

小波分析在测试信号分析中的应用*

张湘伟^① 骆少明^② 中桐滋^③

(1996 年 10 月 11 日收到, 1997 年 10 月 21 日收到修改稿)

摘 要

本文给出了小波的基本原理和构造方法以及小波分析的快速算法, 将小波分析方法(WAM)引入到非平稳冲击信号的分析中, 作为小波分析应用实例, 对汽车齿轮箱的断齿测信号进行了分析, 给出了分析结果。

关键词 小波分析 傅里叶谱分析 测试信号

中图分类号 O354

§ 1. 引 言

在工程实际问题中常会碰到一系列的非平稳、冲击信号, 例如: 汽车在不平整的道路上行驶时的振动信号, 飞机在飞行时对突变气流的响应信号, 高速运转的零部件破坏时的响应信号及高层建筑在地震时的响应信号等等, 对这类冲击信号, 传统的基于傅里叶变换的时-频信号分析方法仅能提供信号的平均统计结果, 而难以准确地描述其局部的、微细的特征。小波变换则能够在高频处使用短窗, 在低频处使用长窗^[1], 可以用不同的尺度观察信号和用不同的分辨率分解信号, 其有良好的局部化作用^[2], 因而小波分析法在测试信号分析中正受到广泛应用^[3]。

§ 2. 小波变换及其快速算法

如果函数 $\varphi \in L^2(R)$ 满足如下的“容许条件”:

$$C_\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2.1)$$

或者等价地:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) d\omega = 0 \quad (2.2)$$

那么 φ 称为“基本小波”, 对每一个基本小波 $\varphi \in L^2(R)$ 上的连续小波变换定义为:

* 国家教委博士点基金资助项目

① 汕头大学, 汕头 515063

② 重庆大学, 重庆 400044

③ 东京大学, 日本国东京

$$(Wf)(a, b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\phi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (\text{算法 } L^2(R)) \quad (2.3)$$

其中, $a, b \in R$ 且 $a \neq 0$.

函数 $\phi \in L^2(R)$ 被称为二进小波, 如果存在两个正的常数 A, B ($0 \leq A \leq B$), 使得:

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\phi(2^{-j}\omega)|^2 \leq B \quad (\text{a. e}) \quad (2.4)$$

特别地, 在(2.3)式中令 $a = 2^j, b = 2^j k$, 则它称为“离散二进小波变换”, 若空间序列 $\{V_j\}_{j \in Z}$ 是 $L^2(R)$ 的多分辨率分析^[2], $\{V_j\}_{j \in Z} \subset L^2(R)$, 那么信号 f (速) 可在空间 V_j 的正交基 $(2^{-j/2}\psi_j(t - 2^{-j}n))_{n \in Z}$ 上分解, 其中 $\phi \in L^2(R)$ 是尺度函数, $f \in V_j$.

$$f(t) = A_j f(t) = \sum_{k \in Z} C_{j,k} \phi_{j,k}(t) \quad (2.5)$$

$$\langle \phi_{j,k}, \phi_{j+1,m} \rangle = h_{k-2m} \quad (2.6)$$

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j+1,m} \rangle = g_{k-2m} \quad (2.7)$$

这样, 我们有;

$$f(t) = A_j f(t) = A_{j+1} f(t) = A_{j+1} f(t) + D_{j+1} f(t) \quad (2.8)$$

其中

$$A_{j+1} f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{j+1,m} \phi_{j+1,m} \quad (2.9)$$

$$D_{j+1} f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{j+1,m} \psi_{j+1,m} \quad (2.10)$$

$$C_{j+1,m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{k-2m} C_{j,k} \quad (2.11)$$

$$D_{j+1,m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{k-2m} C_{j,k} \quad (2.12)$$

记 $H = (H_{m,k}), G = (G_{m,k})$, 其中 $H_{m,k} = h_{k-2m}, G_{m,k} = g_{k-2m}$, 则(2.11)和(2.12)式可以写成如下的简化式:

$$C_{j+1} = H C_j \quad (2.13)$$

$$D_{j+1} = G C_j \quad (2.14)$$

重复上述过程, 我们得到:

$$f(t) = A_j f(t) + \sum_{j=J+1}^{J_1} D_j f(t) \quad (2.15)$$

其中

$$A_j f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} \phi_{j,k} \quad (2.16)$$

$$D_j f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{j,k} \psi_{j,k} \quad (2.17)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{j+1} &= H C_j \\ D_{j+1} &= G C_j \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

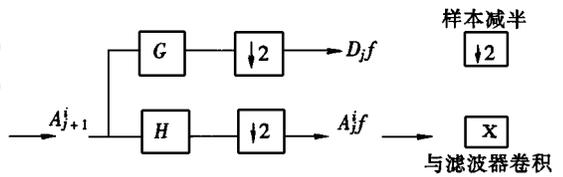


图 1 小波分解算法示意图

$A_j f$ 是在 2^j 分辨率下 f 的离散逼近, $D_j f$ 是在 2^j 分辨率下 f 的离散细节。通常物理仪器记录的分辨率是有限的, 因此 J 的大小是有限的, 这样 $f(t)$ 可分解为:

$$f(t) = A_{-1}^d f + D_{-1} f = A_{-1}^d f + D_{-J} f + \dots + D_{-1} f \quad (2.19)$$

小波分解算法如图 1 所示。

§ 3. 小波函数的构造

在实际应用中, 多分辨分析建立在 $2p+1$ 阶样条函数的基础上, 样条函数在应用中具有良好的性质, 设 V_1 是所有在整单位区间 $[k, k+1)$ 上次数不超过 $2p+1$ 的连续 $L^2(R)$ 函数所构成的闭子空间, 闭子空间 V_j 可由 V_1 按二进缩得到, 则空间序列 $\{V_j\}_{j \in Z}$ 构成 $L^2(R)$ 多分辨分析, 于是我们有:

$$\Phi(\omega) = \omega^{-n} (\Sigma_{2n}(\omega))^{-\frac{1}{2}} \quad (n = 2p + 2) \quad (3.1)$$

其中函数 $\Sigma_n(\omega)$ 由下式给出:

$$\Sigma_n(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\omega + 2k\pi)^{-n} \quad (3.2)$$

$\Phi(\omega)$ 与对应的滤波器 $H(\omega)$ 关系为:

$$\Phi(2\omega) = H(\omega) \Phi(\omega) \quad (3.3)$$

由此可导出:

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{\Sigma_{2n}(\omega)}{2^{2n} \Sigma_{2n}(2\omega)}} \quad (3.4)$$

对应的正交小波的傅里叶变换可表示为:

$$\Phi(\omega) = \exp\left[-\frac{i\omega}{2}\right] H\left[\frac{\omega}{2} + \pi\right] \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\exp\left[-\frac{i\omega}{2}\right] \Sigma_{2n}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)}{\Sigma_{2n}(\omega) \Sigma_{2n}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (3.5)$$

实际应用取 $n=4$, 由编程计算可得到 $\Phi(x)$, $\Psi(\omega)$, $\phi(x)$, $\psi(\omega)$ 。

§ 4. 汽车齿轮断齿测试信号分析

在汽车的所有零部件中, 底盘故障的发生率较高, 而其中以变速箱的故障率为甚, 为了分析齿轮轴系的工作情况和故障, 必须对齿轮的测试信号进行频谱分析, 研究它与故障相对应的频率特征, 这不仅对汽车齿轮箱的分析很重要, 同样对其它工程机械的分析也很重要。

图 2 是某型号变速箱中的常啮合齿轮发生断齿时的时域信号, 从图中可见, 断齿情况下时域波形呈现持续时间很短而幅值相当大的冲击振动, 而且振动有周期性, 其周期等于

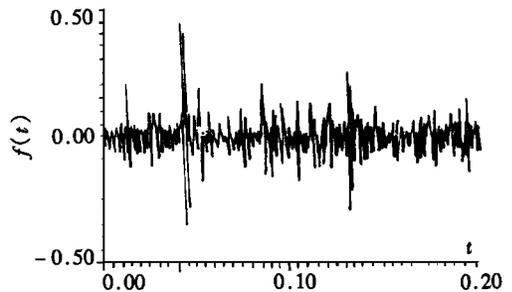


图 2 齿轮断齿时域信号

断齿轴的转动周期。

小波分解结果如图3~图6所示,由该4图可见,冲击信号在低频段 $A_{-1}^d f$ 和高频段 $D_{-1}^{-1} f (f_c/2 \sim f_c)$ 均可见。

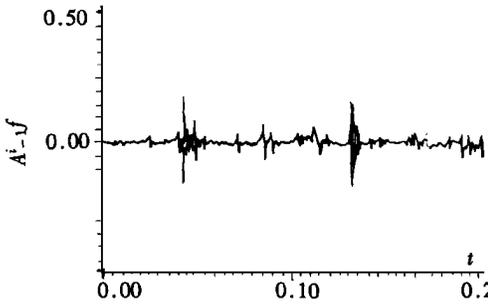


图3 信号小波分解 $A_{-1}^d f$

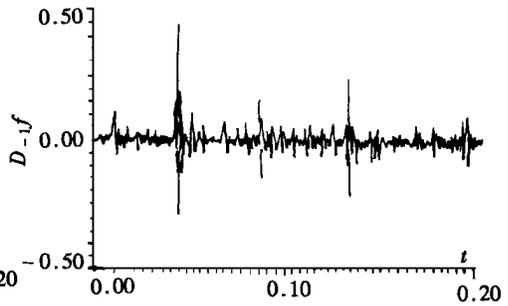


图4 信号小波分解 $D_{-1}^{-1} f$

图7和图8为低频段和高频段的频谱分析结果,显见,在频率为1300Hz左右,冲击能量最大,而该频率刚好与齿轮的固有频率接近,这说明断齿激起了齿轮的固有频率。

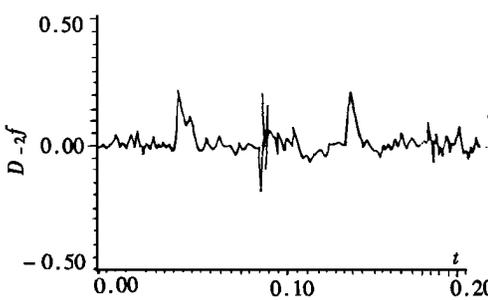


图5 信号小波分解 $D_{-2}^{-1} f$

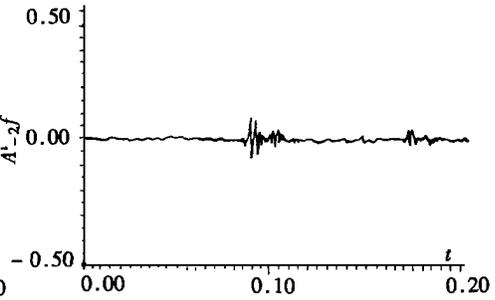


图6 信号小波分解 $A_{-2}^{-1} f$

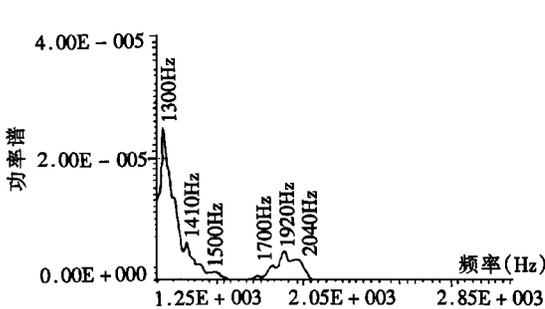


图7 高频率功率谱

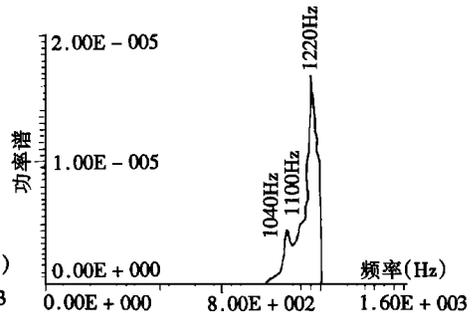


图8 低频段功率谱

§ 5. 结 语

小波分析方法具有良好的时频局部化特性,它可以根据信号的不同频率成分自动调节在时间域取样密度(高频处密,低频处疏),当用于测试信号的分析时,它特别适合于分析低频分量迭加高频瞬时信号,是一种有效的测试信号分析方法。

参 考 文 献

- 1 K. Chui. *Wavelets, An Introduction to Wavelet*, Texas A & M University, Academic Press Inc. (1992), 1—22.
- 2 刘贵忠、邸双亮,《小波分析及应用》,西安电子科技大学出版社(1992),17—36.
- 3 王建忠,小波理论及其在物理和工程中的应用,《数学进展》,21(3)(1992),289—314.
- 4 S. Haykin, *Nonlinear Methods of Spectral Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1979).

Wavelet Analysis in Testing Signal

Zhang Xiangwei

(Shantou University, Shantou, Guangdong 515063, P. R. China)

Luo Shaoming

(Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

Shigiru Nakagiri

(Tokyo University, Tokyo, Japan)

Abstract

In this paper, Wavelet Analysis Method (WAM) is introduced to analyse the non-stationary, shock signals. The theory and construction method of wavelet, the fast algorithms of wavelet analysis are presented. As an example, the gear testing signal has been analysed by WAM, and the results of WAM are compared with that of Fourier spectrum. The advantages of WAM are clearly shown.

Key words wavelet analysis, Fourier spectral analysis, testing signal