

变截面箱形薄壁立柱屈曲 荷载的近似分析解

谢用九^① 宁钦海^① 陈明伦^②

(刘人怀推荐, 1997 年 1 月 25 日收到, 1997 年 9 月 20 日收到修改稿)

摘 要

变截面箱形薄壁立柱弯扭屈曲的三个控制方程是二阶或四阶变系数的常微分方程, 很难用解析的方法求解。本文用多项式来近似截面的几何特性和微分方程的某些系数, 用能量原理和伽辽金法分别导出了计算这种立柱弯曲和扭转屈曲荷载的近似公式, 用数值算例来验证了所给解答的正确性。本文的计算结果为论证变截面箱形薄壁立柱的稳定性提供了依据。本文具有实用价值。

关键词 变截面箱形薄壁立柱 弯扭屈曲 屈曲荷载的近似解

中图分类号 TU 311

§ 1. 引 言

变截面箱形薄壁立柱作为受压构件广泛用于桥梁高墩、水塔、电视塔和其它类似结构。但是目前研究这种结构弯扭屈曲临界荷载的文章还很少见到。本文利用能量原理和伽辽金法分别导出了计算弯曲和扭转屈曲临界荷载的近似表达式。编制了相应的计算机程序, 并给出了一些具体的数值算例。有准确解的等直杆可看作本文所讨论问题的特例。与准确解相比, 可看到本文的计算结果是相当精确的。这证实了本文所给表达式和编制的程序是正确的。

本文是应四川省交通厅公路规划勘察设计院之邀而作。导出的算式和编制的程序已用于世界最大跨度的钢筋混凝土拱桥——万县长江大桥拱上立柱稳定性的论证。当然也可用于其它类似结构稳定性的论证。考虑到实际工程结构的要求, 本文所考虑的边界条件仅仅是: 立柱下端固定; 上端——对于弯曲屈曲是弹性支承, 对于扭转屈曲是自由。但利用本文讨论的方法, 不难将上述边界条件推广到任意情形。

§ 2. 控制方程

考虑双对称等截面的箱形薄壁立柱。设 x 和 y 轴与截面主坐标重合, z 轴为纵轴, 原点上端截面中心。三个控制方程为^{[1],[2]}

① 西南交通大学桥梁及结构工程系, 成都 610031

② 重庆交通学院, 重庆大坪 400016

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi''(z) + P\xi(z) &= 0 \\ EJ_x \eta''(z) + P\eta(z) &= 0 \\ \frac{EJ_{\omega} J_p}{J_p - J_d} \theta^{IV}(z) - (GJ_d - Pr^2) \theta''(z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

式中, ξ, η 为截面 z 的中心在 x, y 方向的位移; θ 为截面绕 z 轴的扭转角; P 为作用于截面 z 的轴力; J_x, J_y 为惯性矩; J_p 为极惯矩; J_d 为扭转常数; J_{ω} 为翘曲常数; E 为弹性模量; G 为剪切模量; r 为回转半径, 按定义

$$r^2 = \frac{J_x + J_y}{F} \quad (2.2)$$

式中, F 为截面面积。

注意, 对于混凝土, 应用折算弹性模量 $E_1 (= E/(1 - \mu^2))$, μ 为泊松比) 来替代弹性模量 E , 且剪切模量 G 等于 $0.43E$, 见文[3]。

在方程(2.1)中, 前两个方程为欧拉方程, 最后一个方程为扭转屈曲控制方程。当截面的形心和剪切中心重合时, 正如这里所讨论的情形一样, 方程(2.1)中的三个联立方程是不耦合的, 因此可以分别求解它们。但三个屈曲荷载中, 只有最小的一个才具有实际意义。

对于变截面杆, 方程(2.1)中的所有几何常数均为纵标 z 的函数; 若计自重, 轴力 P 也是 z 的函数。在此情况下, 方程(2.1)变为三个变系数的常微分方程, 很难用解析的方法求解。本文引入某些近似, 使变截面箱形薄壁立柱控制方程较为精确的解很容易求得。

§ 3. 弹性约束下立柱欧拉屈曲荷载的近似分析

考虑图 1(a) 所示高为 L 等壁厚变截面箱形薄壁立柱。该立柱下端固定, 上端受弹簧约束且作用有轴向压力 P_v 。弹簧刚度为 k , 其变化范围是 $[0, +\infty)$ 。结构计算模型示于图 1(b), 而立柱截面示于图 1(c)。

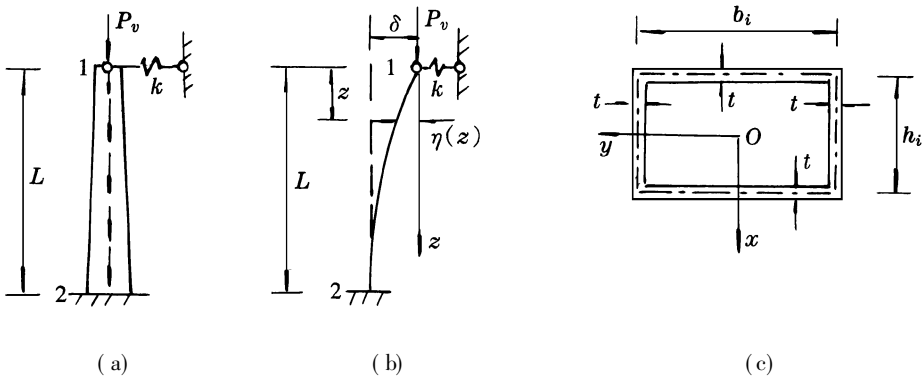


图 1

设立柱上端截面编号为 1, 下端截面编号为 2。在下面诸式中, 用带下标 i ($i = 1, 2$) 的符号来表示截面几何特性和有关物理量在相应柱端的值。现在构造 z 的多项式来近似截面 z 的几何特性和有关物理量。这些多项式在两端是准确的而在杆件内部都是近似的。所构造的多项式是:

$$\text{截面面积} \quad F(z) = F_1 \left[1 + \frac{\beta}{L} z \right] \quad (3.1a)$$

$$\text{单位长度上自重} \quad q(z) = q_1 \left[1 + \frac{\beta}{L} z \right] \quad (3.1b)$$

$$\text{式中} \quad \beta = F_2 / F_1 - 1 \quad (3.1c)$$

$$\text{轴力} \quad P(z) = P_v + \int_0^z q_1 \left[\text{常数} \frac{\beta}{L} \zeta \right] d\zeta = P_v + \text{转角} \left[1 + \frac{\beta}{2L} z \right] \quad (3.2)$$

$$\text{惯性矩} \quad J(z) = J_1 \left[1 + \frac{\alpha_1}{L} z \right]^3 \quad (3.3a)$$

$$\text{式中} \quad \alpha_1 = \sqrt[3]{J_2 / J_1} - 1 \quad (3.3b)$$

注意(3.3)式适用于 $J_x(z)$ 和 $J_y(z)$, 但这里先考虑前者。

考虑图 1(b) 所示的结构理想化模型。为了简便, 记

$$a = \frac{\pi}{2L}, \quad b = 3a = \frac{3\pi}{2L} \quad (3.4)$$

选择试探函数

$$\eta(z) = \delta_1 [\sin az + (1 - C^k) \sin bz] \quad (3.5)$$

它表示假定的立柱挠曲形状。据上式, 立柱上端的实际水平位移为

$$\delta = \eta(L) = \delta_1 C^k$$

这里, C 为由临界荷载驻值条件确定的待定参数, 下面讨论其变化范围。由于对于任意 $k \geq 0$, 位移 δ 都是物理实量, 因此有 $C > 0$; 若立柱上端为简支, 即当 $k = \infty$ 时, 则 $\delta = 0$, 因此又有 $C < 1$ 。从而待定参数 C 满足 $0 < C < 1$ 。现在讨论 δ_1 的物理意义。若立柱上端为自由, 即 $k = 0$ 时, 则 $\delta = \delta_1$ 。此时立柱上端的水平位移达到极大, 因此 δ_1 表示立柱上端横向位移的幅值。

(3.5) 式右边第一项为假定的立柱挠曲形状的主部, 第二项为考虑柱顶弹簧影响的修正项。很明显, 所选择的试探函数满足位移边界条件 $\eta(0) = \eta(L) = 0$ 。

根据能量原理, 外力所做的功等于立柱的应变能。注意到柱顶弹簧的变形为 δ , 因此有

$$\begin{aligned} P_v \int_0^L \eta'^2 dz + q_1 \int_0^L z \left[1 + \frac{\beta}{2L} z \right] \eta'^2 dz - k\delta^2 \\ e = \int_0^L EJ_1 \left[1 + \frac{\alpha_1}{L} z \right]^3 \eta''^2 dz \end{aligned} \quad (3.6)$$

设

$$u = 1 - C^k \quad (3.7)$$

将(3.7)式代入式(3.5)和(3.6), 从 0 到 L 积分, 简化其结果, 便得到弯曲屈曲临界荷载

$$P_v = [P_0 D_3 - G_0 D_2 + K_0 (1 - u)^2] / D_1 \quad (3.8a)$$

式中

$$P_0 = \frac{\pi^2 EJ_1}{4L^2}, \quad G_0 = q_1 L, \quad K_0 = \frac{4Lk}{\pi^2} \quad (3.8b)$$

及

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= (1 + 9u^2) / 2 \\ D_2 &= D_{21} + D_{22} u + D_{23} u^2 \\ D_3 &= D_{31} + D_{32} u + D_{33} u^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

这里,

$$\left. \begin{aligned} D_{21} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{\beta}{2} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \right], D_{22} = -\frac{3}{\pi^2} \left[2 + \frac{3\beta}{4} \right] \\ D_{23} &= \frac{9}{4} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{\beta}{2} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\pi^2} \right] \\ D_{31} &= \frac{1}{2} + 3 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right] \alpha_1 + 3 \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{\pi^2} \alpha_1^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} + \frac{3\pi^2 - 12}{\pi^4} \alpha_1^3 \right] \right] \\ D_{32} &= -\frac{54}{\pi^2} \alpha_1 - \frac{135}{2\pi^2} \alpha_1^2 - 27 \left[\frac{5}{4\pi^2} - \frac{4}{\pi^4} \right] \alpha_1^3 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

式 中

$$k \quad \text{都是} D_{33} = 40 \frac{1}{2} + 27 \left[\frac{9}{4} - \frac{1}{\pi^2} \alpha_1 + 27 \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} \right] \alpha_1^2 + \frac{3}{2} \left[\frac{27}{4} + \frac{9\pi^2 - 4}{\pi^4} \alpha_1^3 \right] \right]$$

如前述, 弹簧常数 $k \geq 0$, 待定参数 $0 < C < 1$, 因此 $0 < C^k < 1$. 由(3.7)式可知 $0 < u < 1$. 在满足上述条件的 C^k 或 u 的所有可能的取值中, 正确的取值应使临界荷载 P_V 最小.

因此有 $\frac{dP_V}{du} = 0$. 即

$$P'_V = \left\{ D_1 [P_0 D'_3 - G_0 D'_2 - 2K_0(1-u)] - D'_1 [P_0 D_3 - G_0 D_2 + K_0(1-u)^2] \right\} / D_1^2 = 0 \quad (3.11)$$

由(3.9)式得到

$$\left. \begin{aligned} D'_1 &= 9u \\ D'_2 &= D_{22} + 2D_{23}u \\ D'_3 &= D_{32} + 2D_{33}u \end{aligned} \right\}^k \quad (3.12)$$

将(3.9)式和(3.12)代入(3.11)式, 得

$$Q_1 u^2 + Q_2 u + Q_3 = 0 \quad (3.13)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -\frac{9}{2} (P_0 D_{32} - G_0 D_{22}) + 9K_0 \\ Q_2 &= P_0 (D_{33} - 9D_{31}) - G_0 (D_{23} - 9D_{21}) - 8K_0 \\ Q_3 &= \frac{1}{2} (P_0 D_{32} - G_0 D_{22}) - K_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

解方程(3.13)得

$$u = \frac{-Q_2 \pm \sqrt{Q_2^2 - 4Q_1 Q_3}}{2Q_1} \quad (3.15)$$

如前所述, 只有当 $0 < u < 1$ 时, (3.15)式给出的解 u 才有实际意义.

从(3.15)式求得 u 后, 利用(3.8)、(3.9)和(3.10)式可求得 y 方向的欧拉屈曲荷载 $P_y = P_v$. 用同样的方法也可求得 x 方向的欧拉屈曲荷载 P_x .

§ 4. 扭转屈曲荷载的近似分析

考虑图2所示变截面箱形薄壁立柱, 建立坐标系如图示. 立柱的截面又示于图1(c). 如第2节所述, 立柱扭转屈曲控制方程的精确表达式为

$$\frac{EJ_{\omega}(z)J_p(z)}{J_p(z) - J_d(z)}\theta^{IV} - GJ_d(z)\theta'' + [r(z)]^2P(z)\theta'' = 0 \quad (4.1a)$$

或简写为

$$a_4(z)\theta^{IV} - a_2(z)\theta'' + b(z)\theta'' = 0 \quad (4.1b)$$

为求解变系数的常微分方程,再次引入 z 的多项式来近似上述方程的系数。设

$$a_4(z) = a_{40} \left[1 + \frac{\alpha_4}{L}z \right]^5 \quad (4.2a)$$

式中

$$a_{40} = EJ_{\omega_1}J_{p_1}/(J_{p_1} - J_{d_1}), \quad \alpha_4 = \sqrt[5]{\frac{J_{\omega_2}J_{p_2}J_{p_1} - J_{d_1}}{J_{\omega_1}J_{p_1}J_{p_2} - J_{d_2}}} - 1 \quad (4.2b, c)$$

系数 $a_2(z)$ 近似地表达为

$$a_2(z) = a_{20} \left[1 + \frac{\alpha_2}{L}z \right]^3 \quad (4.3a)$$

式中

$$a_{20} = GJ_{d_1}, \quad \alpha_2^3 = \sqrt[3]{J_{d_2}/J_{d_1}} - 1 \quad (4.3b, c)$$

对于回转半径 $r(z)$, 引入插值函数:

$$r(z) = r_1 \left[1 + \frac{\beta_2}{L}z \right] \quad (4.4a)$$

式中

$$\beta_2 = r_2/r_1 - 1 \quad (4.4b)$$

注意到(3.2)式, (4.1b)式中 $b(z)$ 的表达式成为

$$b(z) = r_1^2 \left[1 + \frac{\beta_2}{L}z \right]^2 \left[P_v + q_1z \left[1 + \frac{\beta}{2L}z \right] \right] \quad (4.5)$$

为书写简便,下文中仍用 $b(z)$ 来表示上式给出的 z 的多项式。在(4.2)到(4.5)式中,正如第3节所述,带附加下标 i ($i = 1, 2$) 的几何常数表示相应截面几何特性在柱端的值。

引入这些插值函数后,控制方程的近似表达式成为

$$a_{40} \left[1 + \frac{\alpha_4}{L}z \right]^5 \theta^{IV} - a_{20} \left[1 + \frac{\alpha_2}{L}z \right]^3 \theta'' + b(z)\theta'' = 0 \quad (4.6)$$

由于 θ 各阶导数的系数都是 z 的多项式,上述方程都能够用伽辽金法求得近似解。

对于立柱扭转屈曲,伽辽金法的主要思路是^[1]: 假定立柱失稳时扭转角为

$$\theta(z) = \sum_{i=1}^n C_i x_i(z) \quad (4.7)$$

式中, C_i 为待定系数, $x_i(z)$ 为满足位移边界条件的位移函数。由于假定的 $\theta(z)$ 不一定是准确解,将(4.7)式代入方程(4.6)其结果一般不等于零。用 δ_m 来表示这个结果,它称为换算荷载^[1]。此时,杆件内力与换算荷载 δ_m 处于随遇平衡状态。换算荷载 δ_m 在任意微小虚位移 θ_j 上做的功等于零。假定所选择的虚位移为

$$\theta_j = x_j(z) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

按虚位移原理,有

$$\int_0^L \delta_m x_j(z) dz = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.8)$$

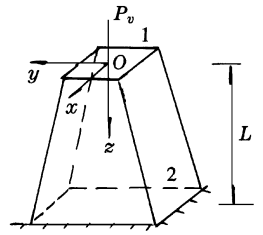


图 2

从数学上讲, 上式为关于待定系数 $C_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的线性齐次方程组。当且仅当 C_i 系数阵行列式的值等于零, 方程(4. 8) 有非零解。根据这个条件, 可求出扭转屈曲荷载的近似值。

如图 2 所示, 立柱的支承条件是上端自由, 下端固定。假定所设置的坐标系与柱顶截面一道转动。此时, 立柱的位移边界条件为 $\theta(0) = \dot{\theta}(L) = 0$ 。假定立柱失稳时扭转角为

$$\theta(z) = C_1 \sin az + C_2 \sin bz \tag{4. 9}$$

式中, 常数 a 和 b 与(3. 4) 式给出的相同。显然, 每个位移函数($\sin az$ 和 $\sin bz$) 都满足位移边界条件。将(4. 9) 式代入控制方程(4. 6), 可得换算荷载

$$\begin{aligned} \delta_n = & a 40 \left[1 + \frac{\alpha_4}{L} z^5 (C_1 a^4 \sin az + C_2 b^4 \sin bz) \right. \\ & + a 20 \left[1 + \frac{\alpha_4}{L} z^3 (C_1 a^2 \sin az + C_2 b^2 \sin bz) \right. \\ & \left. \left. - b(z) (C_1 a^2 \sin az + C_2 b^2 \sin bz) \right] \right] \end{aligned}$$

将上式分别乘以虚位移 $\sin az$ 和 $\sin bz$, 并在区间 $[0, L]$ 上积分, 令其结果为零, 可得线性齐次方程组

$$\begin{bmatrix} T_{11} + Q_{11} P_v & T_{12} + Q_{12} P_v \\ T_{21} + Q_{21} P_v & T_{22} + Q_{22} P_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4. 10}$$

式中

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} = & - \frac{r_1^2 a^2 L}{6 \beta_2} \left\{ [(1 + \beta_2)^3 - 1] + 6 \left[\frac{\beta_2}{\pi} (2 + \beta_2) \right] \right\} \\ Q_{21} = & \frac{1}{9} Q_{12} = \frac{r_1^2 \beta_2}{16 L} (8 + 5 \beta_2) \\ Q_{22} = & \frac{r_1^2 b^2 L}{6 \beta_2} \left\{ [(1 + \beta_2)^3 - 1] + 6 \left[\frac{\beta_2}{3 \pi} (2 + \beta_2) \right] \right\} \end{aligned} \right\} \tag{4. 11}$$

T_{ij} 为三项之和

$$T_{ij} = A_{ij} + B_{ij} + W_{ij} \quad (i = 1, 2; j = 1, 2) \tag{4. 12}$$

式中, A_{ij} 和 B_{ij} 分别与第一项和第二项的积分有关, 而 W_{ij} 是考虑结构自重的修正项。为使下文的表达式简单, 记

$$\left. \begin{aligned} \pi_2 = & \pi / \alpha_2, & \pi_4 = & \pi / \alpha_4 \\ d_2 = & 1 + \alpha_2, & d_4 = & 1 + \alpha_4 \\ \beta_2 = & \beta + \beta_2, & \beta_2 = & \beta + 4 \beta_2 \end{aligned} \right\} \tag{4. 13}$$

则(4. 12) 式中的常数可表达为

$$\left. \begin{aligned} A_{11} = & \frac{a 40 a^4 L}{\alpha_4} \left\{ \frac{1}{12} (d_4^6 - 1) + \frac{5}{2} \left[\frac{1}{\pi_4} \int \pi_4^4 (d_4^4 + 1) - 12 \pi_4^2 (d_4^2 + 1) + 48 \right] \right\} \\ A_{21} = & \frac{1}{81} A_{12} = - \frac{5 a 40 a^4 L}{8 \alpha_4} \left\{ \frac{1}{\pi_4} \int \pi_4^4 (5 d_4^4 + 3) - 3 \pi_4^2 (17 d_4^2 + 15) + 192 \right\} \\ A_{22} = & \frac{a 40 b^4 L}{\alpha_4} \left\{ \frac{1}{12} (d_4^6 - 1) + \frac{5}{2} \left[\frac{1}{3 \pi_4} \int \pi_4^4 (d_4^4 + 1) - 12 (3 \pi_4^2) (d_4^2 + 1) + 48 \right] \right\} \end{aligned} \right\} \tag{4. 14}$$

和

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= \frac{a_{20}a^2L}{2\alpha_2} \left\{ \frac{1}{4}(\text{移边 } 1) + 3 \left[\frac{1}{\pi_2^4} [\pi_2^2(d_2^2 + 1) - 4] \right] \right\} \\ B_{21} &= \frac{1}{9}B_{12} = \left(-\frac{3a_{20}a^2L}{8\alpha_2} \left[\frac{1}{\pi_2} \right]^4 [\pi_2^2(5d_2^2 + 3) - 16] \right) \\ B_{22} &= \frac{a_{20}b^2L}{2\alpha_2} \left\{ \frac{1}{4}(d_2^2 - 1) + 3 \left[\frac{1}{3\pi_2^4} [(3\pi_2)^2(d_2^2 + 1) - 4] \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

及

$$\left. \begin{aligned} W_{11} &= -\frac{q_1r_1^2}{8} \left\{ \frac{\beta\beta_2'}{5} \left[\frac{\pi^2}{2} - 10 \left(\frac{6}{\pi^2} - 1 \right) \right] + \beta_2\beta_2' \left[\frac{\pi^2}{4} - 3 \left(\frac{4}{\pi^2} - 1 \right) \right] \right\} \\ &\quad + \beta_2' \left\{ \frac{\pi^2}{6} + 1 + \left[\frac{\pi^2}{2} + 2 \right] \right\} \cdot P_v \\ W_{21} &= \frac{1}{9}W_{12} = \frac{q_1r_1^2}{32} \left\{ -\beta\beta_2' \left[\frac{51}{\pi^2} - 10 \right] - 3\beta_2\beta_2' \left[\frac{16}{\pi^2} - 5 \right] + 5\beta_2' + 8 \right\} \\ W_{22} &= -\frac{q_1r_1^2}{8} \left\{ \frac{\beta\beta_2'}{5} \left[\frac{9\pi^2}{2} - 10 \left(\frac{2}{3\pi^2} - 1 \right) \right] + \beta_2\beta_2' \left[\frac{9\pi^2}{4} - 3 \left(\frac{4}{9\pi^2} - 1 \right) \right] \right\} \\ &\quad + \beta_2' \left\{ \frac{3\pi^2}{2} + 1 + \left[\frac{9\pi^2}{2} + 2 \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

令线性齐次方程组(4.10)中 C_1, C_2 的系数行列式为零, 可得

$$AP_v^2 + BP_v + C = 0 \quad (4.17)$$

这是作用于柱顶集中荷载 P_v 的二次方程, 扭转屈曲荷载 P_ω 的近似值为上述方程的最小根

$$P_\omega = \min \left\{ \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right\} \quad (4.18)$$

在上述两式中,

$$\left. \begin{aligned} A &= Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21} \\ B &= (Q_{11}T_{22} + Q_{22}T_{11}) - (Q_{12}T_{21} + Q_{21}T_{12}) \\ C &= T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

等截面箱形薄壁立柱的扭转屈曲荷载有准确解。为了与准确解进行比较, 下面利用本文所给方法导出等截面柱扭转屈曲荷载的近似公式。

对于等截面杆, 根据(3.1c)、(4.2c)、(4.3c)和(4.4b)式, 有

$$\beta = \alpha_4 = \alpha_2 = \beta_2 = 0 \quad (4.20a)$$

若不记自重, 有

$$q_1 = 0 \quad (4.20b)$$

记

$$\left. \begin{aligned} r &= r_1, a_{20} = GJd \\ a_{40} &= EJ\omega J_p / (J_p - Jd) \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

将上述值代入(4.11)、(4.14)到(4.16)式, 若必要则计算其极限, 注意到(4.13)式, 便得

$$Q_{11} = \frac{1}{9}Q_{22} = -\frac{1}{2}r^2a^2L, A_{11} = \frac{1}{81}A_{22} = \frac{1}{2}a_{40}a^4L, B_{11} = \frac{1}{9}B_{22} = \frac{1}{2}a_{20}^2L \quad (4.22a)$$

$$Q_{ij} = A_{ij} = B_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (4.22b)$$

及

$$W_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2; j = 1, 2) \quad (4.22c)$$

将(4.22b、c)两式代入(4.12)式,注意到(4.22a)式左边的三个等式,(4.19)式简化为

$$\left. \begin{aligned} A &= 9Q_1^2 \\ B &= 18Q_{11}(5A_{11} + B_{11}) \\ C &= 9(A_{11} + B_{11})(9A_{11} + B_{11}) \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

临界荷载 P_ω 仍用(4.18)式计算。事实上,等截面杆仅仅是本文所讨论情况的特例。

§ 5. 算例及误差分析

1. 算例

考虑混凝土立柱,其欧拉屈曲边界条件如图1(a)所示,扭转屈曲边界条件如图2所示;其两端的截面示于图1(c)。取 $h_1 = h_2 = 2.4\text{m}$, $b_1 = 1.3\text{m}$, $b_2 = 2.5\text{m}$, $t = 0.1\text{m}$, $L = 60.1\text{m}$, $E = 3.0 \times 10^7 \text{kPa}$, $\mu = 1/6$, 单位体积重 $\gamma = 26\text{kN/m}^3$, 支承弹簧的刚度 $k = 1\text{kN/cm}$ 。用本文(3.8)式算得的欧拉屈曲荷载为 $P_y = 1.8021 \times 10^4 \text{kN}$, $P_x = 2.19318 \times 10^4 \text{kN}$ 。而用本文(4.18)式算得的扭转屈曲荷载为 $P_\omega = 7.36959 \times 10^7 \text{kN}$ 。三个屈曲荷载中最小的一个才是真实的屈曲荷载。因此,临界荷载为 $P_{cr} = P_y = 1.8021 \times 10^4 \text{kN}$ 。

有准确解的等直杆可看作本文所讨论问题的特例。由于几乎没见到这类问题精确解的表达式,下面主要同等截面情况进行比较,判断本文解的误差。

2 欧拉屈曲荷载解的比较

等截面杆两端截面尺寸相同。用去掉下标 i ($i = 1, 2$) 的同一符号来表示杆件相应的截面尺寸和几何特性以及有关物理量。但现在应取 EJ_x 和 EJ_y 中较小的一个为抗弯刚度 EJ , 以便求得较小的欧拉屈曲荷载。对于有准确解的等直杆,计算结果比较列入表1中。从该表看,本文的结果是相当精确的。

对于图2所示一端固定的立柱,文[5]给出了杆件抗弯刚度 $EJ(z)$ 随纵标 z 线性变化时的准确解。在算例中, $h_1 = h_2$, $EJ_y(z)$ 是 z 的线性函数。若令容重 $\gamma = 0$ 及上端支承弹簧刚度 $k = 0$, 计算条件便与文[5]的相同。本文的计算结果是 $P_x = 1.75513 \times 10^4 \text{kN}$, 而准确解为 $P_x = 1.68557 \times 10^4 \text{kN}$ 。误差仅4.1%, 满足土木工程对精度的要求。

3 扭转屈曲荷载解的比较

在算例中,立柱自重 $= 1.3438 \times 10^3 \text{kN}$, 小于扭转屈曲荷载 P_ω 的0.018%, 因此其影响可忽略不计。若不计自重,双对称闭口等截面薄壁立柱在轴心受压条件下的扭转屈曲荷载可写为^[1]

$$P_\omega = \frac{EJ_\omega \lambda^2 + GJ_d \nu}{r^2 t} \quad (5.1a)$$

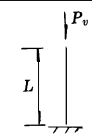
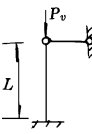
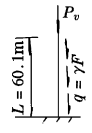
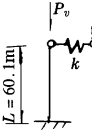
式中

$$\nu = 1 - J_d/J_p, \quad t = 1 + \frac{EJ_\omega \lambda^2}{GJ_p} \quad (5.1b, c)$$

对于一端自由,一端固定的立柱

$$\lambda = \frac{\pi}{2L} \quad (5.1d)$$

表 1 等直杆的准确解与本文结果比较表

序号	计算简图	计算条件*	准确解	本文结果	误差
①		上端自由, $k = 0, \gamma = 0$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4L^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4L^2}$	0.0%
②		上端简支, $k = \infty, \gamma = 0$	$P_{cr} = \frac{20.19EJ}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{20.23EJ}{L^2}$	0.2%
③		上端自由, $k = 0, \gamma = 26\text{kN/m}^3,$ $b = 1.3\text{m}, h = 2.4\text{m},$ $t = 0.1\text{m}$	$P_{cr} = 4704.5\text{kN}$	$P_{cr} = 4723.3\text{kN}$	0.44%
④		上端弹性支承, $k = 1\text{kN/cm}, \gamma = 0,$ 其余同 ③	$P_{cr} = 9856.4\text{kN}$	$P_{cr} = 9867.6\text{kN}$	0.11%

* (1) 立柱下端固定, 上端约束条件在表中给出; (2) 除③外, 其余均忽略自重

(5.1) 式的几何常数和物理常数与第 1 节的约定相同。

利用(5.1)式, 可算得当立柱截面高 $h = 2.4\text{m}$, 宽 $b = 1.3\text{m}$, 而其余常数与算例相同时, $P_{\omega_1} = 5.9327 \times 10^6\text{kN}$; 当 $h = 2.4\text{m}$, $b = 2.5\text{m}$ 时, $P_{\omega_2} = 9.4579 \times 10^6\text{kN}$ 。前者立柱截面与算例立柱的上端截面相同, 而后的与算例立柱的下端截面相同。算例的 P_{ω} 落入 P_{ω_1} 和 P_{ω_2} 之间, 且略小于 $0.5(P_{\omega_1} + P_{\omega_2}) [= 7.6953 \times 10^6\text{kN}]$, 说明本文算得的结果是合理的。

更进一步讲, 若取 $h = 2.4\text{m}$, $b = 1.3\text{m}$, 用(4.22)、(4.23)及(4.18)式算得的临界荷载为 $P_{\omega} = 5.9357 \times 10^6\text{kN}$ 。与 P_{ω_1} 相比, 其误差仅为 0.05%。说明本文给出的公式是相当精确的。

笔者还改变结构的几何尺寸和壁厚, 作了大量计算, 所得结果也是相当精确的。这表明本文所给公式和编制的程序都是正确的。因此, 本文的计算结果可作为论证变截面箱形薄壁立柱稳定性的依据之一。

§ 6. 结 语

变截面箱形薄壁立柱弯扭屈曲的三个控制方程是变系数的二阶或四阶常微分方程, 很难用解析的方法求解。本文用多项式来逼近截面的几何特性和有关物理量, 以及扭转屈曲控制微分方程的各个系数, 使控制方程变为可用近似方法求解的微分方程。然后用能量原理和伽辽金法分别导出了这种立柱的弯曲和扭转屈曲荷载的近似解析解, 并编制了相应的程序上机

计算。用具体数值算例验证了本文所给解答的正确性。其特点是:程序短且易于编制,运算时间极少而结果十分精确,但公式推导较繁。本文的计算结果为论证变截面箱形薄壁立柱的稳定性提供了依据。本文具有实用价值。

致谢 作者真诚地感谢四川省交通厅公路规划勘察设计院总工程师谢帮珠高级工程师对本文的大力支持。

参 考 文 献

- 1 包世华等,《薄壁杆件结构力学》,中国建筑工业出版社(1991)。
- 2 N. W. Murray, Introduction to the Theory of Thin Walled Structures, Oxford University (1984), 172—177.
- 3 交通部公路规划设计院主编,《公路桥涵设计规范》(合订本),人民交通出版,北京(1989), 118.
- 4 A. Gjelsvik, The Theory of Thin Walled Bars, John Wiley & Sons, Inc (1981), 185—189.
- 5 黎绍敏,《稳定理论》,人民交通出版社,北京(1989), 26—29, 44—45, 74—77.

The Approximate Analytical Solution for the Buckling Loads of a Thin Walled Box Column with Variable Cross-section

Xie Yongjiu Ning Qinghai

(Southwest Jiaotong University, Chendu 610031, P. R. China)

Chen Minglun

(Chongqing Jiaotong Institute, Chongqing 400016, P. R. China)

Abstract

For a thin walled box column with variable cross section, the three governing equations for torsional flexural buckling are ordinary differential equations of the second or fourth order with variable coefficients, so it is very difficult to solve them by means of an analytic method. In this paper, Polynomials are used to approximate the geometric properties of cross section and certain coefficients of the differential equations. Based on the energy principle and the Galerkin's method, the approximate formulas for calculating the flexural and torsional buckling loads of this kind of columns are developed respectively, and numerical examples are used to verify the correctness of the solutions obtained. The results calculated in this paper provide the basis for demonstrating the stability of thin walled box columns with variable cross section. This paper is of practical value.

Key words thin walled box column with variable cross section, torsional flexural buckling, approximate solutions for buckling loads