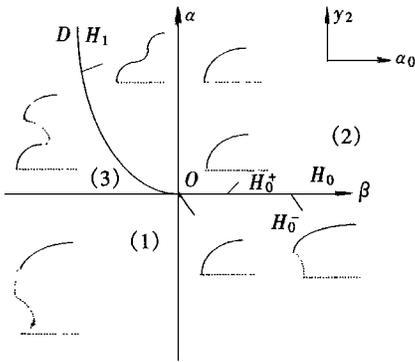


图2 方程(3.8)的转迁集和分岔图

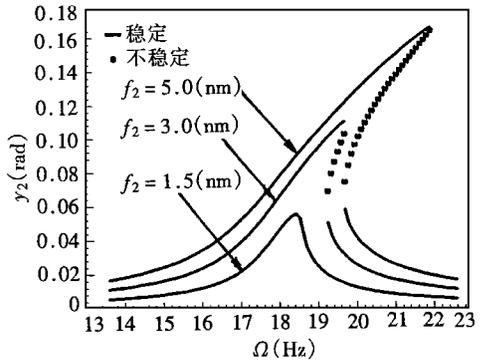


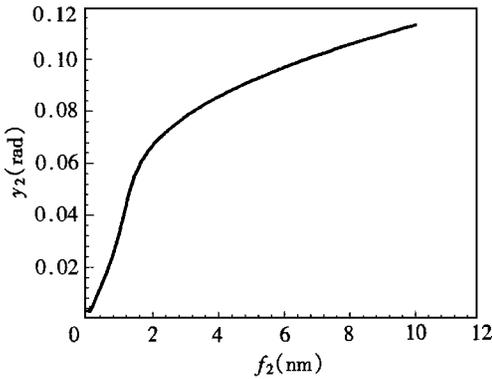
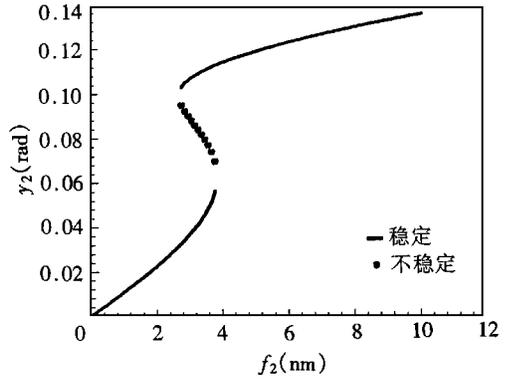
图3 频响曲线

转迁集 将开折平面 $\alpha - \beta$ 化分为3个区域,如图2所示.在同一的区域中,即使分岔参数变化,其分岔图也将保持为同一拓扑结构,这样的分岔图称为保持,而转迁集上的分岔图称为非保持的.图2中7种分岔模式反应了三圆盘扭振系统与外部激励相互作用的全部信息,因此可以通过控制开折参数 α 来控制系统的动力学行为.

图形中分岔曲线的虚线部分是不稳定的,在选择系统参数时应避开这一区域.下面我们得到的频响曲线是工程中遇到的一种分岔模式,其它的分岔模式可以通过调节系统的参数而得到.

利用(3.4)式可以确定主共振下的响应曲线,图3为三种不同激励幅值下的响应曲线.随着激励幅值的增大,频响曲线逐渐向右倾斜,跳跃现象明显,振幅增大,共振区加宽.

图4,5是分别在开折平面区域(2),(3)取值时的幅响曲线.由图可知,在不同的参数区域上,幅响曲线会有不同的拓扑结构.

图4 幅响曲线, $\omega_n = 17.5 \text{ Hz}$ 图5 幅响曲线, $\omega_n = 19.1 \text{ Hz}$

4 实验研究与结果分析

图6为实验测试装置简图,主要由信号发生器、信号调节器及信号分析仪器三部分组成图中各序号的意义如下:

1 B & K 4384 加速度计, 2 B & K 2635 电荷放大器, 3 B & K 2426 精密电压表,
4 PHILIPS PR 9270 激振器, 5 电流表, 6 PHILIPS 129043 功率放大器,
7 PHILIPS PM 5121 信号发生器, 8 SR 8 示波器, 9 MS1215 A/D 模数转换板,
10 80486 计算机, 11 HPDJ500Q 打印机

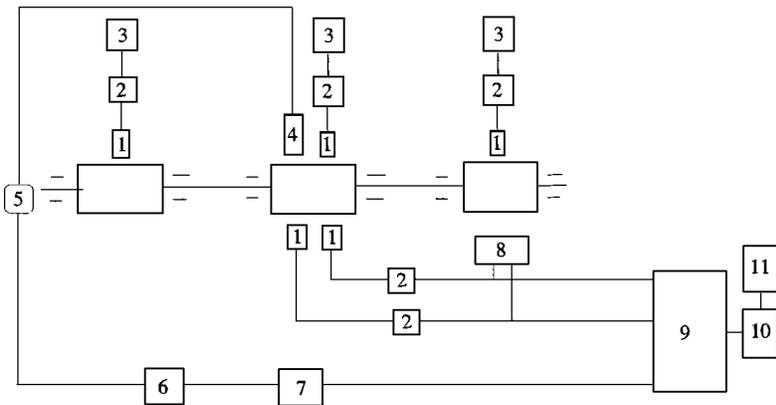


图6 实验测试装置简图

由理论分析知道,在小激励水平下,频响曲线与线性系统基本一致。调节激励系统,保持小激励水平下,由共振法,测得系统的固有频率为 $\omega_1 = 7.0 \text{ Hz}$, $\omega_2 = 18.5 \text{ Hz}$,然后便可以进行响应曲线的实验。

图7,8为频响曲线,取值对应分岔图2的区域(3),图7为频率增加时测得的频响曲线,当激励频率 $\omega = 19.4 \text{ Hz}$,频响曲线发生跳跃;图8为频率由高至低扫过时测得的频响曲线,当 $\omega = 18.8 \text{ Hz}$;频响曲线发生跳跃,图中实线为理论曲线,实验结果与理论结果相符。

图9, 10为实验测得的幅响曲线, 图9与开折平面上区域(2)对应, 图10与开折平面上区域(3)对应. 图9中激励频率 $\Omega = 17.5 \text{ Hz}$, y_2 随激励幅值 f_2 按非线性规律变化; 图10中激励频率 $\Omega = 19.1 \text{ Hz}$, 开始时, y_2 随激励幅值 f_2 增加而增大, 当 $f_2 = 4 \text{ nm}$ 时, y_2 由 0.02 跳至 0.07, 而后随 f_2 的增大而慢慢增加, 图中实线为理论曲线, 理论分析结果与实验结果相符.

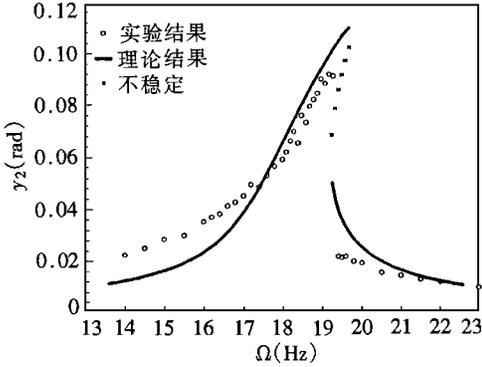


图7 升频时频响实验曲线, $f_2 = 3 \text{ nm}$

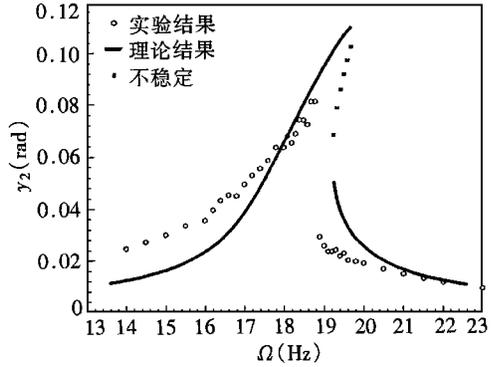


图8 降频时频响实验曲线, $f_2 = 3 \text{ nm}$

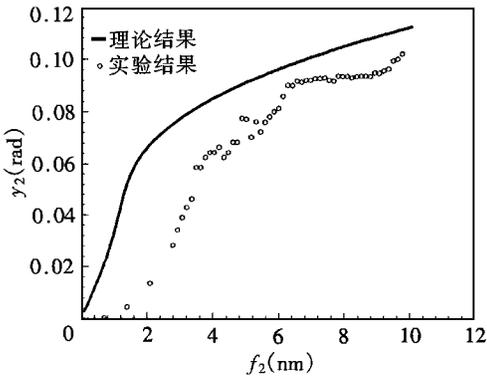


图9 幅响实验曲线, $\Omega = 17.5 \text{ Hz}$

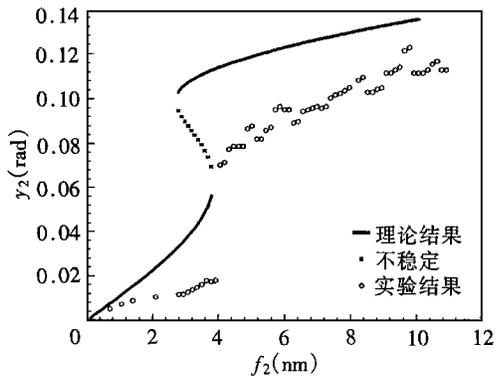


图10 幅响实验曲线, $\Omega = 19.1 \text{ Hz}$

5 结 论

本文以工程上广泛应用的转子轴系为背景, 所选模型为国产 200M W 汽轮发电机组模块化后轴系扭振的截断模型, 重点研究了三圆盘转子轴系受简谐激励的主共振. 文中选用主共振调谐值 Ω 及外激励幅值 f_2 为参数, 对主共振的稳态响应曲线进行了理论分析, 揭示了系统的响应曲线存在跳跃现象, 幅响曲线在不同的参数区域具有不同的拓扑结构, 理论结果得到了实验验证. 同时, 对响应曲线进行了奇异性分析, 给出了转迁集上 3 个区域中的 7 种分岔模式. 文中结论对旋转机械特别是大型汽轮发电机组的设计、动态分析与控制具有指导意义和应用价值.

参 考 文 献

- 1 邱家俊, 机电分析动力学, 科学出版社, 北京 (1992), 21—55.
- 2 A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Wiley-Interscience, New York (1979), 214—253.
- 3 M. Golubitsky and D. G. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. 1, Springer-Verlag, New York (1985), 206—284.

A Theoretical and Experimental Investigation of a Primary Resonance of a Three Circular Plates Torsion Vibration System

Yang Zhian Qiu Jiajun

(Department of Mechanics and Engineering Measurement, Tianjin University,
Tianjin 300072, P. R. China)

Li Li

(Basic Science Department, Beijing Polytechnic University, Beijing 100022, P. R. China)

Abstract

The method of averaging is applied in this paper to deal with a primary resonance of a three circular plates torsion vibration system having cubic nonlinearities which is excited by a simple harmonic excitation. Bifurcation equation of the steady state response is obtained and its singularity analysis is given. The results of theoretical analysis are shown to be in good agreement with experimental ones.

Key words three circular plates torsion vibration, method of averaging, primary resonance, singularity theory, jump