

# 饱和土中球面波的传播

徐长节      吴世明

(丁皓江推荐, 1996 年 7 月 22 日收到)

## 摘 要

本文采用工程上通用的土力学模型, 利用 Laplace 变换求解了饱和土中球面波的传播问题, 对一种特殊情形下的均匀受压球形空腔得到了解析解, 并与弹性单相介质中均匀受压球形空腔进行了对比, 以考察流体对饱和土体动力响应的影响。本文为分析地下结构动力响应提供了一种有效的方法, 有重要的工程应用价值。

**关键词** 球面波 波传播 饱和土 球形空腔 动力响应

**中图分类号** O347

## 1 前 言

饱和土是工程上常见的一种土, 是一种流固耦合介质。由于饱和土动力响应较理想单相弹性介质复杂, 以往对土体的研究大都视其为简单的单相介质。显然, 采用两相介质模型比采用单相弹性介质来研究土体的动力响应更为合理, 也更具有实际意义。从 Biot 建立饱和土固结、波动理论以来<sup>[1][2]</sup>, 对饱和土的动力研究有了很大的进展。Halpern 采用 Biot 模型研究了饱和弹性半空间上刚性板的稳态响应<sup>[3]</sup>, Philippacopoulos 采用该模型研究了饱和弹性半空间的 Lamb 问题<sup>[4]</sup>, Amir 等人则利用势函数分解导出了 Biot 方程的通解<sup>[5]</sup>。

单相介质中球面波的传播问题已为前人所解决<sup>[6]</sup>, 而对于饱和土体中球面波的研究则未见之于文献。本文采用工程上通用的修改 Biot 模型<sup>[7]</sup>建立问题的控制方程, 导出了饱和土中球面波传播问题的动力解答一般算式, 对一种特殊情形下均匀受压的球形空腔得到了解析解, 并与单相弹性介质中均匀受压球形空腔进行对比, 从而考察流体对波传播的影响。本文分析地下结构的动力响应提供了一种有效的途径, 有较大的工程应用价值。

## 2 基本方程及求解

考虑饱和土体, 忽略体力, 球坐标 $(r, \theta, \varphi)$ 下其介质平衡方程和有效应力算式为:

$$\frac{rr}{r} + \frac{2}{r} \frac{rr}{r} - \frac{\quad}{r} = \frac{2u_r}{t^2} + f \frac{2w_r}{t^2} \quad (2.1)$$

$$\ddot{u}_i = \ddot{u}_i - pf \quad (i = r, \theta, \varphi) \quad (2.2)$$

其中,  $s$  和  $f$  分别为固相和流相反质密,  $i_i, i_e$  分别为总应力及有效应力,  $p_f$  为孔压,  $\alpha = 1 - k_b/k_s, \beta = (1 - n) s + n f, w_r = n (U_r - u_r), k_b$  和  $k_s$  分别为土骨架和土颗粒体积模量,  $U_r$  和  $u_r$  分别为流体及土骨架的位移,  $n$  为孔隙率  
 由式(2 1)、(2 2) 则可得到以有效应力表示的平衡方程:

$$\frac{r r}{r} + \frac{2 r r - \dots}{r} - \frac{p_f}{r} = u_r + f w_r \tag{2 3}$$

流体平衡方程和渗流方程分别为:

$$-\frac{p_f}{r} = u_r + f w_r + b v_r \tag{2 4}$$

$$p_f = M - M e \tag{2 5}$$

式中:  $e = \frac{u_r}{r} + \frac{2 u_r}{r}, \dots = - (\frac{w_r}{r} + \frac{2}{r} w_r)$

$M, m, b$  都为饱和土中的参数, 由式(2 3)、(2 4)、(2 5) 可得到如下方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r r}{r} + \frac{2 r r - \dots}{r} + 2 M \frac{e}{r} &= u_r + f w_r \\ M \frac{e}{r} - M \frac{\dots}{r} &= f u_r + m w_r + b v_r \end{aligned} \right\} \tag{2 6}$$

利用土体有效应力 应变关系:

$$\left. \begin{aligned} r r &= e + 2 \frac{u_r}{r} \\ &= e + 2 \frac{u_r}{r} \end{aligned} \right\} \tag{2 7}$$

可得到以位移表示的控制方程为:

$$\left. \begin{aligned} ( \dots + 2 + 2 M ) \frac{e}{r} - M \frac{\dots}{r} &= u_r + f w_r \\ M \frac{e}{r} - M \frac{\dots}{r} &= f u_r + m w_r + b v_r \end{aligned} \right\} \tag{2 8}$$

引入势函数  $s, f$ , 并令:  $u_r = \frac{1}{r} \left( \frac{s}{r} \right), w_r = \frac{1}{r} \left( \frac{f}{r} \right)$ , 则式(2 8) 可化为

$$\left. \begin{aligned} \left[ ( \dots + 2 + 9^2 M ) \frac{2}{r^2} - \frac{2}{t^2} s + \left[ M \frac{2}{r^2} - f \frac{2}{t^2} \right] f \right] &= 0 \\ \left[ M \frac{2}{r^2} - f \frac{2}{t^2} \right] s + \left[ M \frac{2}{r^2} - m \frac{2}{t^2} - b \frac{1}{t} \right] f &= 0 \end{aligned} \right\} = 0 \tag{2 9}$$

引入任意函数  $s, f$ , 使:

$$\left. \begin{aligned} s &= \left[ M \frac{2}{r^2} - m \frac{2}{t^2} - b \frac{1}{t} \right] \\ f &= - \left[ M \frac{2}{r^2} - f \frac{2}{t^2} \right] \end{aligned} \right\} \tag{2 10}$$

则式(2 10) 化为:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \left[ M ( \dots + 2 ) \right] \frac{4}{r^4} - \left[ ( \dots + 2 + 2 M ) m + M - 2 f M \right] \frac{4}{r^2 t^2} \right\} \\ + ( m - f ) \frac{4}{t^4} - b \left[ ( \dots + 2 + 2 M ) \frac{2}{r^2} - \frac{2}{t^2} \right] \frac{1}{t} \end{aligned} \right\} \tag{2 11}$$

显然,若  $b=0$ , 则式(2 11)可写成如下形式:

$$\left[ \frac{2}{r^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{2}{t^2} \right] \left[ \frac{2}{r^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{2}{t^2} \right] = 0 \quad (2 12)$$

式中:  $c_1^2, c_2^2$  是下列方程的两个根:

$$(m - f)c^4 - [M + m(\alpha + 2 + \beta^2 M) - 2fM]c^2 + M(\alpha + 2) = 0 \quad (2 13)$$

方程(2 12)有解:

$$= \alpha + \beta \quad (2 14)$$

而  $\alpha, \beta$  分别是下列方程的解:

$$\left[ \frac{2}{r^2} - \frac{1}{c_i^2} \frac{2}{t^2} \right] c_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2 15)$$

因此

$$i = f_i(r - c_i t) + g_i(r + c_i t) \quad (i = 1, 2)$$

这表明  $b=0$  时, 解是两处球面波的叠加而成

对于  $b \neq 0$  的问题, 可以用 Laplace 变换来求解方程(2 11), 对  $t$  进行 Laplace 变换后可得:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \right] \left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \right] = 0 \quad (2 16)$$

其中:  $\frac{d^2}{dr^2}$  是  $\frac{d^2}{dt^2}$  的 Laplace 变换式, 本文上标  $-$  都表示 Laplace 变换式 式(2 16)中:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad Re(\alpha_2) > Re(\alpha_1) > 0 \\ p &= \frac{(\alpha + 2 + \beta^2 M)(ms^2 + bs) + s^2 M - 2f s^2 M}{(\alpha + 2)M} \\ q &= \frac{(ms^2 + bs)s^2 - \frac{2}{f}s^4}{(\alpha + 2)M} \end{aligned} \right\} \quad (2 17)$$

方程(2 16)的解为:

$$\left. \begin{aligned} &= \alpha + \beta \\ \alpha &= A_1 \exp(\alpha_1 r) + B_1 \exp(-\alpha_1 r) \\ \beta &= A_2 \exp(\alpha_2 r) + B_2 \exp(-\alpha_2 r) \end{aligned} \right\} \quad (2 18)$$

$s, f$  的拉氏变换式为:

$$\left. \begin{aligned} s &= (M \frac{2}{r^2} - ms^2 - bs) \\ f &= - [M \frac{2}{r^2} - f s^2] \end{aligned} \right\} \quad (2 19)$$

将式(2 18)代入式(2 19)可得:

$$\left. \begin{aligned} s &= s_1 + s_2 = (M \frac{2}{r^2} - ms^2 - bs)[A_1 \exp(\alpha_1 r) + B_1 \exp(-\alpha_1 r)] \\ &\quad + (M \frac{2}{r^2} - ms^2 - bs)[A_2 \exp(\alpha_2 r) + B_2 \exp(-\alpha_2 r)] \\ f &= f_1 + f_2 = - (M \frac{2}{r^2} - f s^2)[A_1 \exp(\alpha_1 r) + B_1 \exp(-\alpha_1 r)] \\ &\quad - (M \frac{2}{r^2} - f s^2)[A_2 \exp(\alpha_2 r) + B_2 \exp(-\alpha_2 r)] \end{aligned} \right\} \quad (2 20)$$

令:  $i = \frac{-M \frac{2}{r^2} - f s^2}{M \frac{2}{r^2} - ms^2 - bs}, C_i = (M \frac{2}{r^2} - ms^2 - bs)A_i, D_i = (M \frac{2}{r^2} - ms^2 - bs)B_i$

则

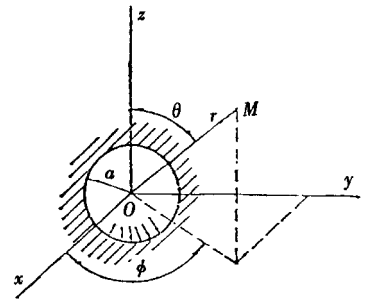


图 1 饱和土中的球形空腔

$$\left. \begin{aligned} s &= s_1 + s_2 = C_1 \exp(-B_1 r) + D_1 \exp(-B_1 r) + C_2 \exp(-B_2 r) + D_2 \exp(-B_2 r) \\ f &= f_1 + f_2 \\ &= [C_1 \exp(-B_1 r) + D_1 \exp(-B_1 r)] + [C_2 \exp(-B_2 r) + D_2 \exp(-B_2 r)] \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

变换后位移和应力等量为:

$$u_r = \frac{1}{r} [C_1 \exp(-B_1 r) + C_2 \exp(-B_2 r) - D_1 \exp(-B_1 r) - D_2 \exp(-B_2 r)] - \frac{1}{r^2} s$$

$$w_r = \frac{1}{r} [B_1 C_1 \exp(-B_1 r) + B_2 C_2 \exp(-B_2 r) - B_1 D_1 \exp(-B_1 r) - B_2 D_2 \exp(-B_2 r)] - \frac{1}{r^2} s_f \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} R_r &= \frac{K+2}{r} [B_1^2 C_1 \exp(-B_1 r) + B_1^2 D_1 \exp(-B_1 r) + B_2^2 C_2 \exp(-B_2 r) + B_2^2 D_2 \exp(-B_2 r)] \\ &+ \frac{4L}{r^2} [B_1 D_1 \exp(-B_1 r) - B_1 C_1 \exp(-B_1 r) + B_2 D_2 \exp(-B_2 r) - B_2 C_2 \exp(-B_2 r)] + \\ &\frac{4L}{r^3} \{ p_f = -M \frac{1}{r} \{ (D_1 + A) B_1^2 [C_1 \exp(-B_1 r) + D_1 \exp(-B_1 r)] + (D_2 + \\ &A) B_2^2 [C_2 \exp(-B_2 r) + D_2 \exp(-B_2 r)] \} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_r &= \frac{K+2+M(A+D_1)}{r} [B_1^2 C_1 \exp(-B_1 r) + B_1^2 D_1 \exp(-B_1 r)] \\ &+ \frac{K+2L+AM(A+D_2)}{r} [B_2^2 C_2 \exp(-B_2 r) + B_2^2 D_2 \exp(-B_2 r)] \\ &+ \frac{4L}{r^2} [B_1 D_1 \exp(-B_1 r) - B_1 C_1 \exp(-B_1 r) + B_2 D_2 \exp(-B_2 r) \\ &- B_2 C_2 \exp(-B_2 r)] + \frac{4L}{r^3} s_f \end{aligned} \quad (2.23)$$

根据以上各变换式, 引入边界条件, 确定待定系数  $D_1$  和  $D_2$ , 然后利用 Laplace 逆变换即可求出位移以及应力#

### k 31 均匀受压球形空腔问题

对于如图 1 所示的饱和土体中均匀受压球形空腔, 其边界应力条件为:

1、应力边界条件:

$$R_r |_{r=a} = p(t) \quad (311)$$

2、两种边界排水条件, 1) 排水边界:

$$p_f |_{r=a} = 0 \quad (312a)$$

或 2) 不排水边界

$$\frac{5p_f}{5r} |_{r=a} = 0 \quad (312b)$$

土体中初始速度及位移为零, 观察式 (2.18), 考虑到波在无限空间中传播的特性,  $\lim_{r \rightarrow +\infty} s = 0$ , 则该式中  $A_1$  与  $A_2$  应为零,

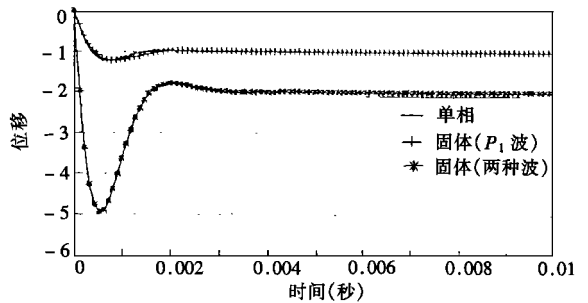


图 2  $r = 1.0a$  处位移曲线

即在式(2121)中  $C_1 = C_2 = 0$

式(311)和式(312)拉氏变换式分别为:

$$R_r |_{r=a} = p(s) \tag{313}$$

$$p_f |_{r=a} = 0 \tag{314a}$$

$$\frac{5p_f}{s r} |_{r=a} = 0 \tag{314b}$$

由边界条件(313)和(314a)或(314b),可确定积分常数  $D_1$  和  $D_2$ , 具有如下形式:

$$D_1 = \frac{p(s) \exp[B_1 a]}{F_1 + F_2 H}$$

$$D_2 = \frac{H @ p(s) \exp[B_2 a]}{F_1 + F_2 H} \tag{315}$$

其中:

$$F_i = \frac{(K + 2L + A^2 M + A M D)}{a} B_i^2 + \frac{4L}{a} B_i + \frac{4L}{a^3} \quad (i = 1, 2)$$

$$H = \begin{cases} -\frac{B_1^2(A + D_1)}{B_2^2(A + D_2)} & \text{(对于排水边界)} \\ -\frac{B_1^2(A + D_1) \left(\frac{B_1}{a} + \frac{1}{2}\right)}{B_2^2(A + D_2) \left(\frac{B_2}{a} + \frac{1}{2}\right)} & \text{(对于不排水边界)} \end{cases}$$

将以上各参数代入应力及位移变换式中,再进行拉氏逆变换,即可求出应力及位移

对于无流体(有  $Q = 0$ )情况,  $b = Qg/k_d = 0$ ,  $m = cQ/n = 0$ ,  $A = 1 - k_b/k_s = 0$ , 代入可得:

$B_1^2 = 0$ ,  $B_2^2 = s^2/c_d^2$ , 其中  $c_d^2 = (K + 2L)/Q$   $c_d$  为单相介质中  $P$  波波速 于是:

$$\left. \begin{aligned} \langle s_1 = D_1 \\ \langle s_2 = D_2 \exp(-B_2 r), (B_2 > 0) \end{aligned} \right\} \tag{316}$$

但由于  $\langle s_1 = D_1$  不满足  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \langle s = 0$ , 故  $\langle s = \langle s_2$ , 即只有一种  $P$  波存在 进一步可推证:  $\langle_f = 0$ ,

$w_r = 0$ ,  $p_f = 0$ , 且有:

$$\left. \begin{aligned} u_r = \left(-\frac{1}{r} - \frac{B_2}{r}\right) D_2 \exp(-B_2 r) \\ R_r = \left(\frac{K + 2L}{r} B_2^2 + \frac{4L}{r^2} + \frac{4L}{r^3}\right) D_2 \exp(-B_2 r) \end{aligned} \right\} \tag{317}$$

由应力边界条件式(313),可得:

$$D_2 = \frac{p(s) a^3}{(K + 2L) B_2^2 a^2 + 4LaB_2 + 4L} \exp(-B_2 a) \tag{318}$$

即:

$$\langle_s / r = \frac{a^3 p(s) \exp[-B_2(r - a)]}{[(K + 2L) B_2^2 a^2 + 4LaB_2 + 4L] r} = \frac{ac_s^2 p(s)}{rL(s^2 + ds + c)} \exp[-k_d(r - a)] \tag{319}$$

其中:  $c_s^2 = 1/Q$   $d = 4c_s^2/c_d$ ,  $c = 4c_s^2/a$ ,  $k_d = s/c_d$  此结果与文献[6]所得的单相弹性介质中动力解一致

若  $b = 0$  而  $Q \neq 0$ , 对于排水边界,也可以直接从式(2115)出发方便地得到解析的结果,考察式(2113)及式(2114), 设  $R_e(c_1) > R_e(c_2) > 0$ , 对式(2115)进行 Laplace 变换后,经推导可以得到以下结果:

$$\left( \begin{aligned} s^r &= D_1 \exp\left[-\frac{s}{c_1}(r-a)\right] + D_2 \exp\left[-\frac{s}{c_2}(r-a)\right] \\ \varphi &= D_1 D_1 \exp\left[-\frac{s}{c_1}(r-a)\right] + D_2 D_2 \exp\left[-\frac{s}{c_2}(r-a)\right] \end{aligned} \right) \quad (3110)$$

其中:  $D = -\frac{[(K+2L+a^2M)-Q_i^2]}{AM-Q_i^2}$  ( $i = 1, 2$ ),  $D_1 = \frac{p(s)}{A(s^2+Bs+C)}$ ,  $D_2 = H @$

$D_1$

上式中:

$$A = \frac{K+2L+aM(A+D_1)}{ac_1^2} + H @ \frac{K+2L+aM(A+D_2)}{ac_2^2}$$

$$B = \frac{4L}{a^2} \left[ \frac{1}{c_1} H @ \frac{1}{c_2} \right] / A, C = \frac{4L}{a^3} (1+H) / A$$

$$H = -\frac{c_2^2(A+D_1)}{c_1^2(A+D_2)}$$

设施加荷载  $p(t) = R_0 H(t)$ , 则  $p(s) = R_0/s$ , 代入到势函数  $\varphi_s$  中去, 进行 Laplace 逆变换可得以下结果:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{s1}(r, t) &= \begin{cases} \frac{a^3 R_0}{4(1+H)L} \left\{ 1 - \exp[-GS_1] \left[ \cos\left(\frac{2}{X}XS_1\right) + \frac{G}{X} \sin(XS_1) \right] \right. \\ \quad \left. (S_1 = t - (r-a)/c_1 > 0) \right. \\ 0 & (S_1 = t - (r-a)/c_1 > 0) \end{cases} \\ \varphi_{s2}(r, t) &= \begin{cases} \frac{a^3 R_0 H}{4(1+H)L} \left\{ 1 - \exp[-GS_2] \left[ \cos(XS_2) + \frac{G}{X} \sin(XS_2) \right] \right\} \\ \quad (S_2 = t - (r-a)/c_1 > 0) \\ 0 & (S_2 = t - (r-a)/c_1 > 0) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3111)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_s &= \begin{cases} 0 & (S_1 < 0) \\ \varphi_{s1} & (S_1 < 0, S_2 > 0) \\ \varphi_{s1} + \varphi_{s2} & (S_2 > 0) \end{cases} \\ \varphi &= \begin{cases} 0 & (S_1 < 0) \\ D_1 \varphi_{s1} & (S_1 < 0, S_2 > 0) \\ D_1 \varphi_{s1} + D_2 \varphi_{s2} & (S_2 > 0) \end{cases} e \end{aligned} \right\} \quad (3112)$$

式中:  $G = \frac{B}{2}$ ,  $X = \frac{1}{2} \sqrt{4C - B^2}$ ,

$$H = \frac{G^2 + X^2}{C} = \frac{2C}{B}$$

以上四式表明, 在  $b = 0$  的情况下, 流体  $P_1$  波、 $P_2$  波分别与骨架  $P_1$  波、 $P_2$  波以相同规律传播, 只是势函数的幅值不同。由于  $C_1 > C_2$ , 从而  $S_1 > S_2$ , 即是说,  $P_1$  波总是比  $P_2$  波先到达某点。当  $S_1 = 0$ , 而有  $S_2 < 0$ , 表明  $P_1$  波传到而  $P_2$  尚未传到; 当  $S_2 = 0$  时,  $P_2$  波传到某点, 而  $P_1$  波已在  $S$

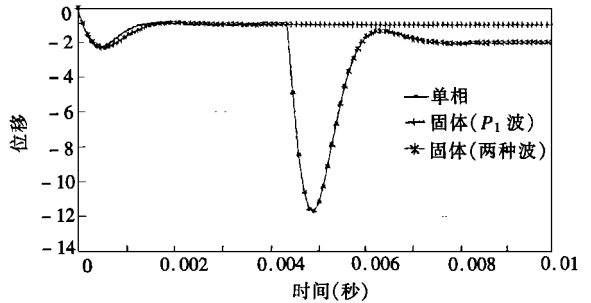


图 3  $r = 3.0a$  处位移曲线

$$= S_1 - S_2 = (r - a) \left[ \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_1} \right] \text{之前传到该点\#}$$

有了位移势函数之后,可进一步确定位移场和应力场\#

$$\text{中: } \begin{aligned} u_{r1}(r, t) &= \frac{a^3 R_0}{4(1+H)Lr^2} \left\{ -1 + \exp[-GS_1] \left[ \cos(XS_1) - \left(\frac{H}{c_1}r - 1\right) \frac{G}{X} \sin(XS_1) \right] \right\} \\ &\quad (S_1 > 0) \\ u_{r2}(r, t) &= \frac{a^3 R_0}{4(1+H)Lr^2} \left\{ -1 + \exp[-GS_2] \left[ \cos(XS_2) - \left(\frac{H}{c_2}r - 1\right) \frac{G}{X} \sin(XS_2) \right] \right\} \\ &\quad (S_2 > 0) \end{aligned} \tag{3113}$$

$$\left. \begin{aligned} w_{r1}(r, t) &= D_1 u_{r1}(r, t) \\ w_{r2}(r, t) &= D_2 u_{r2}(r, t) \end{aligned} \right\} \tag{3114}$$

$$\begin{aligned} R_{r1}(r, t) &= (K + 2L) \left[ -\frac{2}{r} u_{r1} + \frac{a^3 R_0 GH}{4L(1+H)c_1^2 r} \exp[-GS_1] \left( \cos XS_1 - \frac{G}{X} \sin XS_1 \right) \right] + \frac{2K}{r} u_{r1} \\ R_{r2}(r, t) &= (K + 2L) \left[ -\frac{2}{r} u_{r2} + \frac{Ha^3 R_0 GH}{4L(1+H)c_2^2 r} \exp[-GS_2] \left( \cos XS_2 - \frac{G}{X} \sin XS_2 \right) \right] + \frac{2K}{r} u_{r2} \end{aligned} \tag{3115}$$

$$\left. \begin{aligned} p_{f1}(r, t) &= -M(D_1 + A) \frac{a^3 R_0 GH}{4L(1+H)c_1^2 r} \exp[-GS_1] \left( \cos XS_1 - \frac{G}{X} \sin XS_1 \right) \\ p_{f2}(r, t) &= -M(D_2 + A) \frac{Ha^3 R_0 GH}{4L(1+H)c_2^2 r} \exp[-GS_2] \left( \cos XS_2 - \frac{G}{X} \sin XS_2 \right) \end{aligned} \right\} \tag{3116}$$

当  $S_1 < 0$ , 土体无位移产生; 当  $S_1 > 0$  而  $S_2 < 0$  时, 位移场及应力场由  $P_1$  波决定; 当  $S_2 > 0$  时, 位移场及应力场由  $P_1$  波和  $P_2$  波共同决定\#

### k 41 算 例

选用适当参数, 根据以上表达式即可计算场中各点位移及应力\# 球腔半径  $a = 1.0\text{m}$ , 饱和土参数取为:

$$K = 2.74 @ 10^9 \text{kN/m}^2, L = 5.85 @ 10^9 \text{kN/m}^2, M = 5.0 @ 10^8 \text{kN/m}^2, a = 0.53$$

$$Q = 1000.0 \text{kg/m}^3, Q = 2273.0 \text{kg/m}^3, m = 6128.0 \text{kg/m}^3$$

弹性土参数取为:

$$K = 2.74 @ 10^9 \text{kN/m}^2,$$

$$L = 5.85 @ 10^9 \text{kN/m}^2$$

图2和图3分别是  $r = 1.0a$  和  $r =$

$3.0a$  处单相介质中土体位移以及饱和土体中土骨架、流体位移曲线, 图4、图5分别是  $r = 1.0a, r = 3.0a$  处单相介质中应力以及饱和土体分别由  $P_1$  波和  $P_2$  引起的应力及总应力曲线, 图6、图7分别是  $r = 1.0a, r = 3.0a$  处总应力及孔隙压力曲线\#

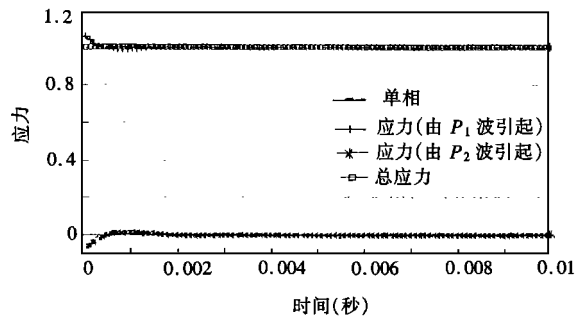


图4  $r = 1.0a$  处应力曲线

各图的时间坐标都为  $S = t - (r - a) / c_d$  或  $S_1 = t - (r - a) / c_1$ , 位移图纵坐标乘以因子  $4 L r^2 / (a^3 R_0)$ , 应力图纵坐标乘以因子  $r / (a R_0)$ , 从而无量纲化#

由图 2、图 3 可以看出: 饱和土中由  $P_1$  波引起的骨架位移和单相介质中由  $P$  波引起的位移十分接近,  $P_2$  波引起的骨架位移比  $P_1$  波所引起的骨架位移大; 由图 3 还可看出: 当  $r = 3.0a$  时, 在某一时刻之前, 该时刻之后,  $P_2$  波也传到  $r = 3.0a$  处, 此时位移由  $P_1$ 、 $P_2$  波共同作用而引起#

从图 4、图 5 也能发现类似图 2、图 3 的波的传播规律, 另外可看出: 饱和土中  $r = a$  处总应力与单相介质应力一致, 这即是问题的求解的应力边界条件;  $r = 3.0a$  处当  $S$  (或  $S_1$ )  $y$  ] 时, 其相介质中应力一致#

由图 6、图 7 可以看出: 孔压消散很快, 对于远场, 如  $r = 3.0a$  处孔压消散有两个过程, 第一个过程是由  $P_1$  波引起的孔压消散, 第二个过程是  $P_2$  波传到后引起的孔压消散#

通过以上对解的分析以及对特殊情形的计算, 可得到以下一些有工程意义的结论:

1、地下结构的动力响应将介质视为单相介质与视为饱和土体(双相介质), 结果是有所不同的, 后者无更客观、合理, 它不但考虑到土骨架的动力响应, 还考虑了流体的动力响应#

2、由于流体的存在, 均匀受压的球形空腔将产生两种应力波:  $P_1$  波和  $P_2$  波#  $P_1$  波和经典弹性力学中单相介质中  $P$  波的性态十分接近, 计算表明: 饱和土体中的应力场主要由  $P_1$  波决定, 但不可视  $P_2$  波的作用, 从位移图上看,  $P_2$  波引起的位移比  $P_1$  波引起的位移大# 可以这么认为: 由于流体的存在, 导致了土骨架位移的放大效应#

3、计算还表明: 随着时间的推移, 当  $t y$  ] 时, 孔压消散为 0, 饱和土中介质位移及应力渐趋稳定, 即此时趋于静态解#

4、对于  $Q_x 0, b X 0$  的一般情形, 可以想见: 由于粘性项的存在, 波在传播的过程中必有粘性衰减# 这种情形同样可以利用本文的方法进行求解, 由于变换域内的解形式很复杂, 难以进

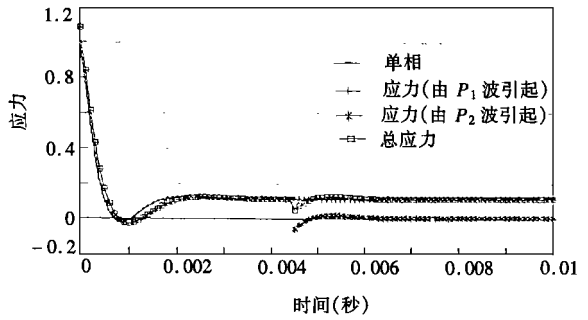


图 5  $r = 2.0a$  处应力曲线

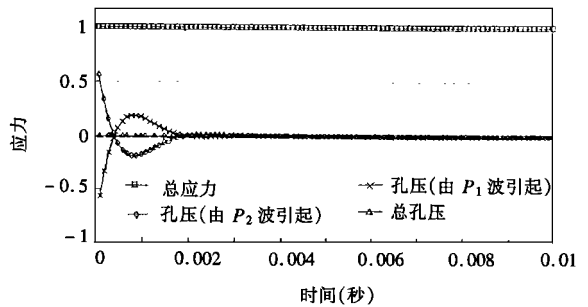


图 6  $r = 1.0a$  处孔隙压力曲线

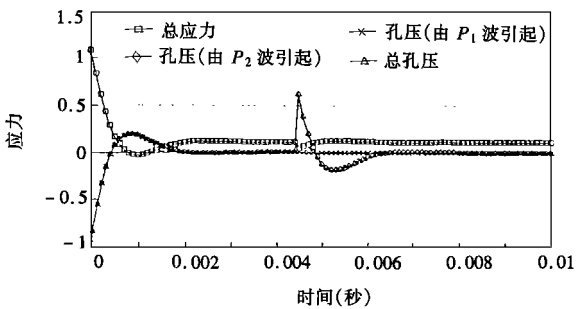


图 7  $r = 3.0a$  处孔隙压力曲线



行 Laplace 逆变换直接得解析的结果,需采用数值方法进行 Laplace 逆变换,这方面的工作目前正在开展#

### 参 考 文 献

- 1 M. A. Biot, General theory of three-dimensional consolidation, J. Appl. Phys., 12 (1941), 155) 164.
- 2 M. A. Biot, Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, J. Acoust Soc. Am., 28 (1956), 179- 191.
- 3 M. R. Haplern and P. Christiano, Steady-state response of a rigid plate bearing on a liquid-saturated poroelastic half-space, Earthquake Eng. Struct. Dyn., 14 (1986), 439) 454.
- 4 A. J. Philippacopoulos, Lamb's problem for fluid-saturated porous media, Bull. Seis. Soc. Am., 78 (1988), 908) 923.
- 5 M. K. Amir, et al., Fundamental solutions of Biot's equations of dynamic poroelasticity, Int. J. Engng. Sci., 31 (1993), 817) 830.
- 6 杨桂通、张善元编,5弹性动力学6,中国铁道出版社,北京(1988).
- 7 O. C. Zienkiewicz, C. T. Chang and P. Bettess, Drained, undrained, consolidating and dynamic behavior assumptions in soils, Geotechnique, 30 (1980), 385) 395.

### Spherical Wave Propagation in Saturated Soils

Xu Changjie Wu Shiming

(Department of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, 310027, P. R. China)

#### Abstract

Based on the generally adopted soil model for engineering, an analytic solution of spherical wave propagation problem in a special case for an equally pressurized spherical cavity in saturated space by Laplace transformation which is compared with that of the same problem in a one-phase elastic space. The influence of fluid on dynamic response of saturated soil is examined. The authors propose an effective way for dynamic analysis of underground structure.

Key words spherical wave, wave propagation, saturated soils, spherical cavity, dynamic response