

文章编号: 1000-0887(2004) 02-0135-06

矩形弹性夹杂与裂纹相互 干扰的边界元分析*

王银邦

(中国海洋大学 工程学院, 青岛 266071)

(本刊编委王银邦来稿)

摘要: 使用边界元法研究了无限弹性体中矩形弹性夹杂对曲折裂纹的影响, 导出了新的复边界积分方程。通过引入与界面位移密度和面力有关的未知复函数 $H(t)$, 并使用分部积分技巧, 使得夹杂和基体界面处的面力连续性条件自动满足, 而边界积分方程减少为 2 个, 且只具有 $1/r$ 阶奇异性。为了检验该边界元法的正确性和有效性, 对典型问题进行了数值计算。所得结果表明: 裂纹的应力强度因子随着夹杂弹性模量的增大而减小, 软夹杂有利于裂纹的扩展, 而刚性较大的夹杂对裂纹有抑制作用。

关键词: 曲折裂纹; 矩形弹性夹杂; 边界元; 应力强度因子

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A

引 言

边界元法可有效地解决裂纹与孔洞相互干扰的二维断裂力学问题^[1~4]和三维裂纹分析^[5~8]。对于弹性夹杂和裂纹问题, 夹杂和基体界面的传统边界积分方程中具有未知函数多、奇异性强等缺点, 应研究更有效、简洁的边界元方法。本文在作者和 Chau^[1~4]关于二维断裂力学边界元法已有工作的基础上, 研究无限弹性体中矩形弹性夹杂和曲折裂纹问题的边界元法, 并对典型问题进行了数值计算, 所得结果表明: 裂纹的应力强度因子随着夹杂弹性模量的增大而减小, 软夹杂有利于裂纹的扩展, 而刚性较大的夹杂对裂纹有抑制作用。

1 基本公式

考虑图 1 所示带有一个曲折裂纹 Γ 和一个矩形弹性夹杂 Ω_1 的二维无限弹性体 Ω_0 , 假定基体 Ω_0 和夹杂 Ω_1 在界面 L 处理想粘接, 并以逆时针方向为正。基体和夹杂的剪切弹性模量分别为 G_0 和 G_1 , 泊松比分别为 ν_0 和 ν_1 。当无穷远处作用均匀应力 $\sigma_{ij}(\infty) = \sigma_{ij}^\infty$ 且无体积力时, 利用 Chau 和作者^[3]关于无夹杂裂纹问题的结果, 可得本问题的如下边界积分公式(证明另文给出):

$$\begin{cases} \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \end{cases} \quad (z = x_1 + ix_2 \in \Omega_0 \cup \Omega_1, i = \sqrt{-1}), \quad (1)$$

* 收稿日期: 2002_05_19; 修订日期: 2003_09_05

作者简介: 王银邦(1956—), 男, 甘肃人, 教授, 博士

(Tel: 86_532_5901684; Fax: 86_532_5901949; E_mail: wangyibouc@sina.com).

$$2G(z) \frac{\partial}{\partial s}(u_1 + iu_2) = [\kappa(z) \Phi(z) - \overline{\Phi(z)}] e^{i\alpha} - [z \overline{\Phi(z)} + \overline{\Psi(z)}] e^{-i\alpha} \quad (z \in \Omega_0 \cup \Omega_1), \quad (2)$$

$$\sigma_n + i\sigma_{ns} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + [z \overline{\Phi(z)} + \overline{\Psi(z)}] e^{-2i\alpha} \quad (z \in \Omega_0 \cup \Omega_1), \quad (3)$$

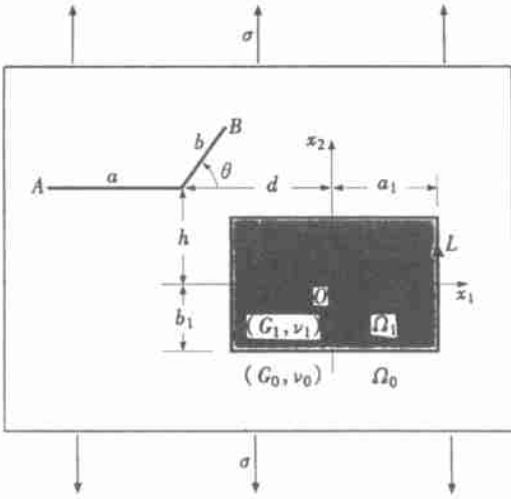


图1 带有矩形夹杂和曲折裂纹的无限弹性体

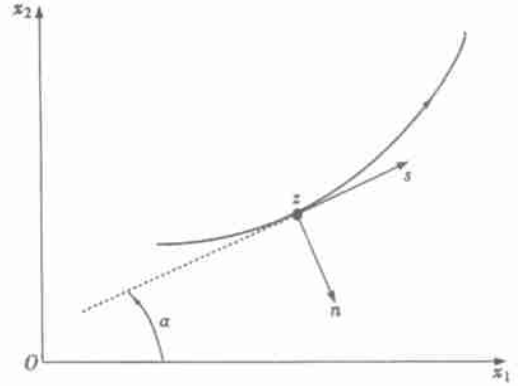


图2 曲线上的局部坐标系 (n, s)

其中

$$\Phi(z) = \frac{1}{4}(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+ \Gamma} \frac{H(t) dt}{t-z}, \quad (4)$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} + 2i\sigma_{12}^{\infty}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+ \Gamma} \left[\frac{\overline{H(t)} - \overline{Q(t)}}{t-z} e^{-2i\alpha(t)} + \frac{\overline{H(t)}}{(t-z)^2} \right] dt, \quad (5)$$

$$\begin{cases} H(t) = \frac{1}{\kappa_0 + 1} [q(t) + 2G_0 w(t)] & (t = y_1 + iy_2 \in \Gamma), \\ H(t) = \left[\frac{1}{\kappa_1 + 1} - \frac{1}{\kappa_0 + 1} \right] q(t) + \left[\frac{2G_1}{\kappa_1 + 1} - \frac{2G_0}{\kappa_0 + 1} \right] w(t) & (t \in L), \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} w(t) = e^{-i\alpha(t)} \frac{\partial}{\partial s(t)} [u_1(t) + iu_2(t)] & (t \in L), \\ w(t) = e^{-i\alpha(t)} \frac{\partial}{\partial s(t)} \left\{ [u_1(t^+) - u_1(t^-)] + i[u_2(t^+) - u_2(t^-)] \right\} & (t \in \Gamma), \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} q(t) = \sigma_n(t) + i\sigma_{ns}(t) & (t \in L), \\ q(t) = [\sigma_n(t^+) - \sigma_n(t^-)] + i[\sigma_{ns}(t^+) - \sigma_{ns}(t^-)] & (t \in \Gamma), \end{cases} \quad (8)$$

$$Q(t) = q(t) \quad (\text{对于 } t \in \Gamma), \text{ 而 } Q(t) = 0 \quad (\text{对于 } t \in L), \quad (9)$$

$$\begin{cases} G(z) = G_0, \kappa(z) = \kappa_0 & (\text{对于 } z \in \Omega_0 \cup \Gamma \cup L^-), \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} G(z) = G_1, \kappa(z) = \kappa_1 & (\text{对于 } z \in \Omega_1 \cup L^+), \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \kappa_m = 3 - 4\nu_m & (\text{平面应变}) \\ \kappa_m = (3 - \nu_m)/(1 + \nu_m) & (\text{平面应力}) \end{cases} \quad (m = 0, 1). \quad (11)$$

u_j 和 σ_j ($i, j = 1, 2$) 分别是直角坐标系 Ox_1x_2 中的位移分量和应力分量。 (n, s) 为局部坐标 (见图2)。上标“+”和“-”在 Γ 上分别表示裂纹的上表面和下表面,而在界面 L 上则表示夹

杂的边界和基体的边界•

2 边界积分方程

让公式(1)~ (3) 适合裂纹表面的应力边界条件和基体_夹杂界面 L 上的连续性条件:

$$\begin{cases} \sigma_n(t^-) = \sigma_n(t^+) \equiv \sigma_n(t), & \sigma_{ns}(t^-) = \sigma_{ns}(t^+) \equiv \sigma_{ns}(t) \\ & (\text{对于 } t \in L), \\ u_j(t^-) = u_j(t^+) \equiv u_j(t) & (\text{对于 } t \in L(j = 1, 2)); \end{cases} \quad (12)$$

可得问题的边界积分方程为

$$\begin{cases} \int_{L+\Gamma} \left\{ \frac{H(t)}{t-t_0} - \frac{\overline{H(t)}}{\overline{t-t_0}} e^{-2i\alpha(t)} + e^{-2i\alpha(t_0)} \left[\frac{H(t)-Q(t)}{t-t_0} + \frac{t-t_0}{(\overline{t-t_0})^2} \overline{H(t)} e^{-2i\alpha(t)} \right] \right\} dt = \pi i [f(t_0) - g(t_0)] \\ & (t_0 = x_{01} + ix_{02} \in \Gamma); \\ \left[(K_1 + 1) + (K_0 + 1) \frac{G_1}{G_0} \right] H(t_0) + \\ \frac{1}{\pi i} \int_{L+\Gamma} \left\{ \left[K_1 - K_0 \frac{G_1}{G_0} \right] \frac{H(t)}{t-t_0} + \left[1 - \frac{G_1}{G_0} \right] \frac{\overline{H(t)}}{\overline{t-t_0}} e^{-2i\alpha(t)} - \right. \\ \left. \left[1 - \frac{G_1}{G_0} \right] e^{-2i\alpha(t_0)} \left[\frac{H(t)-Q(t)}{t-t_0} + \frac{t-t_0}{(\overline{t-t_0})^2} \overline{H(t)} e^{-2i\alpha(t)} \right] \right\} dt = \\ \left[1 - \frac{G_1}{G_0} \right] g(t_0) - \frac{1}{2} \left[(K_1 + 1) - (K_0 + 1) \frac{G_1}{G_0} \right] (\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty) \\ & (t_0 \in L); \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$f(t_0) = [\sigma_n(t_0^+) + \sigma_n(t_0^-)] + i[\sigma_{ns}(t_0^+) + \sigma_{ns}(t_0^-)] \quad (\text{对于 } t_0 \in \Gamma), \quad (14)$$

$$g(t_0) = \sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty + (\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty - 2i\sigma_{12}^\infty) e^{-2i\alpha(t_0)}. \quad (15)$$

边界积分方程(13) 中的未知函数 $H(t)$ 还必须满足下述位移单值性条件:

$$\int_\Gamma H(t) dt = \frac{1}{K_0 + 1} \int_\Gamma q(t) dt, \quad \int_L H(t) dt = 0 \quad (16)$$

在条件(16) 下求得边界积分方程(13) 的解 $H(t)$ 后, 裂纹应力强度因子可按下述公式计算^[1]:

$$K_I(A) - iK_{II}(A) = - \lim_{t \rightarrow A} \sqrt{2\pi |t - A|} \cdot iH(t), \quad (17)$$

$$K_I(B) - iK_{II}(B) = \lim_{t \rightarrow B} \sqrt{2\pi |t - B|} \cdot iH(t); \quad (18)$$

式中 A 和 B 是裂纹 Γ 尖点的复坐标•

3 算 例

使用作者和 Chau^[1] 建议的边界元离散技术和奇异积分的解析公式, 可将边界积分方程(13) 和位移单值性条件(16) 化归为代数方程组• 求得 $H(t)$ 的数值解后, 再由极限公式(17)~ (18) 即可确定应力强度因子•

为了说明本文的方法, 对图 1 中裂纹表面自由、无穷远处沿 x_2 方向作用均匀拉应力 σ 的具体问题进行数值计算• 取无量纲参数 $b/a = 0.2$, $d/a = 4$, $a_1/a = 3$, $b_1/a = 1.5$ 以及

$K_0 = K_I = 2$ 计算时将曲折裂纹分为 200 个线性单元, 夹杂_基体界面被划分为 520 个线性单元。当剪切弹性模量的比值 $G_I/G_0 = 1$ 时, 图 1 所示的夹杂_裂纹问题变为无限体中的曲折裂纹问题, 计算结果列于表 1 和表 2, 与文献[1, 9~ 11] 上用不同方法给出的结果符合得很好, 其中 $F_I = K_I / (\sigma \sqrt{\pi a})$ 和 $F_{II} = K_{II} / (\sigma \sqrt{\pi a})$ 分别为裂纹尖点 A 和 B 的无量纲应力强度因子。

表 1 曲折裂纹问题的无量纲应力强度因子 ($G_I/G_0 = 1, \theta = -45^\circ$ 且 $h/a = 2$)

	$F_I(A)$	$F_{II}(A)$	$F_I(B)$	$F_{II}(B)$
Sih[9]	0.752 2	0.021 2	0.451 3	- 0.422 3
Kitagawa, et al [10]	0.751 7	0.021 2	0.452 0	- 0.421 4
Pan & Amadei[11]	0.752 0	0.021 3	0.452 3	- 0.423 3
Wang & Chau[1]	0.750 1	0.021 2	0.452 0	- 0.420 2
本文	0.750 2	0.021 2	0.451 5	- 0.420 5

表 2 曲折裂纹问题的无量纲应力强度因子随 θ 的变化 ($G_I/G_0 = 1$ 且 $h/a = 2$)

$\theta/(\circ)$	$K_I(B)/(\sigma \sqrt{\pi a})$			$K_{II}(B)/(\sigma \sqrt{\pi a})$		
	本文	Wang & Chau[1]	Kitagawa, et al [10]	本文	Wang & Chau[1]	Kitagawa, et al [10]
- 60	0.265 9	0.266 0	0.265 7	- 0.445 0	- 0.445 3	- 0.444 7
- 45	0.451 5	0.452 0	0.452 0	- 0.420 5	- 0.420 2	- 0.421 4
- 30	0.617 1	0.618 0	0.618 5	- 0.328 9	- 0.327 9	- 0.329 9
- 15	0.731 9	0.731 7	0.733 5	- 0.180 7	- 0.180 6	- 0.181 2
0	0.772 9	0.772 8	0.774 6*	0.0	0.0	0.0

* 1.2a 长度的单个直裂纹精确解

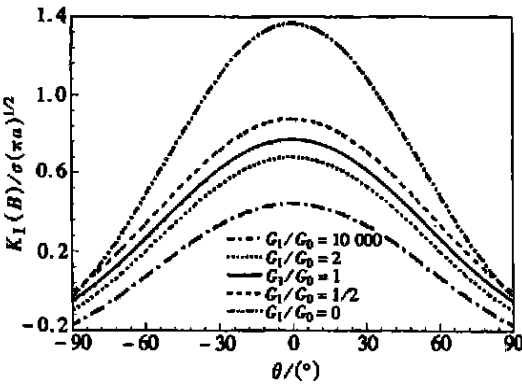


图 3 $h/a = 0$ 时无量纲应力强度因子 $F_I(B)$ 随 θ 的变化

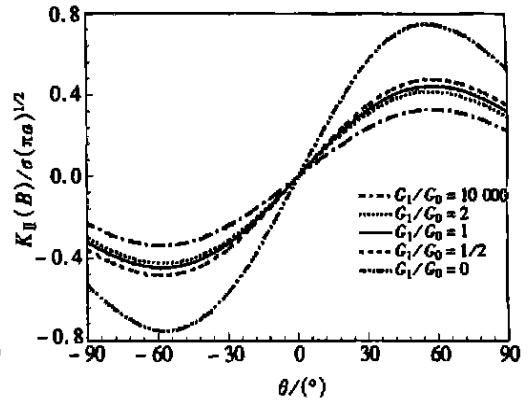


图 4 $h/a = 0$ 时无量纲应力强度因子 $F_{II}(B)$ 随 θ 的变化

图 3 至图 6 给出了几何参数 $h/a = 0$ 和 $h/a = 2$ 时裂尖 B 的无量纲应力强度因子随角度 θ 和剪切弹性模量比值 G_I/G_0 的变化。 $G_I/G_0 = 10\ 000$ 对应刚性夹杂的情形, 应力强度因子较小。矩形孔洞的情形对应 $G_I/G_0 = 0$, 此时应力强度因子最大。计算结果表明: 软夹杂有利于裂纹的扩展, 而刚性较大的夹杂对裂纹有抑制作用。

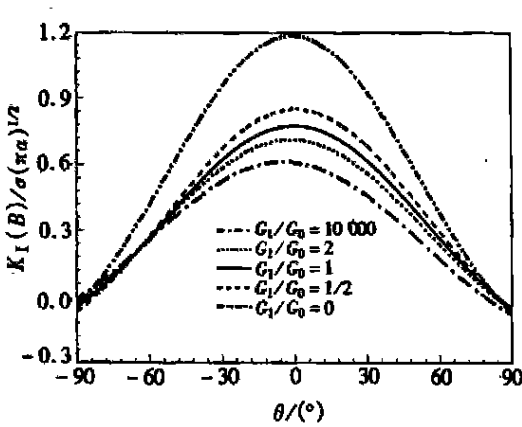


图5 $h/a = 2$ 时无量纲应力强度因子 $F_I(B)$ 随 θ 的变化

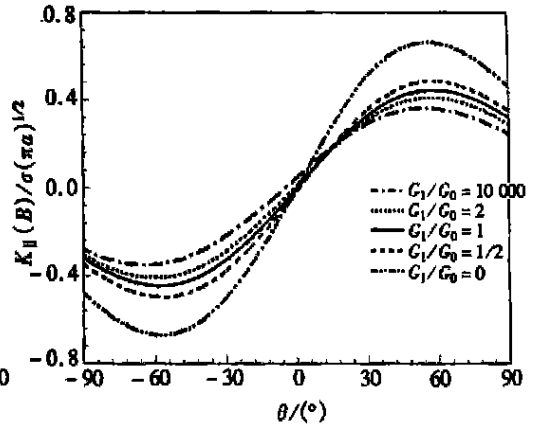


图6 $h/a = 2$ 时无量纲应力强度因子 $F_{II}(B)$ 随 θ 的变化

4 结 论

本文研究了无限弹性体中矩形弹性夹杂和曲折裂纹相互干扰问题的边界元法, 导出的夹杂_基体界面边界积分方程具有 $1/r$ 阶奇异性, 并且只包含一个复的未知函数 $H(t)$ 。因此, 数值计算更简单。

算例结果表明: 裂纹的应力强度因子随着夹杂弹性模量的增大而减小, 软夹杂有利于裂纹的扩展, 而刚性较大的夹杂对裂纹有抑制作用。

[参 考 文 献]

- [1] WANG Yin_bang, Chau K T. A new boundary element method for plane elastic problems involving cracks and holes[J]. International Journal of Fracture, 1997, **87**(1): 1—20.
- [2] Chau K T, WANG Yin_bang. Singularity analysis and boundary integral equation method for frictional crack problems in two dimensional elasticity[J]. International Journal of Fracture, 1998, **90**(3): 251—274.
- [3] Chau K T, WANG Yin_bang. A new boundary integral formulation for plane elastic bodies containing cracks and holes[J]. International Journal of Solids and Structures, 1999, **36**(14): 2041—2074.
- [4] WANG Yin_bang, Chau K T. A new boundary element method for mixed boundary value problems involving cracks and holes: Interactions between rigid inclusions and cracks[J]. International Journal of Fracture, 2001, **110**(4): 387—406.
- [5] WANG Yin_bang. A new boundary integral equation method of three dimensional crack analysis[J]. International Journal of Fracture, 1993, **63**(4): 317—328.
- [6] WANG Yin_bang, CHEN Wei_jiang. Interaction of two equal coplanar square cracks in three dimensional elasticity[J]. International Journal of Solids and Structures, 1993, **30**(23): 3315—3320.
- [7] 王银邦, 王海峰. 圆形裂纹分析的边界积分方程方法[J]. 兰州大学学报, 1997, **33**(1): 33—38.
- [8] 王银邦. 非轴对称载荷作用下的外部圆形裂纹问题[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(1): 9—15.
- [9] Sih G C. Handbook of Stress Intensity Factors[M]. Bethlehem: Lehigh University, 1973.
- [10] Kitagawa H, Yuuki R, Ohira T. Crack morphological aspects in fracture mechanics[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1975, **7**(3): 515—529.
- [11] Pan E, Amadei B. Fracture mechanics analysis of cracked 2_D anisotropic media with a new formula

tion of the boundary element method[J]. International Journal of Fracture, 1996, 77(2): 161—174.

Boundary Element Analysis of Interaction Between an Elastic Rectangular Inclusion and a Crack

WANG Yin_bang

(College of Engineering , Ocean University of China ,
Qingdao 266071, P . R . China)

Abstract: The interaction between an elastic rectangular inclusion and a kinked crack in an infinite elastic body was considered by using boundary element method. The new complex boundary integral equations were derived. By introducing a complex unknown function $H(t)$ related to the interface displacement density and traction and applying integration by parts, the traction continuous condition was satisfied automatically. Only one complex boundary integral equation was obtained on interface and involves only singularity of order $1/r$. To verify the validity and effectiveness of the present boundary element method, some typical examples were calculated. The obtained results show that the crack stress intensity factors decrease as the shear modulus of inclusion increases. Thus, the crack propagation is easier near a softer inclusion and the harder inclusion is helpful for crack arrest.

Key words: kinked crack; elastic rectangular inclusion; boundary element; stress intensity factor