

分形插值曲面理论及其应用*

谢和平^① 孙洪泉^①

(1996 年 11 月 22 日收到, 1997 年 9 月 1 日收到修改稿)

摘 要

本文叙述了分形曲面的生成原理, 给出了分形插值曲面的计算公式, 证明了分形插值曲面迭代函数系唯一性定理, 导出了分形插值曲面的维数定理, 并应用实际数据进行了分形插值曲面的实例研究。

关键词 分形几何 高维分形 分形插值曲面 分形维数

中图分类号 O18

§ 1. 前 言

分形插值是美国数学家 M. F. Barnsley 于 1986 年首先提出的。它给出了拟合数据的一种新思想, 不仅为函数逼近论开辟了崭新的研究领域, 而且为计算机图形学提供了有力的工具。目前已充分显示出其强大的生命力。

从传统的欧氏几何、三角学及微积分教程中, 我们已经学会了如何用直线、多项式函数、曲面样条函数等来建立现实生活中各种实物的模型; 因此对于欧氏空间中的曲线和曲面的插值, 我们已经有了的一套成熟的理论和方法。对于分形几何而言, 许多文献^{[1]~[4]}已经对分形插值曲线作了详细的讨论。

然而, 分形曲面在自然界是大量存在的, 如山脉、地形、岩石、云团、材料断口表面形态等, 都是分形曲面的实例。在有关文献^{[4]~[9]}中可以见到分形曲面的随机生成方法的研究。分形曲面的随机生成, 可以给出在三维欧氏空间中优美的景观和非常逼真的景物。这为分形物体的直观描述和图形再现提供了有力的工具。但是, 这种随机分形曲面的生成方法, 不能产生通过已知点的分形曲面。因此, 用随机方法生成的分形曲面通常不能满足实际研究工作的需要。在实际工作中, 往往已知分形曲面上的部分信息(例如, 材料断口的某条迹线、断面上的某些特征), 需要通过这些部分信息和特征, 拟合出分形曲面的整体形态, 从而对分形体的整体进行研究。这就需要用到分形插值曲面的理论和方法。本文着重介绍分形插值曲面的原理、数学模型及插值方法。我们导出了分形插值曲面的计算公式, 证明了分形插值曲面迭代函数系唯一性定理和分形插值曲面的维数定理, 并应用实际数据进行了分形插值曲面的实例研究。从而为更好地研究材料断口形貌、地貌形态的分形特征提供了直观分析依据。

* 首届国家杰出青年科学基金和国家教委跨世纪人才专项基金资助项目

① 中国矿业大学北京研究生部分形力学研究所, 北京 100083

§ 2. 分形曲面的生成

2.1 Koch分形曲面

文献[6]给出 Koch 分形曲面的构造方法: 将 Koch 曲线沿着垂直于 Koch 曲线所在平面的方向, 平行移动一段距离 l_0 , 得到一个非规整曲面, 称这样的曲面为 Koch 分形曲面(见图 1)。

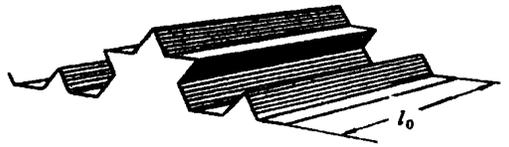


图 1 Koch分形曲面

为了测量该曲面的面积, 我们用边长(码尺) 为 δ 的小正方形来覆盖 Koch 分形曲面, 其面积为 $\delta^2 \cdot$ 于是, 共需

$$N(\delta) = \frac{l_0}{\delta} \times \frac{1}{\delta^D} \tag{2.1}$$

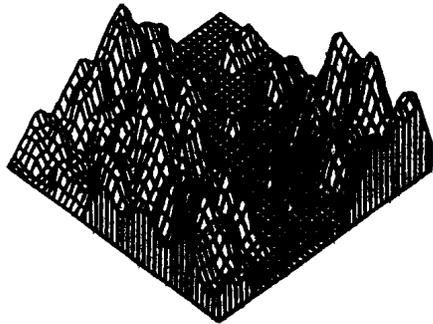


图 2 布朗分形曲面

个小片来覆盖 Koch 分形曲面。式中 $D = \lg 4 / \lg 3$ 是 Koch 曲线的分形维数。(2.1) 式中的第一个因子是沿 l_0 方向边长为 δ 的小正方形的个数, 第二个因子表示覆盖 Koch 曲线所用长为 δ 的小区间的个数。令 D 为 Koch 曲面的分形维数, 根据 B. B. Mandelbrot 理论^[7], 则

$$D = 1 + D = 2.2618 \tag{2.2}$$

2.2 面朗分形曲面的生成

对于 $0 < H < 1$, 我们定义一个指数为 H 的布朗分形函数 $Z_H(x, y)$, 它是 $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ 上的随机函数, 若满足:

(通常 $\{Z_H(0, 0) = 0\} = 1$, 且 $Z_H(x, y)$ 是 (x, y) 的连续函数;

(2) 对于 $(x, y), (\Delta x, \Delta y) \in \mathbf{R}^2$, 若增量 $\Delta Z_H(\Delta x, \Delta y) = Z_H(x + \Delta x, y + \Delta y) - Z_H(x, y)$ 服从均值为 0, 方差为 $|\Delta x^2 + \Delta y^2|^H$ 的正态分布, 即:

$$\Delta Z_H(\Delta x, \Delta y) \sim N(0, |\Delta x^2 + \Delta y^2|^H)$$

则称 $\{Z_H(x, y): x, y \in \mathbf{R}^2\}$ 是指数为 H 的布朗分形函数。

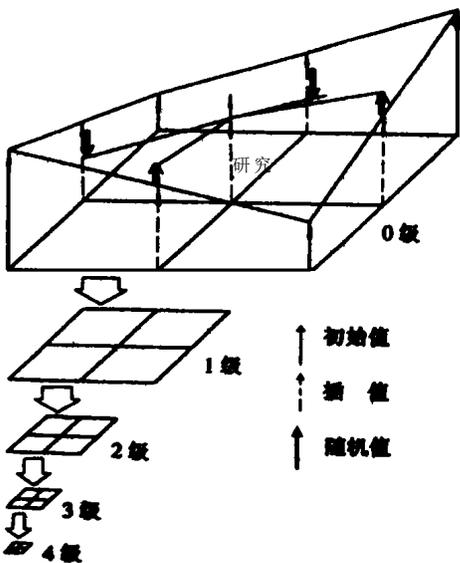


图 3 随机网格分形曲面的生成

图 2 为用计算机绘制的布朗分形曲面^[6]。由图中可看出, 分数布朗运动(FBM)的轨迹实际上与山脉十分相似, 故可用 FBM 的轨迹来产生分形地貌。而分形地貌高度的变化, 在估计山的高度时是一个重要的依据。

2.3 二维随机网络分形曲面的构造

文献[4]给出了二维随机网络分形曲面的生成的方法。此法用四边形(矩形)作为分形曲面生成元。通过对给出的角点数据进行线性插值, 同时加上随机扰动, 从而求出各边中点及面中心处的位移量。再对该四边形域进行分

割, 并重复以上过程.

其算法步骤如下^[4](见图 3):

- (1) 在矩形域的四个角点上, 给出各点的初始值(高度);
- (2) 用线性插值公式, 求出各边中点处位移量(高度值);
- (3) 在各中点的位移量上, 叠加一随机扰动值, 该扰动量沿铅垂方向(向上为正, 向下为负), 求出各点的位移量;
- (4) 再用线性插值法, 求出矩形域面心处的位移量, 即得该面中心的标高值.

用对分的方法将该矩形域一分为四, 重复以上(1)~(4)的过程, 得到每个小的四边形域(矩形)的各边中点及面心处的位移量(标高值), 即为 1 级递归. 2 级, 3 级, ..., n 级递归过程及计算方法与上类似.

§ 3. 分形插值曲面的建立

3.1 分形插值曲面原理

文献[9]已经讨论了分形插值曲面的方法, 本节详细推导并给出其结论.

令 $I = [a, b], J = [c, d]$; 设 $D = I \times J = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, 以 $\Delta x, \Delta y$ 为步长, 将 D 剖分为网格:

$$\left. \begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \\ c &= y_0 < y_1 < \dots < y_M = d \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

给定一组网格点上的数据 $\{(x_n, y_m, z_{n,m}), n = 0, 1, 2, \dots, N, m = 0, 1, 2, \dots, M\}$. 欲构造的插值函数 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, 且满足: $f(x_n, y_m) = z_{n,m}, n = 0, 1, 2, \dots, N, m = 0, 1, 2, \dots, M$.

我们在区域 $K = D \times [h_1, h_2]$ ($-\infty < h_1 < h_2 < +\infty$) 上进行讨论. 对 $(c_1, d_1, e_1), (c_2, d_2, e_2) \in K$, 取 $d((c_1, d_1, e_1), (c_2, d_2, e_2)) = \max\{|c_1 - c_2|, |d_1 - d_2|, |e_1 - e_2|\}$.

记 $I_n = [x_{n-1}, x_n], J_m = [y_{m-1}, y_m], D_{n,m} = I_n \times J_m, n \in \{1, 2, \dots, N\}, m \in \{1, 2, \dots, M\}$.

又令 $\phi_n: I \rightarrow I_n, \phi_m: J \rightarrow J_m$ 为压缩变换, 而且满足:

$$\left. \begin{aligned} \phi_n(x_0) &= x_{n-1}, \phi_n(x_N) = x_n \\ \phi_m(y_0) &= y_{m-1}, \phi_m(y_M) = y_m \\ |\phi_n(c_1) - \phi_n(c_2)| &< k_1 |c_1 - c_2| \\ |\phi_m(d_1) - \phi_m(d_2)| &< k_2 |d_1 - d_2| \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

其中 $c_1, c_2 \in I, d_1, d_2 \in J, 0 \leq k_1 < 1, 0 \leq k_2 < 1$

假定 $L_{n,m}: D \rightarrow \mathbf{R}^2$ 是压缩变换: $L_{n,m}(x, y) = (\phi_n(x), \phi_m(y)), F_{n,m}: D \rightarrow [h_1, h_2]$ 是连续的, 且满足:

$$\left. \begin{aligned} F_{n,m}(x_0, y_0, z_{0,0}) &= z_{n-1, m-1} \\ F_{n,m}(x_N, y_0, z_{N,0}) &= z_{n, m-1} \\ F_{n,m}(x_0, y_M, z_{0,M}) &= z_{n-1, m} \\ F_{n,m}(x_N, y_M, z_{N,M}) &= z_{n, m} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

对任意的 $(x_1, y_1; x_2, y_2) \in D; z_1, z_2 \in [h_1, h_2]$, 有

$$|F_{n,m}(x_1, y_1, z_1) - F_{n,m}(x_2, y_2, z_2)| \leq k_3 |z_1 - z_2|$$

$$n \in \{1, 2, \dots, N\}, m \in \{1, 2, \dots, M\}, 0 \leq k_3 < 1 \quad (3.4)$$

3.2 分形插值曲面迭代公式

令 $\phi_n(x) = a_n x + b_n$, 由条件(3.2) 第一式有 $a_n x_0 + b_n = x_{n-1}$, $a_n x_N + b_n = x_n$ 于是得到

$$a_n = (x_n - x_{n-1}) / (x_N - x_0), \quad b_n = (x_{n-1} x_N - x_n x_0) / (x_N - x_0) \quad (3.5)$$

$$\therefore \phi_n(x) = x_{n-1} + \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0} (x - x_0), \quad n \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (3.6)$$

令 $\phi_m(y) = c_m y + d_m$, 同理由条件(3.2) 第二式有

$$c_m = (y_m - y_{m-1}) / (y_M - y_0), \quad d_m = (y_{m-1} y_M - y_m y_0) / (y_M - y_0) \quad (3.7)$$

$$\phi_m(y) = y_{m-1} + \frac{y_m - y_{m-1}}{y_M - y_0} (y - y_0), \quad m \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (3.8)$$

令

$$F_{n,m}(x, y, z) = e_{n,m} x + f_{n,m} y + g_{n,m} x y + \alpha_{n,m} z + k_{n,m}, \quad n \in \{1, 2, \dots, N\}, m \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (3.9)$$

由条件(3.3) 式有

$$z_{n-1, m-1} = e_{n,m} x_0 + f_{n,m} y_0 + g_{n,m} x_0 y_0 + \alpha_{n,m} z_{0,0} + k_{n,m}$$

$$z_{n, m-1} = e_{n,m} x_N + f_{n,m} y_0 + g_{n,m} x_N y_0 + \alpha_{n,m} z_{N,0} + k_{n,m}$$

$$z_{n-1, m} = e_{n,m} x_0 + f_{n,m} y_M + g_{n,m} x_0 y_M + \alpha_{n,m} z_{0,M} + k_{n,m}$$

$$z_{n, m} = e_{n,m} x_N + f_{n,m} y_M + g_{n,m} x_N y_M + \alpha_{n,m} z_{N,M} + k_{n,m}$$

令 $\alpha_{n,m} (n \in \{1, 2, \dots, N\}, m \in \{1, 2, \dots, M\})$ 为自由参数, 且满足 $0 \leq \alpha_{n,m} < 1$, 称为垂直比例因子. 借助于插值数据和 $\alpha_{n,m}$, 解此联立方程组得:

$$\left. \begin{aligned} g_{n,m} &= \frac{z_{n-1, m-1} - z_{n-1, m} - z_{n, m-1} + z_{n, m} - \alpha_{n,m} (z_{0,0} - z_{N,0} - z_{0,M} + z_{N,M})}{x_0 y_0 - x_N y_0 - x_0 y_M + x_N y_M} \\ e_{n,m} &= \frac{z_{n-1, m-1} - z_{n, m-1} - \alpha_{n,m} (z_{0,0} - z_{N,0}) - g_{n,m} (x_0 y_0 - x_N y_0)}{x_0 - x_N} \\ f_{n,m} &= \frac{z_{n-1, m-1} - z_{n-1, m} - \alpha_{n,m} (z_{0,0} - z_{0,M}) - g_{n,m} (x_0 y_0 - x_0 y_M)}{y_0 - y_M} \\ k_{n,m} &= z_{n, m} - e_{n,m} x_N - f_{n,m} y_M - \alpha_{n,m} z_{N,M} - g_{n,m} x_N y_M \\ & \quad n \in \{1, 2, \dots, N\}, m \in \{1, 2, \dots, M\} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

现在我们定义一个新的函数 $G_{n,m}(x, y, z)$:

$$G_{n,m}(x, y, z) = \begin{cases} 0.5(F_{n,m}(x, y, z) + F_{n+1,m}(x_0, y, z)) & \text{当 } x = x_N; n = 1, 2, \dots, N-1; m = 1, 2, \dots, M \\ 0.5(F_{n,m}(x, y, z) + F_{n,m+1}(x, y_0, z)) & \text{当 } y = y_M; n = 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, M-1 \\ F_{n,m}(x, y, z) & \text{其它} \end{cases} \quad (n \in \{1, 2, \dots, N\}, m \in \{1, 2, \dots, M\}) \quad (3.11)$$

在区域 K 上我们定义迭代函数系(IFS) $W_{n,m}(x, y, z)$:

$$W_{n,m}(x, y, z) = (\phi_n(x), \phi_m(y), G_{n,m}(x, y, z)) \quad (n = 1, 2, \dots, N, m = 1, 2, \dots, M) \quad (3.12)$$

下面我们证明对于这样定义的 IFS, 存在唯一的吸引子 G

$$G = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\} \quad (3.13)$$

它是连续函数 f 的图象, 满足:

$$f(x_n, y_m) = z_{n,m}; \quad (n = 0, 1, \dots, N, m = 0, 1, \dots, M) \quad (3.14)$$

§ 4. 分形插值曲面存在唯一性定理

定理 1 设 N, M 为大于 1 的正整数, $\{R^3; W_{n,m}, n = 0, 1, \dots, N, m = 0, 1, \dots, M$ 表示上述定义的关于数据集 $\{(x_n, y_m, z_{n,m}), n = 0, 1, 2, \dots, N, m = 0, 1, 2, \dots, M$ 上的 IFS. 设 $\alpha_{n,m}$ 为垂直比例因子, 且 $0 \leq \alpha_{n,m} < 1$. 对于 $n = 0, 1, \dots, N, m = 0, 1, \dots, M$, 在 R^3 上存在度量 ρ , 等价于欧氏空间中的度量, 使得这个 IFS 关于 ρ 是压缩映射. 特别地, 存在唯一的非空紧集 $G \subset R^3$ 使得 $G = \bigcup_{n=1}^N \bigcup_{m=1}^M w_{n,m}(G)$.

证明 定义 R^3 上的度量 ρ 为:

$$\rho((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + \theta |z_1 - z_2|$$

θ 为正实数(在下面的证明过程中给出), 它等价于 R^3 上的欧氏度量. 对于

$$W_{n,m}(x, y, z) = (\phi_n(x), \phi_m(y), G_{n,m}(x, y, z)) \\ (n = 0, 1, \dots, N; m = 0, 1, \dots, M)$$

其中 $\phi_n(x) = a_n x + b_n, \phi_m(y) = c_m y + d_m$

$G_{n,m}(x, y, z)$ 由公式(3.11)定义.

为了简便起见, 我们仅就公式(3.11)中的“其它”情况进行证明. 对于另外两种情形, 用类似的方法可以得到相同的结果.

$$\begin{aligned} & \rho(W_{n,m}(x_1, y_1, z_1), W_{n,m}(x_2, y_2, z_2)) \\ &= \rho((\phi_n(x_1), \phi_m(y_1), G_{n,m}(x_1, y_1, z_1)), (\phi_n(x_2), \phi_m(y_2), G_{n,m}(x_2, y_2, z_2))) \\ &= \rho((\phi_n(x_1), \phi_m(y_1), F_{n,m}(x_1, y_1, z_1)), (\phi_n(x_2), \phi_m(y_2), F_{n,m}(x_2, y_2, z_2))) \\ &= \rho((a_n x_1 + b_n, c_m y_1 + d_m, e_n, m x_1 + f_n, m y_1 + g_n, m x_1 y_1 + \alpha_n, m z_1 + k_n, m), (a_n x_2 + b_n, c_m y_2 \\ &+ d_m, e_n, m x_2 + f_n, m y_2 + g_n, m x_2 y_2 + \alpha_n, m z_2 + k_n, m)) \\ &= |a_n| |x_1 - x_2| + |c_m| |y_1 - y_2| + \theta |e_n, m(x_1 - x_2) + f_n, m(y_1 - y_2) \\ &+ g_n, m(x_1 y_1 - x_2 y_2) + \alpha_n, m(z_1 - z_2)| \\ &\leq (|a_n| + \theta |e_n, m|) |x_1 - x_2| + (|c_m| + \theta |f_n, m|) |y_1 - y_2| \\ &+ \theta |g_n, m| |x_1(y_1 - y_2) + y_2(x_1 - x_2)| + \theta |\alpha_n, m| |z_1 - z_2| \\ &\leq (|a_n| + \theta(|e_n, m| + |g_n, m|)) |x_1 - x_2| + (|c_m| + \theta(|f_n, m| \\ &+ |g_n, m|)) |y_1 - y_2| + \theta |\alpha_n, m| |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

注意到 $|a_n| = |x_n - x_{n-1}| / |x_N - x_0| < 1$ 和 $|c_m| = |y_m - y_{m-1}| / |y_M - y_0| < 1$. 由于 $N \geq 2$ 和 $M \geq 2$, 取

$$\theta = \min\{\theta_1, \theta_2\}$$

$$\text{其中 } \theta_1 = \frac{\min_{1 \leq n \leq N} \{1 - |a_n|\}}{\max_{1 \leq n \leq N, 1 \leq m \leq M} \{2(|e_n, m| + |g_n, m|)\}}, \theta_2 = \frac{\min_{1 \leq m \leq M} \{1 - |c_m|\}}{\max_{1 \leq n \leq N, 1 \leq m \leq M} \{2(|f_n, m| + |g_n, m|)\}}$$

令

$$a = \frac{1}{2} + \frac{\max_{1 \leq n \leq N, 1 \leq m \leq M} \{|a_n|, |c_m|\}}{2} < 1, \quad \because |a_n| < 1, |c_m| < 1$$

$$\delta = \max_{1 \leq n \leq N, 1 \leq m \leq M} \{ | \alpha_{n,m} | \} < 1, \quad \alpha = \max_{1 \leq n \leq N, 1 \leq m \leq M} \{ a, \theta \} < 1$$

故有:

$$\begin{aligned} & \rho(W_{n,m}(x_1, y_1, z_1), W_{n,m}(x_2, y_2, z_2)) \\ & \leq a | x_1 - x_2 | + a | y_1 - y_2 | + \theta \delta | z_1 - z_2 | \\ & \leq \alpha (| x_1 - x_2 | + | y_1 - y_2 | + | z_1 - z_2 |) \\ & = \alpha \rho((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \end{aligned}$$

所以 $W_{n,m}(x, y, z)$ ($n = 0, 1, \dots, N, m = 0, 1, \dots, M$) 是压缩映。

由于 $W_{n,m}(x, y, z)$ 是压缩映, 根据迭代函数系理论^[2], 则存在唯一的非空集合 $G \subset \mathbf{R}^3$ 使得 $G = \bigcup_{n=1}^N \bigcup_{m=1}^M w_{n,m}(G)$ 。证毕。

定理 2 在定理 1 的条件下 G 是插值于数据集 $\{(x_n, y_m, z_{n,m}), n = 0, 1, 2, \dots, N, m = 0, 1, 2, \dots, M\}$ 的连续函数 $f: [x_0, x_N] \times [y_0, y_M] \rightarrow \mathbf{R}$ 的图象, 即

$$G = \{ (x, y, f(x, y)); (x, y) \in [x_0, x_N] \times [y_0, y_M] \}$$

证明 设 F 是使 $f(x_0, y_0) = z_{0,0}, f(x_0, y_M) = z_{0,M}, f(x_N, y_0) = z_{N,0}, f(x_N, y_M) = z_{N,M}$ 的连续函数 $f: [x_0, x_N] \times [y_0, y_M] \rightarrow \mathbf{R}$ 的集合, 定义 F 上的度量 ρ 为:

$$\rho(f, g) = \max_{(x, y) \in [x_0, x_N] \times [y_0, y_M]} \{ | f(x, y) - g(x, y) | \}$$

对所有的 $f, g \in F$ 成立, 易见 (F, ρ) 是一个完备的度量空间。

首先构造度量空间 (F, ρ) 上的一个压缩映射 $T: F \rightarrow F$, 然后证明 T 在 F 中的唯一的不动点即为所求的连续函数。

令实数 $a_n, b_n, c_m, d_m, e_n, f_n, g_n, h_n$ 和 k_n 分别由公式(3.5)、(3.7)和(3.10)所定义, 在度量空间 (F, ρ) 上定义映射 $T: F \rightarrow F$ 为:

$$\begin{aligned} (Tf)(x, y) &= e_{n,m} \phi_n^{-1}(x) + f_{n,m} \phi_m^{-1}(y) + g_{n,m} \phi_n^{-1}(x) \phi_m^{-1}(y) \\ &+ \alpha_{n,m} z + k_{n,m}, \quad \forall (x, y) \in [x_0, x_N] \times [y_0, y_M] \end{aligned}$$

由公式(3.6)、(3.8)可见 $\phi_n(x): [x_0, x_N] \rightarrow [x_{n-1}, x_n], \phi_m(y): [y_0, y_M] \rightarrow [y_{m-1}, y_m]$ 是可逆变换。

(I) T 将 F 映成自己

令 $f \in F$, 则 $(Tf)(x, y)$ 满足端点条件, 事实上

$$\begin{aligned} (Tf)(x_0, y_0) &= e_{1,1} \phi_1^{-1}(x_0) + f_{1,1} \phi_1^{-1}(y_0) + g_{1,1} \phi_1^{-1}(x_0) \phi_1^{-1}(y_0) \\ &+ \alpha_{1,1} f(\phi_1^{-1}(x_0), \phi_1^{-1}(y_0)) + k_{1,1} \\ &= e_{1,1} x_0 + f_{1,1} y_0 + g_{1,1} x_0 y_0 + \alpha_{1,1} f(x_0, y_0) + k_{1,1} \\ &= e_{1,1} x_0 + f_{1,1} y_0 + g_{1,1} x_0 y_0 + \alpha_{1,1} z_{0,0} + k_{1,1} \\ &= z_{0,0} \end{aligned}$$

同理可证: $(Tf)(x_0, y_M) = z_{0,M}, (Tf)(x_N, y_0) = z_{N,0}, (Tf)(x_N, y_M) = z_{N,M}$, 及 $(Tf)(x, y)$ 在区域 $[x_{n-1}, x_n] \times [y_{m-1}, y_m]$ 上连续, 亦即在点 (x_n, y_m) ($n = 1, 2, \dots, N, m = 1, 2, \dots, M$) 上 $(Tf)(x, y)$ 连续。故 T 将 F 映为 F 。

(II) T 为 $F \rightarrow F$ 的压缩映射

令 $f, g \in F, (x, y) \in [x_{n-1}, x_n] \times [y_{m-1}, y_m]$ ($n = 1, 2, \dots, N, m = 1, 2, \dots, M$)。那么

$$\begin{aligned} \rho(Tf, Tg) &= | (Tf)(x, y) - (Tg)(x, y) | \\ &= | \alpha_{n,m} | | f(\phi_n^{-1}(x), \phi_m^{-1}(y)) - g(\phi_n^{-1}(x), \phi_m^{-1}(y)) | \end{aligned}$$

$$\leq \alpha_{n,m} | \rho(f, g) |$$

令 $\delta = \max_{1 \leq n \leq N, 1 \leq m \leq M} \{ | \alpha_{n,m} | < 1 \}$ 则有 $\alpha \rho(Tf, Tg) \leq \delta \rho(f, g)$

故 T 为 $F \rightarrow F$ 的压缩映射, 由压缩映射原理知 T 在 F 中有唯一的不动点, 即存在 $f \in F$ 使

$$(Tf)(x, y) = f(x, y) \text{ 对一切 } (x, y) \in [x_0, x_N] \times [y_0, y_M]$$

再证若 $f \in F$, 则 Tf 是一关于数据集 $\{(x_n, y_m, z_{n,m}); n = 0, 1, 2, \dots, N, m = 0, 1, 2, \dots, M\}$ 的插值函数。

$\forall n \in \{1, 2, \dots, N\}, m \in \{1, 2, \dots, M\}$, 有

$$\begin{aligned} (Tf)(x_{n-1}, y_{m-1}) &= e_{n,m} \Phi_n^{-1}(x_{n-1}) + f_{n,m} \Phi_m^{-1}(y_{m-1}) \\ &+ g_{n,m} \Phi_n^{-1}(x_{n-1}) \Phi_m^{-1}(y_{m-1}) + \alpha_{n,m} f(\Phi_n^{-1}(x_{n-1}), \Phi_m^{-1}(y_{m-1})) + k_{n,m} \\ &= e_{n,m} x_0 + f_{n,m} y_0 + g_{n,m} x_0 y_0 + \alpha_{n,m} f(x_0, y_0) + k_{n,m} \\ &= e_{n,m} x_0 + f_{n,m} y_0 + g_{n,m} x_0 y_0 + \alpha_{n,m} z_{0,0} + k_{n,m} = z_{n-1, m-1} \end{aligned}$$

故 f 是数据集 $\{(x_n, y_m, z_{n,m}); n = 0, 1, 2, \dots, N, m = 0, 1, 2, \dots, M\}$ 上的插值函数。

最后, 令 G 为 f 的图象, 注意到定义 T 的公式可以改写成:

$$\begin{aligned} (Tf)(ax + by + d) &= e_{n,m} x + f_{n,m} y + g_{n,m} xy + \alpha_{n,m} f(x, y) + k_{n,m}, \\ (x, y) &\in [x_0, x_N] \times [y_0, y_M], n \in \{1, 2, \dots, N\}, m \in \{1, 2, \dots, M\} \end{aligned}$$

故有

$$w_{n,m} \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + d \\ e_{n,m} x + f_{n,m} y + g_{n,m} xy + \alpha_{n,m} f(x, y) + k_{n,m} \\ ax + by + d \\ c_m y + d_m \\ (Tf)(ax + by + d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + d \\ e_{n,m} x + f_{n,m} y + g_{n,m} xy + \alpha_{n,m} f(x, y) + k_{n,m} \\ ax + by + d \\ c_m y + d_m \\ f(ax + by + d) \end{pmatrix} \quad \text{义, 变}$$

当 (x, y) 在 $[x_0, x_N] \times [y_0, y_M]$ 上变动时, 此方程的右端便产生 $f(x, y)$ 的图象在 $[x_0, x_N] \times [y_0, y_M]$ 上的部分。这就意味着)

$$G = \bigcup_{n=1}^N \bigcup_{m=1}^M w_{n,m}(G)$$

由于 G 是 R^3 上的非空子集, 由定理 1, 存在唯一的非空紧集 G , 即上述 IFS 的吸引子, 且满足 $G = G \cdot$ 即 G 是插值函数 f 的图象

$$G = \left\{ (x, y, f(x, y)); (x, y) \in [x_0, x_N] \times [y_0, y_M] \right\} \quad \text{证毕}$$

定义 1 函数 $f(x, y)$ 的图象若是上述定理 1 及定理 2 所描述的吸引子, 则称 $f(x, y)$ 为数据集 $\{(x_n, y_m, z_{n,m}); n = 0, 1, 2, \dots, N, m = 0, 1, 2, \dots, M\}$ 上的分形曲面插值函数。

§ 5. 分形插值曲面的维数定理

引理 1^[8] 令 S_1 和 S_2 分别属于 E_1 和 E_2 空间, S 表示 E 空间中的集合, $E = E_1 \times E_2$, 且 S 为 S_1 和 S_2 的直积(如果 E_1, E_2 都是一维的欧氏空间, S 则由平面上的点集 (x, y) 组成, $x \in S_1, y \in S_2$) 如果 S_1 与 S_2 相互独立, 那么 S 的维数是 S_1 和 S_2 维数的和, 即:

$$D(S) = D(S_1) + D(S_2) \quad (5.1)$$

例如用 S_1 表示 Koch 曲线的集合, 其维数为 $D(S_1) = 1.2618 \cdot S_2$ 表示一维欧氏空间中长度为

l 的直线段, 它的维数为 $D(S_2) = 1$, 于是可得 Koch 曲面的维数 $D = D(S_1) + D(S_2) = 1 + 1.2618 = 2.2618$.

由 Koch 曲面的产生: 沿着垂直于 Koch 曲线所在平面的方向, 且沿着长为 l 的直线段进行平行移动, 这就是引理 1 中独立性的解释.

引理 2²¹ 设 m 是一个正整数, A, B 是欧氏空间 R^m 中的两个紧集, 假定 A 的分形维数由下式给出

$$D(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \tag{5.2}$$

令 $D(B)$, $D(A \cup B)$ 分别表示 B 和 $A \cup B$ 的分形维数. 如果 $D(B) \leq D(A)$, 则 $D(A \cup B) = D(A)$.

根据引理 1 和引理 2, 我们给出

定理 3 (分形插值曲面维数定理) 设 F 为数据集 $\{(x_n, y_m, z_{n,m}); n = 0, 1, 2, \dots, N, m = 0, 1, 2, \dots, M\}$ 上的分形插值曲面, P_x 代表垂直于 X 轴且与 X 轴交于 x 处 ($x_0 \leq x \leq x_N$) 的平面, P_y 代表垂直于 Y 轴且与 Y 轴交于 y 处 ($y_0 \leq y \leq y_M$) 的平面. 令 $S_x = F \cap P_x, S_y = F \cap P_y$, 则 F 的分形维数为

$$\dim_H(F) = D(F) = \max_{x_0 \leq x \leq x_N, y_0 \leq y \leq y_M} \{D(S_x), D(S_y) + 1\} \tag{5.3}$$

证明 根据 S_x 的定义, 我们知道 S_x 是平面曲线. 将 S_x 沿着垂直于平面 P_x 的方向上平移长为 ϵ_x 的线段, 所形成的集合(曲面) 设为 V_x 为显然 V_x 是 R^3 中的紧集. 令 $D(V_x)$ 和 $D(S_x)$ 分别表示 V_x 和 S_x 的分形维数, 根据引理 1 我们得到 $D(V_x) = D(S_x) + 1$.

由于 S_y 也是平面曲线, 用类似的方法, 可以将 S_y 沿着垂直于 P_y 的方向上平移长为 ϵ_y 的线段, 形成不规则曲面 V_y . 令 $D(V_y)$ 和 $D(S_y)$ 分别表示 V_y 和 S_y 的分形维数, 那么我们得到 $D(V_y) = D(S_y) + 1$.

根据 V_x 和 V_y 的构造可知:

$$F = \left[\bigcup_{x_0 \leq x \leq x_N} V_x \right] \cup \left[\bigcup_{y_0 \leq y \leq y_M} V_y \right] \tag{5.4}$$

令

$$D(S_x^*) = \max_{x_0 \leq x \leq x_N} \{D(S_x)\}, D(S_y^*) = \max_{y_0 \leq y \leq y_M} \{D(S_y)\} \tag{5.5}$$

不失一般性, 不妨假设 $D(S_x^*) \geq D(S_y^*)$, 则

$$D(V_x^*) = D(S_x^*) + 1 \geq D(V_x), \quad x \in [x_0, x_N] \tag{5.6}$$

$$D(V_y^*) = D(S_y^*) + 1 \geq D(V_y), \quad y \in [y_0, y_M] \tag{5.7}$$

这里 V_x^* 和 V_y^* 分别由 S_x^* 和 S_y^* 用上述方法经平移得到. 我们有

$$D(V_x^*) \geq D(V_y^*), \quad x \in [x_0, x_N], y \in [y_0, y_M] \tag{5.8}$$

由引理 2 可得:

$$\text{部分 } D(F) = D\left(\left[\bigcup_{x_0 \leq x \leq x_N} V_x\right] \cup \left[\bigcup_{y_0 \leq y \leq y_M} V_y\right]\right) \quad \text{象在 } G$$

(I) 若 $D\left[\bigcup_{x_0 \leq x \leq x_N} V_x\right] \geq D\left[\bigcup_{y_0 \leq y \leq y_M} V_y\right]$, 则 G

$$D(F) = D\left[\bigcup_{x_0 \leq x \leq x_N} V_x\right] = D(V_x^*) = D(S_x^*) + 1 \tag{5.9}$$

(II) 若 $D\left[\bigcup_{y_0 \leq y \leq y_M} V_y\right] \geq D\left[\bigcup_{x_0 \leq x \leq x_N} V_x\right]$, 则 为数

$$D(F) = D\left[\bigcup_{y_0 \leq y \leq y_M} V_y\right] = D(V_y^*) = D(S_y^*) + 1 \quad \text{理} \tag{5.10}$$

综合公式(5.9)、(5.10), 可得:

$$D(F) = \max_{x_0 \leq x \leq x_N, y_0 \leq y \leq y_M} \{D(S_x), D(S_y)\} \text{ 面的} \quad \text{证毕}$$

注意 定理3的结论是在引理1和引理2的基础上推导出来的, 而这两个引理的结论又是以豪斯道夫维数(5.2)为前提的, 所以, 公式(5.3)求得的分形插值曲面维数是豪斯道夫维数

定理3的实际意义在于, 欲求分形插值曲面的分形维数, 只要求出分形曲线 S_x^* 和 S_y^* 上的分形维数, 运用公式(5.3)即可求得。而分形插值曲面的分形维数的计算公式, 在文献[2]已有结论。

§ 6. 研究实例

现根据一组数据进行分形插值。插值区域的 X 方向、 Y 方向各有4个数据。即原始插值数据集为 $(x_n, y_m, z_n, m) (n = 0, 1, \dots, 3; m = 0, 1, \dots, 3)$ (见表1)。

表1 分形插值曲面原始数据

	0	100	200	300
0	1	4	6	2
100	2	1	3	6
200	5	0	4	3
300	3	6	3	4

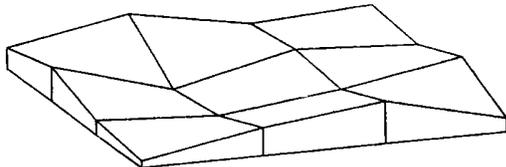
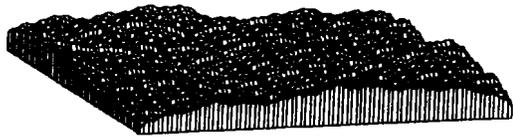


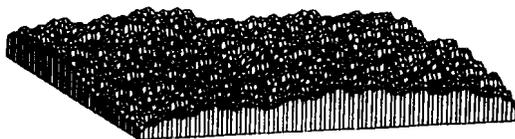
图4 原始数据点绘出的曲面

图4为用原始数据点绘出的曲面, 视倾角为 40° , 视方位角为 340° 。

图5为运用公式(3.9)对表1中的原始数据进行插值的分形插值曲面。其分形插值曲面的维数由公式(5.3)进行估计。图5(a)的分形维数为2.2675, 图5(b)的分形维数为2.5222。显然, 运用同一组原始数据, 根据不同的分形维数, 可以插出不同形态、不同粗糙度的分形曲面。



(a) 分形维数 $D = 2.2675$



(b) 分形维数 $D = 2.5222$

图5 用表1中的原始数据插出的分形插值曲面

§ 7. 结 论

1. 运用少量数据值, 根据分形理论, 插出分形曲面, 并使得插出的分形曲面通过已知的插值数值点, 这对于研究一些复杂的几何形态的物体, 例如, 地形地貌、断层表面、材料裂隙表面的模拟研究和直观显示, 具有重要的意义。

2. 本文讨论了分形插值曲面的插值函数, 得出了分形插值曲面的迭代函数系及有关计算公式, 并证明了分形插值曲面的存在性和唯一性定理, 导出了分形插值曲面的维数定理, 为分形插值曲面的研究和应用奠定了理论基础。

3. 分形插值曲面计算公式(3.9)中 $\alpha_{n,m}$ 是反映分形插值曲面复杂程度的重要参数。运用同一组插值数据,选择不同的 $\alpha_{n,m}$ 值,可以插出不同的分形维数、不同形态、不同粗糙度的分形曲面。
- 对于这方面的进一步研究,将另文阐述。

参 考 文 献

- 1 M. F. Barnsley and S. G. Demko, Iterated function systems and the global construction of fractals, Proc. of the Royal Soc. London, **A399** (1986), 243—275.
- 2 M. F. Barnsley, Fractal Everywhere, Academic Press, Orlando, FL. (1988), 172—247.
- 3 曾文曲、王向阳等,《分形理论与分形的计算机模拟》,东北大学出版社(1993), 74—105.
- 4 胡瑞安、胡纪阳、徐树公,《分形的计算机图象及其应用》,中国铁道出版社(1995), 61—85.
- 5 宋万寿、杨晋吉,一种地表造型方法,小型微型计算机系统, **17**(3) (1996), 32—36.
- 6 Xie Heping, Fractals in Rock Mechanics, A. A. Balkema Publishers, Netherlands (1993), 70—78.
- 7 B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman, New York (1982), 361—366.
- 8 J. Feder, Fractals, Plenum Press, New York (1988), 212—228.
- 9 齐东旭,《分形及其计算机生成》,科学出版社(1994), 70—72.

The Theory of Fractal Interpolated Surface and Its Applications

Xie Heping Sun Hongquan

(Institute of Fractal Mechanics, Beijing Graduate School, China University of
Mining and Technology, Beijing 100083, P. R. China)

Abstract

In this paper, the principle of construction of a fractal surface is introduced, interpolation functions for a fractal interpolated surface are discussed, the theorem of the uniqueness of an iterated function system of fractal interpolated surface is proved, the theorem of fractal dimension of fractal interpolated surface is derived, and the case that practical data are used to interpolate fractal surface is studied.

Key words fractal geometry, higher dimension fractals, fractal interpolated surface, fractal dimension