

# 粘弹性本构模型的准静力位移识别<sup>\*</sup>

杨海天<sup>①</sup> 邬瑞锋<sup>①</sup> 张 群<sup>①</sup>

(1996 年 6 月 14 日收到, 1997 年 11 月 13 日收到修改稿)

## 摘 要

对一类边界条件, 建立粘弹性准静力位移与本构参数的显式关系, 给出优化识别的叠代格式, 从二阶微分模型出发, 识别粘弹性本构模式, 讨论了信息误差对反演结果的影响。

**关键词** 粘弹性 本构模型 静力位移 反演

**中图分类号** O345

## § 1. 引 言

本构参数的静力位移反演方法, 正在地下工程等问题中得到日益广泛的应用, 有关粘弹性本构参数方面的研究, 已有了不少进展。[2, 1] 通过积分变换等进行粘弹性参数的静力位移识别, 文[3] 开展了地层三维粘弹性反演的研究工作, 并做了实际计算, 文[4] 提出了均质及非均质粘弹性参数静力位移识别的一般方法。

以往工作一般假定结构或材料的本构形式为确定, 而本构方程中系数未知。但实际问题中二者经常是都未知的。此外, 信息误差在反演操作中在所难免, 它对识别结果的影响是必须计及的重要因素。这两个问题的研究, 不仅具有一定的理论意义, 而且有着重要的工程实用价值。

本文导出了一类边界条件下, 粘弹性静力位移与本构方程的显式关系, 从二阶微分模式出发, 识别粘弹性本构模型。对信息误差对于识别结果的影响进行了数值分析。

## § 2. 引 理

设结构只有力边界条件或力与零位移混合边界条件, 其粘弹性静力问题的控制方程为:

$$\sigma_{ij,j} + F_j = 0 \quad (x \in \Omega) \quad (2.1)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ij}n_j = X_i \quad (x \in \Gamma_\sigma) \quad (2.3)$$

\* 此课题的完成得到中科院地质所开放实验室资助

① 大连理工大学工程力学系, 大连 116024

$$u_i = 0 \quad (x \in \Gamma_u) \quad (2.4)$$

$$P_1 \varepsilon_j = P_2 d_{ijlm} \alpha_m \quad (2.5)$$

体力  $F_i$  及面力  $X_i$  与时间无关, 表示静力作用; 式(2.5)中  $P_1$  和  $P_2$  为时间有关的微分算子多项式,  $\varepsilon_j$  和  $\alpha_j$  分别为应变和应力向量, 其积分形式的解为:

$$\varepsilon_j = L D_{ijlm} \alpha_m \quad (2.6)$$

其中,  $L$  为积分算子,  $D_{ijlm}$  为弹性张量  $D_{ijlm}$  和  $d_{ijlm}$  为仅与泊松比有关的系数矩阵. 粘弹性本构关系可采用式(2.5)或式(2.6).

设  $\sigma_{ij}^0$  满足式(2.1)及(2.3), 且

$$\varepsilon_{ij}^0 = D_{ijlm} \sigma_{ij}^0 \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{ij}^0 = (u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0)/2 \quad (2.8)$$

$$u_i^0 = 0 \quad (x \in \Gamma_u) \quad (2.9)$$

可以证明, 式(2.1)及至式(2.6)的解为:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_j = L(1) \varepsilon_j^0 \quad (2.11)$$

$$u_i = L(1) u_i^0 \quad (2.12)$$

$\tilde{u}$  及  $\tilde{u}^0$  是位移向量.

式(2.7)至式(2.9)是不依赖材料常数的弹性解, 因而  $u_i^0$  可通过解析或数值的方法预先求出, 而式(2.12)则给出了粘弹性准静力位移与本构方程的显式表达.

### § 3. 叠代格式

设  $L(1) = F(x, t)$

$x$  是粘弹性参数向量,  $t$  代表时间.

$$\text{设 } \Pi = \sum (u_i - u_i^*)^T (u_i - u_i^*) / 2 = \sum R_i^T R_i / 2 \quad (3.1)$$

$i$  代表时间序列,  $u_i^*$  为已知位移信息向量. 且

$$u_i = F(x, t_i) u_0 = F_i u_0 \quad (3.2)$$

极小化  $\Pi$  必有  $\partial \Pi / \partial x = 0$ , 取叠代格式为:

$$\left( \sum G_i^T G_i \right) \Delta x = \sum G_i^T R_i \quad (3.3)$$

直至  $\Delta x = 0$ , 其中

$$G_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} = u_0 \frac{\partial F_i}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$\text{本文取 } F_i = 1/E_1 + t_i/\eta_1 + (1 - \exp(-E_2/\eta_2 t_i))/E_2 \quad (3.5)$$

式(3.5)对应于一个 Burgers 模型, 如图 1 所示. 它包含了几种常见的粘弹性模型:

a.  $E_2 = \infty, \eta_2 = \infty$ , 对应于 Maxwell 模型

b.  $E_1 = \infty, \eta_1 = \infty$ , 对应于 Kelvin 模型

c.  $\eta_1 = \infty$ , 对应于线性模型

$F_i$  的形式可取得更为复杂, 以包含更多的粘弹性模型, 这在原则上没有困难.

由式(3.3)和(3.5)有:

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial F_i}{\partial \mathcal{J}} \right)^T \left( \frac{\partial F_i}{\partial x} \right) = \begin{cases} N, & \sum t_i, & N - \sum e^{-x_4 t_i}, & x_3 \sum t_i e^{-x_4 t_i} \\ d & \sum t_i, & \sum t_i - \sum t_i e^{-x_4 t_i}, & x_3 \sum t_i^2 e^{-x_4 t_i} \\ & N - 2 \sum e^{-x_4 t_i} + \sum e^{-2x_4 t_i}, & x_3 (\sum t_i e^{-x_4 t_i} - \sum t_i e^{-2x_4 t_i}) \\ \text{对称} & & & x_3^2 \sum t_i^2 e^{-2x_4 t_i} \end{cases} \quad (3.6)$$

这里,  $x_1 = 1/E_1$ ,  $x_2 = 1/\eta_1$ ,  $x_3 = 1/E_2$ ,  $x_4 = E_2/\eta_2$ , 由式(3.5)也可写出式(3.13)的右端对应项•

## § 4. 算 例

计算单位为: 时间: s;  $E$ : N/cm<sup>2</sup>;  $\eta$ : s. N./cm<sup>2</sup>

### 1. 模型识别

位移信息  $u_i^*$  由式(3.2)给出, 这里设  $u_0^T = (10000, 10005, 10006)^T$ •

表 1 给出了从二阶模式出发, 粘弹性模型的识别结果•

### 2 叠代初值的影响

表 2 给出了初值的选择对于计算结果的影响,  $u_0$  同上•

### 3 无限大粘弹性域中受内压圆洞

如图 2 所示,  $A$  与  $B$  两点的相对位移为给定信息, 由解析解给出, 而  $u_0$  由有限元计算给出计算结果列于表 3•

### 4 时间无关的信息误差影响

a 设  $u_i^* = F_i u_0 (1 + 0.03)$       $u_0 = 10000$

b. 设  $(u_i^*)^T = F_i (1 + 0.03) 10000, (1 + 0.02) 10005, (1 + 0.05) 10006)^T (u_0)^T = (10000, 10005, 10006)^T$      计算结果列于表 4•

### 5 时间有关的信息误差影响

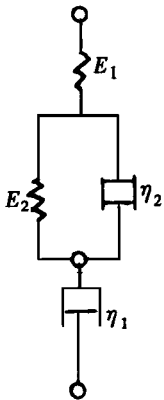


图 1

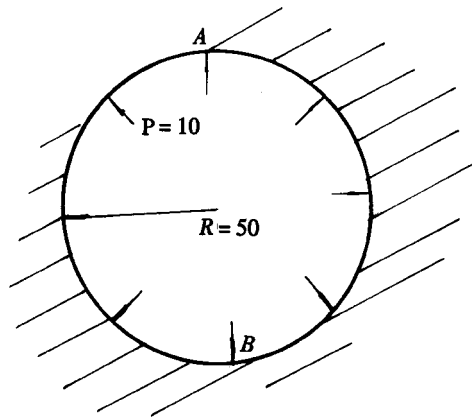


图 2

- a. 设  $u_i^* = F_i u_0 (1 + 0.03 \sin t_i)$   $u_0 = 10000$
- b. 设  $(u_i^*)^T = F_i ((1 + 0.03 \sin t_i) 10000, (1 + 0.02 \sin t_i) 10005, (1 + 0.05 \sin t_i) 10006)^T$   
 $(u_0)^T = (10000, 10005, 10006)^T$  计算结果列于表 5•

计算表明

- a. 本文方法可通过准静力位移信息有效地识别粘弹性本构模式和参数•
- b. 叠代初值的选取并不影响最终结果, 但会影响叠代次数•
- c. 当流变发展较快时, 可在较短的时间里程内取较少的采样点; 当流变发展较慢时, 时间里程应较长, 采样点应取得更多•
- d. 信息误差将对反演结果产生影响, 特别时间有关的误差产生的影响较大•

表 1 模型识别

初 值				终 值				准确值				时间 步长	取点 个数	叠代 次数	模型
$E_1$	$\eta_1$	$E_2$	$\eta_2$	$E_1$	$\eta_1$	$E_2$	$\eta_2$	$E_1$	$\eta_1$	$E_2$	$\eta_2$				
1.0E8	1.0E9	1.0E8	1.0E10	1.0E5	1.0E8	2.3E20	3.66E21	1.0E5	1.0E8	$\infty$	$\infty$	5.0	40	6	Maxwell
1.0E8	1.0E9	1.0E8	1.0E10	4.67E16	8.0E15	5.0E4	1.0E7	$\infty$	$\infty$	5.0E4	1.0E7	5.0	40	15	Kelvin
1.0E8	1.0E9	1.0E8	1.0E10	1.0E5	1.1E18	5.0E4	1.0E7	1.0E5	$\infty$	5.0E4	1.0E7	5.0	40	15	三体
1.0E8	1.0E9	1.0E8	1.0E10	1.0E5	1.0E8	5.0E4	1.0E7	1.0E5	1.0E8	5.0E4	1.0E7	5.0	40	6	Burgers

表 2 叠代初值影响

初 值				终 值				准确值				时间 步长	取点 次数	叠代 个数
$E_1$	$\eta_1$	$E_2$	$\eta_2$	$E_1$	$\eta_1$	$E_2$	$\eta_2$	$E_1$	$\eta_1$	$E_2$	$\eta_1$			
$3 \times 10^7$	62.50	625	$1 \times 10^9$	0.9968E4	0.997E6	0.4985E4	0.997E6	$1 \times 10^4$	$1 \times 10^6$	$5 \times 10^3$	$1 \times 10^6$	1.5	5.0	11
$3 \times 10^7$	62.5	625	$1 \times 10^9$	0.9968E4	0.997E6	0.4985E4	0.997E9	$1 \times 10^4$	$1 \times 10^9$	$5 \times 10^3$	$1 \times 10^9$	2.5	120	51
$3 \times 10^7$	62.5	625	$1 \times 10^9$	0.9968E4	0.997E6	0.4985E4	0.997E9	$1 \times 10^4$	$1 \times 10^9$	$5 \times 10^3$	$1 \times 10^9$	2.5	150	42

表 3 无限大粘弹性域中受压圆洞

初 值				终 值				真实值				取点 个数	时间 间隔	叠代 次数
$E_1$	$\eta_1$	$E_2$	$\eta_2$	$E_1$	$\eta_1$	$E_2$	$\eta_2$	$E_1$	$\eta_1$	$E_2$	$\eta_2$			
5.0E11	6.67E12	1.42E12	1.0E10	1.0E8	1.0E9	5.0E9	1.0E9	1.0E8	1.0E9	5.0E9	1.0E9	60	1.5	6
5.0E15	6.66E16	1.0E16	1.42E18	1.0E8	1.0E9	5.0E9	1.0E9	1.0E8	1.0E9	5.0E9	1.0E9	60	1.5	18
5.0	67.7	100	142	1.0E8	1.0E9	5.0E9	1.0E9	1.0E8	1.0E9	5.0E9	1.0E9	60	1.5	11

表 4 时间无关的信息误差影响

工 况	初 值				终 值				真实值				取点 个数	时间 间隔	叠代 次数
	$E_1$	$\eta_1$	$E_2$	$\eta_2$	$E_1$	$\eta_1$	$E_2$	$\eta_2$	$E_1$	$\eta_1$	$E_2$	$\eta_2$			
a	1.0E8	1.0E9	1.0E8	1.0E10	97087.4	97087380	48543.7	9708737.0	1.0E5	1.0E8	5.0E4	1.0E7	60	5.0	6
b	1.0E8	1.0E9	1.0E8	1.0E10	101030	2.996E8	51687.4	8.123E6	1.0E5	1.0E8	5.0E4	1.0E7	60	5.0	8

表 5 时间有关的信息误差影响

工况	初 值				终 值				真实值				取点 个数	时间 间隔	叠代 次数
	$E_1$	$\eta_1$	$E_2$	$\eta_2$	$E_1$	$\eta_1$	$E_2$	$\eta_2$	$E_1$	$\eta_1$	$E_2$	$\eta_2$			
a	1.0E8	1.0E9	1.0E8	1.0E10	96773.9	96773980	48386.99	9677398	1.0E5	1.0E8	5.0E4	1.0E7	60	5.0	6
b	1.0E8	1.0E9	1.0E8	1.0E10	101142.7	4.36E8	51364.1	7938823	1.0E5	1.0E8	5.0E4	1.0E7	60	5.0	9

## § 5. 结 语

本文给出了一个均质粘弹性本构模式准静力位移识别的一般方法,并进行了数值验证。如将微分模式的阶数取得更高,则将包括更多的本构模式,这在反演操作上并无原则上困难。本方法与工程问题进一步结合,可望得以实际应用。信息误差对反演结果的影响不容忽视,应在反演实施时设法加以校正和消除。

## 参 考 文 献

- 1 薛琳、杨志法等,确定流变岩体的参数及地应力的位移反分析,地质科学,(4)(1986)。
- 2 刘新宇,任意洞形的围岩流变参数反分析,第二届全国计算力学会议论文(1986)。
- 3 杨林德、朱合华,地层三锥粘弹性反演分析,岩土工程学报,13(6)(1991),18—26。
- 4 Yang Haitian and Wu Ruifeng, Inverse analysis of static displacement for determinatin of viscoelastic parameters, Applied Mathematical Modelling. (已接受)。

# Identification of Qusi\_Static Displacement for Constitutive Models of Viscoelasticity

Yang Haitian Wu Ruifeng Zhang Qun

(Dept. of Engr. Mechanics, Dalian Univ. of Tech., Dalian, 116023, P. R. China)

## Abstract

An explicit relation between constitutive parameters and quasi-static displacement of viscoelasticity is derived under a kind of boundary condition, and an iterative form of optimized identification is presented. Viscoelastic constitutive models are identified from a two order differential model, and effects of information errors on results of inverse analysis are discussed.

**key words** viscoelasticity, constitutive model, static displacement, inverse analysis