

地下结构和岩土介质弹塑性耦合 分析的摄动半解析法*

吕安军^① 曹志远^①

(吴家龙推荐, 1996 年 4 月 17 日收到, 1997 年 9 月 5 日收到修改稿)

摘 要

本文研究了一个用于物理非线性相互作用分析的有效数值方法。结构和介质耦合分析的弹塑性问题可用摄动法转化为几个线性问题, 然后对相应的线性问题分别用有限条和有限层法分析地下结构和岩土介质以达到简化计算的目的。这种方法用了两次半解析技术——摄动和半解析解函数——将三维非线性耦合问题化为一维的数值问题。此外, 本法是半解析法结合解析的摄动法应用于非线性问题的新进展, 同时也是近年来发展的摄动数值法的一个分支。

关键词 摄动 半解析法 弹塑性 耦合

中图分类号 TU311

§ 1. 引 言

土木工程中越来越多地用到弹塑性分析, Mohr-Coulomb 屈服条件常用于研究岩土介质的破坏情况, 而摄动法最初用于天体力学的研究, 以后用于固体力学进行的物理和几何非线性分析^{[1]、[2]}。

对于大型问题, 一般的数值方法难以适应复杂的计算, 而半解析法却能做得很好, 在一、两个方向使用半解析函数能极大地减少离散单元数目。现在已有多种半解析法, 如 SEM, SBM 及样条半解析法等^[3]。

§ 2. 基本理论

(1) 三维弹塑性问题的摄动方程

根据塑性变形理论, 应力和应变的关系可表示为:

$$S_{ij} = \frac{S}{\Gamma} e_{ij} \quad (2.1)$$

此处 S_{ij} 和 e_{ij} 是应力和应变偏量的分量, 进一步, 应力强度 S 可写为应变强度 Γ 的关系式:

$$S = A_1 \Gamma + A_2 \Gamma^2 + A_3 \Gamma^3 + \dots \quad (2.2)$$

* 固体力学开放研究实验室项目

① 同济大学工程力学与技术系, 上海 200092

大多数岩土介质服从 Mohr-Coulomb 屈服条件。对于理想的弹塑性材料, 根据单向拉伸的应力、应变关系:

$$\sigma_x = \begin{cases} E_0 \varepsilon_x & (\varepsilon \leq \varepsilon_s) \\ \alpha = \frac{2C \cos \phi}{3K(1 - \sin \phi)} & (\varepsilon > \varepsilon_s) \end{cases} \quad (2.3)$$

$A_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ 可用拟合法确定 (图 1)。此处 C 是粘聚强度, ϕ 是摩擦角, $3K = E/(1 - 2\nu)$ 。

取无量纲的外荷载参数 (Q 是荷载特征值)

$$e_0 = Q/3K \quad (2.4)$$

展开位移、应变偏量、应变及体应变:

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \sum_{k=1}^{\infty} u_i^{(k)} e_0^k, & e_{ij} &= \sum_{k=1}^{\infty} e_{ij}^{(k)} e_0^k \\ \varepsilon_j &= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_j^{(k)} e_0^k, & \varepsilon_m &= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_m^{(k)} e_0^k \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

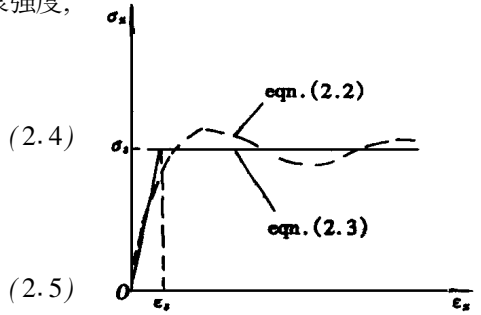


图 1

则应变强度为:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sqrt{e_{ij} e_{ij}} = \sqrt{\sum_{m=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{m-1} e_{ij}^{(k)} e_{ij}^{(m-k)} \right)} e_0^m = \sqrt{\sum_{m=2}^{\infty} \Lambda_2^{(m)} e_0^m} \\ &= \sqrt{\Lambda_2^{(2)}} e_0 + \frac{1}{2} \frac{\Lambda_2^{(3)}}{\sqrt{\Lambda_2^{(2)}}} e_0^2 + \frac{e_0^3}{2 \sqrt{\Lambda_2^{(2)}}} \left(\Lambda_2^{(4)} - \frac{1}{4} (\Lambda_2^{(3)})^2 / \Lambda_2^{(2)} \right) + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_0^i \end{aligned} \quad (2.6a)$$

这样, 我们得到:

$$\Gamma^{2n} = \sum_{m=2n}^{\infty} \Lambda_{2n}^{(m)} e_0^m, \quad \Lambda_{2n}^{(m)} = \sum_{k=2n-2}^{m-2} \Lambda_{2n-2}^{(k)} \Lambda_2^{(m-k)} \quad (2.6b)$$

将表达式 (2.6) 代入方程 (2.2), 可得下面的公式:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{S}{\Gamma} = A_1 + (A_2 \beta_1) e_0 + (A_3 \beta_2 + A_2 \Lambda_2^{(2)}) e_0^2 + (A_2 \beta_3 + A_3 \Lambda_2^{(3)} \\ &+ A_4 \Lambda_2^{(2)} \beta_1) e_0^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} A_i' e_0^i = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{(i)} e_0^i \end{aligned} \quad (2.7)$$

将方程 (2.5)、(2.7) 代入方程 (2.1), 可得应力表达式:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= S_{ij} + \alpha_m \delta_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\varphi^{(0)} e_{ij}^{(m)} + \varepsilon_m^{(m)} \delta_{ij} + \sum_{k=2}^m (\varphi^{(k-1)} e_{ij}^{(m-k+1)}) \right] e_0^m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{ij}^m e_0^m \end{aligned} \quad (2.8a)$$

$$\sigma_{ij}^{(m)} = (\sigma_e^{(m)})_{ij} + (\sigma_n^{(m)})_{ij} \quad (2.8b)$$

上式第一项与第 m 级摄动的应变分量线性相关, 第二项可在第 m 级摄动时得到。因此物理关系可在任意阶摄动时线性化。

类似地, 外荷载 (面力或体力) 可表示为:

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)} e_0^k, \quad G = \sum_{k=1}^{\infty} G^{(k)} e_0^k \quad (2.9a)$$

由方程(2.4), 显然可得:

$$F^{(2)} = F^{(3)} = \dots = G^{(2)} = G^{(3)} = \dots = 0 \quad (2.9b)$$

(2) 摄动数值法中的变分原理

将以上的摄动表达式(2.5), (2.8a), (2.9a) 代入泛函的变分:

展开

$$\delta\pi = \int_V \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{ij}^{(m)} e_0^m \delta \varepsilon_{ij}^{(n)} e_0^n dV - \int_{\Omega} \left[\sum_{m=1}^{\infty} F^{(m)} e_0^m \right] \delta u_i^{(n)} e_0^n d\Omega - \int_V \left[\sum_{m=1}^{\infty} G^{(m)} e_0^m \right] \delta u_i^{(n)} e_0^n dV = 0 \quad (2.10a)$$

可得第 m 级摄动变分方程:

$$\int_V \sigma_{ij}^{(m)} \delta \varepsilon_j^{(n)} dV - \int_{\Omega} F^{(m)} \delta u_i^{(n)} d\Omega - \int_V G^{(m)} \delta u_i^{(n)} dV = 0 \quad (2.10b)$$

根据公式(2.8)和(2.10)及一般的应变—位移关系, 数值计算能分步进行, 类似于标准的有限元法。下面, 以上的摄动方程将被用于半解析单元法间的耦合分析。

(3) 有限条—有限层耦合法用于地下结构的相互作用分析

地下结构和周围的层介质可划分为一系列水平层(图2), 对其中的结构和介质分别用有限条法和有限层法分析, 并在界面上满足连续条件。实际步骤如下所述。

以 FSM 表示的结构位移公式如下:

$$\{u_s\} = [u_s \quad v_s \quad w_s]^T = [N]_s \{\delta_s\} \quad (2.11a)$$

因为 $\{u_s\}$ 和 $\{\delta_s\}$ 的分量分别位于局部和整体标系, 在 $[N]_s$ 中引入变换关系。

以有限层单元表示的位移表达式如下:

$$\{u\}_R = [u_R = v_R \quad w_R]^T = [N_R] \{\delta_R\} \quad (2.11b)$$

在有限条的结线 (x_k, z_k) , 同一方向的条、层位移的关系

可以给出:

$$\left. \begin{aligned} u_{sk} &= u_R(x_k, z_k), \quad v_{sk} = v_R(x_k, z_k) \\ w_{sk} &= w_R(x_k, z_k) \end{aligned} \right\} \quad (2.12a)$$

因此, 两种类型单元的一般化的位移参数可联系为:

$$\{\delta_s\} = [L] \{\delta_R\} \quad (2.12b)$$

将此关系代入方程(2.11a), 有限条的位移、应变矩阵可用有限层的自由度表示为:

$$\{u\}_s = [N]_s [L] \{\delta_R\} \quad (2.13a)$$

和

$$\{\varepsilon\}_s = [B]_s [\delta_s] = [B]_s [L] \{\delta_R\} \quad (2.13b)$$

从标准的有限层法可得以下公式:

$$\{u\}_R = [N]_R \{\delta_R\}, \quad \{\varepsilon\}_R = [B]_R \{\delta_R\} \quad (2.14)$$

有限条和有限层在每一级摄动时的应力、应变关系可以由方程(2.8)直接得到, 并可用矩阵形式重新写出。

以上的结构和介质的位移、应变、应力矢量将与 $\{\delta_R\}$ 相关, 将他们代入摄动变分方程(2.10b), 给出线性数值方程。

(4) 算例

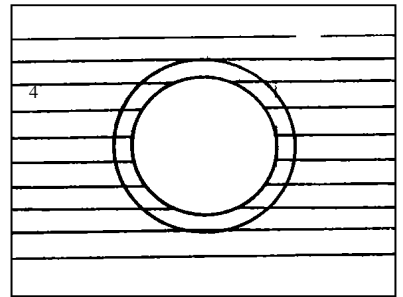


图 2

〈1〉层状地基的沉降

$$E = 2.07 \times 10^8 \text{N/m}^2, C' = 6.9 \times 10^4 \text{N/m}^2, \nu = 0.3, \phi = 20^\circ$$

采用 Mohr-Coulomb 准则, w 是中点沉降(图 3, 4)。

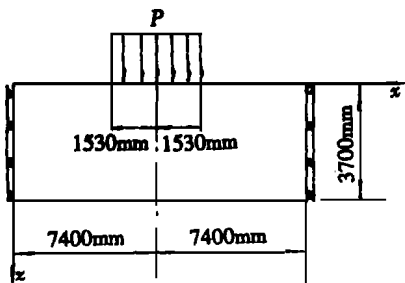


图 3

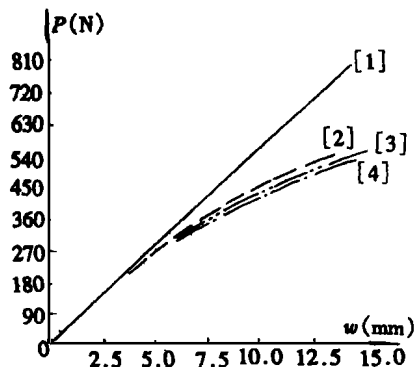


图 4

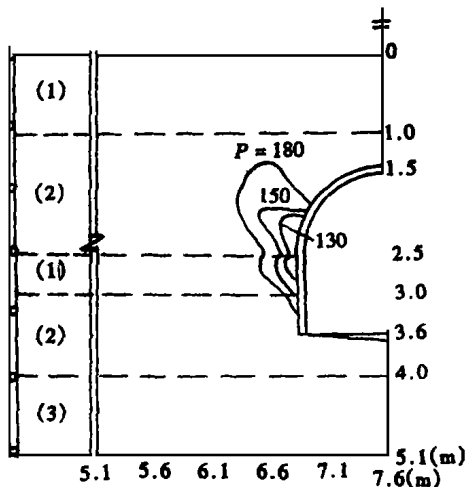


图 5

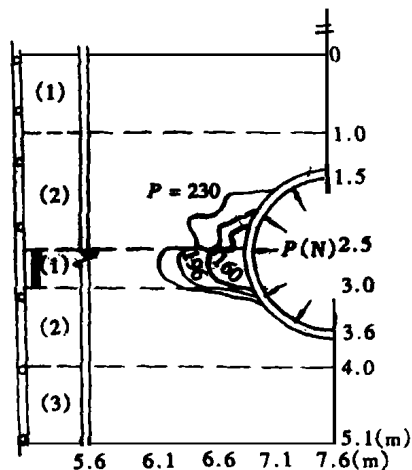


图 6

图 4 中, [1] 为弹性解, [2] 为有限元解, [3] 为边界元解^[4], [4] 为本文方法的解。而在本文方法中, 摄动次数仅为二次, 计算结果与已有限元解及边界元解很接近, 由此可见摄动法的可行性。

〈2〉分层介质中直墙拱顶隧道受地表压力作用。荷载情况、边界条件同上例。

(1) $C = 6.9 \times 10^4 \text{N/m}^2, \phi = 20^\circ, \nu = 0.231, E = 2.07 \times 10^8 \text{N/m}^2;$

(2) $C = 1.1 \times 10^5 \text{N/m}^2, \phi = 22^\circ, \nu = 0.220, E = 3.45 \times 10^8 \text{N/m}^2;$

(3) $C = 1.38 \times 10^5 \text{N/m}^2, \phi = 20^\circ, \nu = 0.200, E = 4.14 \times 10^8 \text{N/m}^2.$

塑性区的扩展情况如图 5 所示。由图 5 可见, 塑性区随荷载的增大而扩展, 并在隧道底部出现了小的塑性区域。在薄弱土层, 塑性区明显外凸。

〈3〉分层介质中圆形隧道受内压作用。荷载情况见图 6。边界条件及岩土介质参数同上例。在图 6 中可见, 随内压增大, 塑性区也在扩展, 并在薄弱土层向外凸出。

§ 3. 结 论

从以上的分析及算例可知,在微机上实施摄动半解析法来降低方程组的阶数并迅速完成复杂问题的非线性分析是可行的。

参 考 文 献

- 1 魏悦广,用摄动法计算椭圆形巷道的弹塑性问题,工程力学,7(2) (1990),93—102.
- 2 谢志成、王瑞五、杨学忠、钱振东,在材料非线性问题中的摄动有限元法,应用数学和力学,4(1) (1983),123—134.
- 3 曹志远,解析与数值结合法的发展,《第一届全国解析与数值结合法会议论文集》,长沙 (1990),1—5.
- 4 C. A. 布雷拜, S. 沃克,《边界法的工程应用》,龙述尧等译,陕西科学技术出版社 (1980),118—207.

Elasto_Plastic Coupled Analysis of Buried Structure and Soil Medium by Perturbational Semi_Analytic Method

L Anjun Cao Zhiyuan

(Department of Engineering Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, P.R. China)

Abstract

In this paper, an effective numerical method for the physically nonlinear interaction analysis is studied, in which the elasto_plastic problem of the coupled analysis between the structure and medium may be transformed into several linear problems by means of the perturbation technique, then, the finite strip method and finite layer method are used to analyse the underground structure and rock medium, respectively, for their corresponding linear problems, so the purpose of simplifying the calculation can be achieved. This kind of method has made use of the twice semi_analytical technique: the perturbation and semi_analytic solution function to simplify 3_D nonlinear coupled problem into 1_D linear numerical one. In addition, this method is a new advance of semi_analytical method in the application to nonlinear problems by means of combining with the analytical perturbation method, and it is also a branch of the perturbational numerical method developed in last years.

Key words: perturbation, semi_analytic method, elasto_plasticity, coupling