应用数学和力学, 第 19 卷 第 3 期(1998 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

广义 Kuramoto_Sivashinsky 方程吸引子的分形结构

戴正德　　郭柏灵　　林国广

(张鸿庆推荐, 1996 年 7 月 7 日收到, 1997 年 9 月 10 日收到修改稿)

摘　　要

首先给出广义 Kuramoto_Sivashinsky(GKS)方程周期初边值问题在 H^2 空间惯性集的构造, 进而给出并证明 GKS 方程吸引子的分形结构, 同时发现吸引子的一个分形局部化指数型逼近序列　上述结果精细和推进了[1, 3, 5, 7] 关于惯性集和吸引子的结论, 刻划了吸引子的一种几何结构

关键词　广义 KS 方程　吸引子　惯性集　分形
中图分类号　O175

1　引　　言

由于谱锁定条件, 对于许多非线性耗散发展方程, 惯性流形的存在至今仍是尚未解决的问题　近来, Eden[5] 等发现, 非线性耗散发展方程, 包括二维 Navier_Stokes 方程, 确定的非线性半群若在某个紧正向不变集上 Lipschitz 连续且收缩, 则存在有限分形维惯性集, 它是由分形集和吸引子的并构成　另一方面, 由于吸引子在研究非线性耗散系统解的长时间性态中具有特别重要的作用, 因此对吸引子结构研究一直成为无穷维动力系统研究的基本问题　近年来[6~8], 人们寻求用惯性流形, 近似惯性流形作为吸引子的一种局部化, 对具有双曲型基本谱的算子半群, 其吸引子结构也有过研究[6], 本文直接利用惯性集构造, 给出并证明了吸引子的一种分形结构, 同时得到吸引子的一个分形局部化指数型逼近序列　全文分为四部分, 第一段是预备知识, 第二段给出 GKS 方程惯性集存在性证明, 第三段证明了 GKS 方程解的锥性质, 主要结果在最后一段给出

2　预备知识

文[1] 研究了 GKS 方程周期初边值问题:

$$u_t + \quad u_{xx} + \quad u_{xxx} + \quad u_{xxxx} + f(u)_x + \quad (u)_{xx} = g(u) + h(x) \tag{2.1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{2.2}$$

国家自然科学基金和云南省基金资助的课题

云南大学数学系, 昆明 650091
北京 8009 信箱, 北京 100088

$$u(x-D,t)=u(x+D,t) \quad (x \quad R, t>0) \tag{2 3}$$

其中 $0, \quad > 0, D > 0$

在[1]中有如下结果

定理1[1] 设

( ) $f(u) \quad C^4, \ (u), g(u) \quad C^3$, 且 $|f(u)| \quad A|u|^p \quad (1 \quad p \quad 7)$; $| \quad (u)| < B|u|^q \quad (0 \quad q < 4)$; $(u) \quad _0 \ (\ _0 > 0)$

( ) $g(0)=0, g(u) \quad g_0, g_0 < -\dfrac{+ \ _0+1}{2}, \quad > \dfrac{1}{2}(\ + \ _0)$

( ) $D_x^j h(x) \quad L^2(\ ) \quad (j=0,1,2,3)$

( ) $u_0(x) \quad H^2(\ ) \quad (\ =\{x \mid x \quad (-D,D)\})$

则问题(2 1) ~ (2 3)存在紧吸收集 $B_0 \quad H^2(\ )$, 因而存在整体紧吸引子 $\mathscr{A} \ H^2(\ )$ 其中

$$B_0=\left\{u \quad H^2(\ ), \ |u|_{L^2} \quad E_0, \ |u_x|_{L^2} \quad E_1, \ |u_{xx}|_{L^2} \quad E_2\right. \tag{2 4}$$

关于非线性发展方程, 如果在Hilbert空间 X 中存在紧吸引子 $\mathscr{A}$, 则关于惯性集有如下定理

定理2[5, 9] 设 u 是如下问题的解:

$$\frac{du}{dt}+Au+R(u)=f(x) \quad (x \quad R, t>0)$$

$$u(x,0)=u_0(x)$$

$$u(x-D,t)=u(x+D,t) \quad (x \quad R, t>0)$$

在空间 X 中满足下述条件

( ) 存在非线性半群 $S(t)$ 和紧吸引子 $\mathscr{A}$

( ) 关于 $S(t)$ 存在紧正向不变集 B

( ) $S(t)$ 在 B 中Lipschitz连续且收缩(定义见[5], [9]), 则存在惯性分形集 M:

$$M=\ _{0 \ t \ t_*} S(t)M_*$$

耿国 $M_* = \mathscr{A} \ \left(\ _{j=1} \ _{k=1} S^j(t_*)(E^{(k)})\right)$

且有 $d_F(M) \quad CN_0+1 \quad$ (分形维有限)

$\mathrm{dist}_X(S(t)B, M) \quad C_0\exp[- \ C_1 t]$

其中 $E^{(k)}= \ _{\substack{j_1=1 \\ j_{k-1}=1}}^{k_0} E_{k,j_1, \ ,j_{k-1}}$, 而 $E_{k,j_1, \ ,j_{k-1}}$ 表示紧集 $S(t_*)(B^{k-1}R(a_{j_1, \ ,j_{k-1}})$ $S^{k-1}(t_*)B)$ 中满足锥性质

$$u-v \quad _{H^2} \quad \sqrt{2} \quad P_N(u-v) \quad _{H^2} \quad (\quad u,v \quad E_{k,j_1, \ ,j_{k-1}}) \tag{2 5}$$

的点的极大集; $a_{j_1, \ ,j_{k-1}} \quad E_{k-1,j_1, \ ,j_{k-2}}, (j_1, \quad ,j_{k-1} \quad \{1,2, \quad ,k_0\}), B^{k-1}R(a_{j_1, \ ,j_{k-1}})$ $S^{k-1}(t_*)B$ 递归地由 $S^{k-1}(t_*)B$ 的覆盖得到, $B^{k-1}R(a_{j_1, \ ,_{k-1}})$ 表示以 $a_{j_1, \ ,j_{k-1}}$ 为中心, ^{k-1}R 为半径复盖 $S^{k-1}(t_*)B$ 的小球, $k_0, \ , R$ 是正常数, $0 < \quad < 1$, t_* 为某一固定正数 而算子 A 是 X 空间无界自共轭正算子, 具有紧逆算子, P_N 为 X 空间秩为 N 的正交投影算子 C_0, C_1, C 为与 B 中元素无关的正常数

3 惯 性 集

为计算简便, 设 $D = \frac{1}{2}$

命题 1[9] 存在 $t_0 > 0$, 使得

$$B = \overline{\quad_{0 \quad t \quad t_0} S(t) B_0} \tag{3 1}$$

是 $S(t)$ 在 $H^2(\quad)$ 中紧的正向不变吸收集, 且是凸的, 记 $A = \quad ^4/\quad x^4$, 其相应周期边值问题特征值 $\quad_1, \quad_2, \quad, \quad_N, \quad$, 对应特征函数记为 $\quad_1, \quad_2, \quad, \quad_N, \quad$, 设 P_N 为 $L^2(\quad)$ 到 span$\{\quad_1, \quad, \quad_N\}$ 上投影算子, 由 P_N 与 $A \ (\quad > 0)$ 可换性知它也是 $H^2(\quad)$ 中秩为 N 的投影算子且与 $Q \quad I - P_N$ 正交 显然 $\quad_N = (2 \quad N)^4$

命题 2 在定理 1 条件下, 问题(2 1) ~ (2 3) 定义的非线性半群 $S(t)$ 在 B 中 Lispschitz 连续且收缩

证明 由命题 1 可设 $B = \{u \quad H^2(\quad); | u |^2 \quad e_0, | u_x |^2 \quad e_1, | u_{xx} |^2 \quad e_2\}$, 其中 $| \ |$ 表示 $L^2(\quad)$ 范数, 若 u, v 是(2 1) 的任意两个解, $u_0, v_0 \quad B$, 则由 B 的不变性知, 对一切 $t \quad 0, u(t), v(t) \quad B$ 记 $w = u - v$, 有

$$\begin{aligned} & w_t + \quad w_{xx} + \quad w_{xxx} + \quad w_{xxxx} + (f(u) - f(v))_x \\ & \quad + (\quad (u) - \quad (v))_{xx} = g(u) - g(v) \end{aligned} \tag{3 2}$$

令 $\quad (t) = \frac{| w_{xx}(t) |^2}{| w(t) |^2}, \quad (t) = w(t)/ | w(t) |$, 由于

$(\quad (t) w, (A - \quad (t)) w) = 0$ 和 $(\quad w_{xxx}, (A - \quad (t)) w) = 0$, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \quad (t) &= \frac{1}{| w |^2} (w_t, (A - \quad (t)) w) = \frac{1}{| w |^2} (- \quad Aw + R(v) - R(u), (A - \\ & \quad (t)) w) \\ &= - \quad | (A - \quad (t)) \quad |^2 + \left(\frac{R(v) - R(u)}{| w |}, (A - \quad (t)) \quad \right) \\ & \quad - \frac{}{2} | (A - \quad (t)) \quad |^2 + \frac{| (R(u) - R(v) |^2}{2 \quad | w |^2} \end{aligned} \tag{3 3}$$

其中

$$R(u) - R(v) = \quad w_{xx} + (f(u) - f(v))_x + (\quad (u) - \quad (v))_{xx} + g(u) - g(v)$$

利用[1, 2] $| w |_L \quad \sqrt{2} | w | + \sqrt{2} | w |^{\frac{1}{2}} | w_x |^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt{2} e_0^{1/2} (e_0^{1/2} + e_1^{1/2}) \quad e_0$

$| w_x |_L \quad | w_{xx} | \quad e_2^{1/2}$

和 $(F(u) - F(v), u - v)$ 的处理技巧[2] (F 为任何充分光滑函数), 我们有:

$$| (f(u) - f(v))_x | = | f \ (u) u_x - f \ (v) v_x | = | f \ (u) w_x + w \int_0^1 f \ (\quad) d \quad v_x |$$

$$c_1 \quad ^{-\frac{1}{2}}_1 | w_{xx} | + c_2 e_2 | w | \quad c | w_{xx} |$$

其中, c 仅与 $| f \ (u) |_L, | f \ (\quad) |_L$, 有关的常数, 其中 $\quad = \quad u + (1 - \quad) v (0 \quad \quad 1)$, 由 B 凸知 $\quad B$, 由于 $u, v \quad H^2(\quad)$, 故 $| u |_L, | v |_L$ 有界, 从而 $f^{(j)}(\quad), \quad ^{(j)}(\quad), g^{(j)}(\quad) (0 \quad j \quad 4)$ 的 L 范均为一常数所界, 如无特别说明以下均设 c_j 为与 w 无关的常数 $(1 \quad j \quad 16)$ 类似有:

$$|(\ (u)-\ (v))_{xx}|=|\ (u)(u_x+\ v_x)w_x+\ wv_x^2\int_0^1\ (\ )d$$

$$+\ (u)w_{xx}+\ wv_{xx}\int_0^1\ (\ )d\ |\ \ c_1|\ w_{xx}|$$

其中已利用 $|\ wv_{xx}|=|\ w_xv_x|\ \ |v_x|_L\ |w_x|\ \ e_2|\ w_x|\ \ e_2\ {}_1^{1/4}|\ w_{xx}|$

类似处理 $|\ g(u)-\ g(v)|$, 结合上面各式, 由(3 3) 有

$$|\ R(u)-\ R(v)|^2\ \ c_2|\ w_{xx}|^2$$

和
$$\frac{d}{dt}\ (t)\ \ \frac{c_2}{}\ (t) \tag{3 4}$$

将(3 2)与 w 相乘在(− 1/ 2, 1/ 2) 上取内积有

$$\frac{1}{2}\frac{d|\ w\ |^2}{dt}+\ \ |\ w_{xx}|^2+(\ \ w_{xx},\ w)+((f(u)-f(v))_x,\ w)$$

$$+((\ \ (u)-\ \ (v))_{xx},w)=(g(u)-\ g(v),\ w)$$

利用 Cauchy 不等式, Young 不等式得到

$$\frac{d}{dt}|\ w\ |^2+\ \ |\ w_{xx}|^2\ \ c_3|\ w\ |^2 \tag{3 5}$$

从而
$$\frac{d}{dt}|\ w\ |^2+(\ \ (t)-\ c_3)|\ w\ |^2\ \ 0 \tag{3 6}$$

又
$$\frac{d}{dt}\ (t)=\frac{1}{|\ w\ |^2}\frac{d}{dt}|\ w_{xx}|^2-\frac{|\ w_{xx}|\frac{d}{dt}|\ w\ |^2}{|\ w\ |^4}\ \ \frac{1}{|\ w\ |^2}\frac{d}{dt}|\ w_{xx}|^2$$

$$+(\ \ (t)-\ c_3)\frac{|\ w_{xx}|^2}{|\ w\ |^2}$$

结合(3 4) 有

$$\frac{d}{dt}|\ w_{xx}|^2+(\ \ (t)-\ c_3-\ \frac{c_2}{})|\ w_{xx}|^2\ \ 0 \tag{3 7}$$

对(3 5), (3 7) 利用 Gronwall 不等式, 注意 $|\ w\ \ |^2\ \ \frac{1}{2}|\ w\ |^2+\frac{1}{2}|\ w\ \ |^2$, 有

$$|\ w(t)|_{H^2}^2\ \ \frac{3}{2}(|\ w(t)|^2+|\ w_{xx}(t)^2|)\ \ {}^2(t)(|\ w(0)|^2$$

$$+|\ w_{xx}(0)|^2)\ \ {}^2(t)|\ w(0)|_{H^2}^2 \tag{3 8}$$

其中
$$(t)=\sqrt{3}\exp\left\{-\ \frac{}{2}\int_0^t\ (\ )d\ +\ c_3t+\ \frac{c_2}{}t\right\} \tag{3 9}$$

注意对任意固定的 t_*, $(t_*)>0$, 从而 $(t_*)\ \ \sqrt{3}\exp[c_3t_*+\ c_2\ {}^{-1}t_*]$, 这表明 $S(t)$ 在 B 上 Lipschitz 连续

(3 4) 两边在$(0, t_*)$上积分, 有

$$(t_*)\ \ \exp\left[\frac{c_2}{}(t_*-\ t)\ \ (t)\right.$$

即

$$(t)\ \ \exp\left[\frac{c_2}{}(t_*-\ t)\ \ (t_*)\right. \tag{3 10}$$

从而
$$\int_0^{t_*}\ (t)dt\ \ \frac{(t_*)}{c_2}\left(1-\ \exp\left[-\ \frac{c_2}{}t_*\right]\right.$$
由

取定 $t_*=\frac{}{c_2}$, 则 $1-\ \exp\left[-\ \frac{c_2}{}t_*\right]>\frac{1}{2}$, 再从(3 9) 有

凸
$$(t_*)=\sqrt{3}\exp\left\{-\text{am}\frac{{}^2\ (t_*)}{4c_2}+\ \frac{c_3}{c_2}+\ 1\right\} \tag{3 11}$$

利用[5]中技巧, 注意 $_{N_0+1} = [2 \quad (N_0+1)]^4$, 当 (t_*) $_{N_0+1}$, 且

$$N_0 > \frac{[c_2(1+c_2^{-1}c_3 \quad + \ln 8\sqrt{3})]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2} \quad \sqrt{\ }} - 1 \tag{3 12}$$

时, 有 $(t_*) < 1/8$, 这就证明了收缩性

结合定理 2, 命题 1, 命题 2, 我们得到

定理 3 在定理 1 条件下, $S(t)$ 在 $H^2(\ )$ 中存在紧惯性分形集 M, 只要 N_0 满足(3 12) 而 t_* 取定为$\frac{}{c_2}$

4 解的锥性质

引理 1 在定理 1 条件下, 若又设 $u_0(x)$ $H^3(\ )$, 我们有下列估计

$$| u_{xxx} |^2 \quad \exp[2 \quad _0 t] | u_{0xxx} |^2 + \frac{3}{| \quad _0 |} | h_x |^2 + \frac{c_4}{2 | \quad _0 |} \tag{4 1}$$

其中, $_0 = g_0 + \frac{^0}{2} + \frac{}{3} < 0$; c_4 是仅与 $|u_x|$, $|u_{xx}|$, $|\quad|_L$, $|\quad|_L$, $|f(u)|_L$, $|f(u)|_L$, e_1, e_2, 有关的常数

证明 将(2 1)与 u_{x^6}取内积有

$$(u_{x^6}, u_t + \quad u_{xx} + \quad u_{x^3} + \quad u_{x^4} + f(u)_x + \quad (u)_{xx} - g(u) - h(x)) = 0$$

利用 $$(u_{x^6}, \quad u_{x^3}) = \quad | u_{x^4} |^2 \quad \frac{}{2} | u_{x^5} |^2 \quad (\ _1 = 2 \ )$$

$$(u_{x^6}, \quad u_{x^4}) = \quad | u_{x^5} |^2$$

$$| (u_{x^6}, \quad (u)_x | = | (u_{x^5}, f(u)_{xx} | \quad \frac{}{24} | u_{x^5} |^2 + C_5$$

$$| (u_{x^6}, \quad (u)_{xx}) | = | (u_{x^5}, \quad (u) u_{xxx} + 3 \quad (u) u_x u_{xx} + \quad (u) u_{x^3}) |$$

$$| (U c(u) u_{x^3}, u_{x^5}) | [\frac{U_0}{2} | u_{x^3} |^2 + \frac{U_0}{2} | u_{x^5} |^2$$

$$| (u_{x^5}, 3 U d(u) u_x u_{xx}) | [\frac{A}{24} | u_{x^5} |^2 + C_6$$

$$| (u_{x^5}, U u_{x^3}) | [| u_{x^5} | | U |_L] | u_x |_L^2] | u_x | [\frac{A}{24} | u_{x^5} |^2 + C_7$$

$$(u_{x^6}, g(u)) = - (u_{x^3}, gc(u) u_{x^3} + 3 gd(u) u_x u_{xx} + g \quad (u) u_{x^3})$$

$$(u_{x^3}, gc(u) u_{x^3}) [g_0 | u_{x^3} |^2$$

类似 $(u_{x^6}, U(u)_{xx})$ 的处理有

$$| (u_{x^3}, 3 gd(u) u_x u_{xx} + g \quad (u) u_{x^3}) | [\frac{A}{3} | u_{x^3} |^2 + c_8$$

又 $$| (u_{x^6}, h(x)) | = | (u_{x^5}, hc(x) | [\frac{A}{24} | u_{x^5} |^2 + \frac{6}{A} | hc(x) |^2$$

综合以上各式有

$$4 \qquad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} | u_{x^3} |^2 + \left(C - \frac{A}{2P} - \frac{U_0}{2} - \frac{A}{8} \right) | u_{x^5} |^2$$
$$[\left(g_0 + \frac{U_0}{2} + \frac{A}{2} \right. | u_{x^3} |^2 + c_4 + \frac{6}{A} | hc |^2 \tag{4 1 2}$$

利用 $\frac{A}{2P} + \frac{A}{8} < \frac{7A}{24}$, 有 $C - \frac{U_0}{2} - \frac{A}{2P} - \frac{A}{8} > C - \frac{U_0}{2} - \frac{7A}{24} > C - \frac{U_0}{2} - \frac{A}{2} > 0$

再注意: $g_0 + \frac{U_0}{2} + \frac{A}{3} < - \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{6} \right.$, K

由(412)利用 Gronwall 不等式得到(411)

注: 从引理 1 特别推得 $| u_{x^3} |^2 [\ e_3, e_3$ 是与 t 无关的常数 #

记 $B_0 = \{ u \ I \ H^2(8), | u |^2 [\ e_0, | u_x |^2 [\ e_1, | u_{xx} |^2 [\ e_2, | u_{xxx} |^2 [\ e_3 \}$, 则 B_0 为 $H^2(8)$ 中 $S(t)$ 的紧吸收集, 类似构造正向不变紧凸吸收集: 不失一般仍记为 $B = \overline{\underset{0 [t [t_0}{G} S(t) B_0}$ #

为简便起见, 当 $u \ I \ B$ 时, 有 $| u |^2 [\ e_0, | u_{x^3} |^2 [\ e_j (1 [\ j \ [\ 3)$, 下面的定理是基本的:

定理 4 在引理 1 的条件下, 若存在 t_0 使 $+ p(t_0) +_{H^2} = \ + q(t_0) +_{H^2}$, 则当 N 满足

$$N^3 > \frac{1}{32 CP^4} \max \{ e_0, e_1, e_2 \} \tag{413}$$

时, 对一切 $t \setminus t_0$ 有

$$+ q(t) +_{H^2} [\ + p(t) +_{H^2} \tag{414}$$

从而

$$+ w(t) +_{H^2} [\ \sqrt{2} + P_N w(t) +_{H^2} \tag{415}$$

其中, $p(t) = P_N w(t), q(t) = Q_N w(t); w(t) = u_1(t) - u_2(t), u_1(t), u_2(t)$ 是(211) 的任意两个解且 $u_1(0), u_2(0) \ I \ B, e_0, e_1, e_2$ 见(4111), (4119), (4125)#

证明 $p(t), q(t)$ 满足方程

$$\frac{dq}{dt} + Aq_{xx} + Bq_{xxx} + Cq_{xxxx} + Q_N(R(u_1) - R(u_2)) = 0 \tag{416}$$

$$\frac{dp}{dt} + Ap_{xx} + Bp_{xxx} + Cp_{xxxx} + P_N(R(u_1) - R(u_2)) = 0 \tag{417}$$

其中, $R(u) = f(u)_x + U(u)_{xx} - g(u)$

估计分三步:

第一步: $| q(t) | - | p(t) |$ 的估计

改写 $R(u) - R(v) = f^c(u) w_x + u_{2x} w \int_0^1 f^d(N) dS + U^c(u_1) w_{xx} + u_{2xx} w \int_0^1 U^d(N) dS$

$$+ U^d(u_1)(u_{1x} + u_{2x}) w_x + u_{2x}^2 w \int_0^1 U(N) dS - w \int_0^1 g^c(N) dS \tag{418}$$

用 q 乘(416), p 乘(417), 在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ 上积分后相减得到:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [| q |^2 - | p |^2] + C | q_{xx} |^2 - C | p_{xx} |^2 - A | q_x |^2 + A | p_x |^2$$
$$= - (Q_N(R(u_1) - R(u_2)), q) + (P_N(R(u_1) - R(u_2)), p) \tag{419}$$

估计 $(Q_N(R(u_1) - R(u_2)), q)$, 对 $(P_N(R(u_1) - R(u_2)), p)$ 类似 #

$$| (f^c(u_1) w_x, q) | [\ | f^c |_{L^]} | w_x | | q | [\ \frac{A}{8} | q_x |^2 + \frac{A}{8} | p_x |^2 + \frac{4c_9}{A} | q |^2$$

$$| (u_{2x} w \int_0^1 f^d dS, q) | [\ c_{10} | u_{2x} |_{L^]} | w | | q | [\ c_{10} e_2^{1/2} | q |^2$$
$$+ \frac{c_{10} e_2^{1/2}}{2} (| p |^2 + | q |^2)$$

$$(Uc(u_1)w_{xx}, q) = -(Ud(u_1)u_{1x}w_x, q) - (Uc(u_1)w_x, q_x)$$

故 $$|(Uc(u_1)w_{xx}, q)| \le \frac{3U_0}{2}|q_x|^2 + \frac{U_0}{2}|p_x|^2 + \frac{A}{8}|q_x|^2 + \frac{A}{8}|p_x|^2 + \frac{4c_{11}^2e_2}{A}|q|^2$$

$$\left|\left(u_{2xx}w\int_0^1 Ud(N)dS, q\right)\right| \le c_{11}|u_{2xx}|_{L^?}|w||q|$$

$$\le c_{11}e_3^{1/2}\left(\frac{3}{2}|q|^2 + \frac{1}{2}|p|^2\right)$$

$$|(Ud(u_1)(u_{1x} + u_{2x})w_x, q)| \le 2c_{11}e_2^{1/2}|w_x||q|$$

$$\le \frac{A}{8}|q_x|^2 + \frac{A}{8}|p_x|^2 + \frac{16c_{11}^2e_2}{A}|q|^2$$

$$\left|\left(u_{xx}^2w\int_0^1 U(N)dS, q\right)\right| \le c_{12}e_2\left(\frac{3}{2}|q|^2 + \frac{1}{2}|p|^2\right)$$

$$\left|\left(w\int_0^1 qcdS, q\right)\right| \le c_{13}|w||q| \le c_{13}\left(\frac{3}{2}|q|^2 + \frac{1}{2}|p|^2\right)$$

在所有上面估计中将 p, p_x 分别代以 q, q_x, 有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|q|^2 - |p|^2] + C|q_{xx}|^2 - C|p_{xx}|^2 - A|q_x|^2 + A|p_x|^2$$

$$\le 2U_0|q_x|^2 + 2U_0|p_x|^2 + A(|q_x|^2 + |p_x|^2) + e_0(|p|^2 + |q|^2) \tag{4.10}$$

其中 $$Ae_0 = 4c_9^2 + 2Ac_{10}e_2^{1/2} + 4C_{11}^2e_2 + 2Ac_{11}e_3^{1/2} + 16e_2c_{11}^2 + 2c_{12}Ae_2 + 2Ac_{13} \tag{4.11}$$

利用 $|q_{xx}|^2 \ge K_{N+1}^{1/2}|q_x|^2 \ge K_{N+1}|q|^2$, $|p_{xx}|^2 \le K_N^{1/2}|p_x|^2 \le K_N|p|^2$ 和 $K_N = (2PN)^4$,

有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|q|^2 - |p|^2] + [K_{N+1}^{1/2}(CK_{N+H}^{1/2} - 2U_0 - 2A) - e_0]|q|^2$$

$$- [K_N^{1/2}(CK_N^{1/2} + 2U_0) + e_0]|p|^2 \le 0 \tag{4.12}$$

当 N 满足 $$CK_{N+1} - 2(U_0 + A)K_{N+1}^{1/2} - CK_N - 2U_0K_N^{1/2} > 2e_0 \tag{4.13}$$

时对一切 $t \ge t_0$ 有

$$\left.\frac{d}{dt}[|q|^2 - |p|^2]\right|_{t=t_0} \le -2[CK_{N+1} - 2(U_0 + A)K_{N+1}^{1/2}$$

$$- CK_N - 2U_0K_N^{1/2} - 2e_0]|g(t_0)|^2 < 0 \tag{4.14}$$

故有 $$|q(t)|^2 \le |p(t)|^2 \qquad (Pt \ge t_0)$$

注意(4.13)成立的一个充分条件是

$$4(2P)^4cN^3 + 4P^2[24P^2cN^2 + 16P^2NC + 4P^2c - (4U_0 + 2A)(N^2 + 2N + 1)] > 2e_0 \tag{4.15}$$

利用 $2C > U_0 + A$, $4P^2 > 36$, (4.15) 方括号内为正, 故(4.15) 成立的一个充分条件是只要 N 满足

$$32P^4cN^3 > e_0 \tag{4.16}$$

当(4.16) 成立时, 有 $|q(t)|^2 \le |p(t)|^2 \quad (Pt \ge t_0)$

第二步: $|q_x|^2 - |p_x|^2$ 的估计

分别用 q_{xx}, p_{xx} 乘(4.6), (4.7) 且在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上积分后相减有

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|q_x|^2-|p_x|^2]+C|q_{xxx}|^2-C|p_{xxx}|^2-A|q_{xx}|^2+A|p_{xx}|^2\\
&-(Q_N(R(u_1)-R(u_2)),q_{xx})+(P_N(R(u_1)-R(u_2)),p_{xx})=0\\
&(U'(u_1)w_{xx},q_{xx})\le\frac{3U_0}{2}|q_{xx}|^2+\frac{1}{2}U_0|p_{xx}|^2\\
&(U''(u_1)(u_{1x}+u_{2x})w_x,q_{xx})\le\frac{A}{6}|q_{xx}|^2+\frac{6c_{11}^2e_2}{A}(|p_x|^2+|q_x|^2)\\
&(u_{2x}^2\int_0^1 U'''(N)dS,w,q_{xx})\le\frac{A}{6}|q_{xx}|^2+\frac{3c_{12}^2e_2^2}{A}(|p_x|^2+|q_x|^2)
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.17}
$$

其中已利用 $|w|^2\le(2P)^{-1}|w_x|^2\le|w_x|^2$,

$$\left(u_{2xx}w\int_0^1 U''(N)dS,q_{xx}\right)\le\frac{A}{6}|q_{xx}|^2+\frac{3c_{11}^2e_3}{A}\left(|p_x|^2+|q_x|^2\right)$$

$$\left(w\int_0^1 g'(N)dS,q_{xx}\right)\le\frac{A}{6}|q_{xx}|^2+\frac{3c_{13}^2}{A}\left(|p_x|^2+|q_x|^2\right)$$

$$(f'(u_1)w_x,q_{xx})\le\frac{A}{6}|q_{xx}|^2+\frac{3c_9^2}{A}(|p_x|^2+|q_x|^2)$$

$$\left(u_{2x}w\int_0^1 f''(N)dS,q_{xx}\right)\le\frac{A}{6}|q_{xx}|^2+\frac{3c_{10}^2e_1}{A}(|p_x|^2+|q_x|^2)$$

以 p_{xx} 代 q_{xx}, 类似得到 $(P_N(R(u_1)-R(u_2)),p_{xx})$ 估计, 从而最后有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|q_x|^2-|p_x|^2]+C|q_{xxx}|^2-C|p_{xx}|^2-A|q_{xx}|^2+A|p_{xx}|^2\\
&\le(2U_0+A)(|q_{xx}|^2+|p_{xx}|^2)+e_1(|p_x|^2+|q_x|^2)
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

其中

$$Ae_1=12c_{11}^2e_2+6c_{11}^2e_3+6c_{12}^2e_2^2+6c_{13}^2+6c_9^2+6c_{10}^2e_1 \tag{4.19}$$

利用类似对 $|q|^2-|p|^2$ 的处理技巧, 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|q_x|^2-|p_x|^2]+[K_{N+1}^{1/2}(CK_{N+1}^{1/2}-2U_0-2A)-e_1]|q_x|^2\\
&-[K_N^{1/2}(CK_N^{1/2}+2U_0)+e_1]|p_x|^2\le 0
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

当
$$32P^4cN^3>e_1 \tag{4.21}$$
时, 只要 $|q_x(t_0)|=|p_x(t_0)|$, 则对一切 $t\ge t_0$ 有

$$|q_x(t)|^2\le|p_x(t)|^2$$

第三步: $|q_{xx}|^2-|p_{xx}|^2$ 的估计

分别用 q_{xxx},p_{xxx} 乘以(4.6), (4.7) 且在 $(-1/2,1/2)$ 上积分后相减

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|q_{xx}|^2-|p_{xx}|^2]+C|q_{xxxx}|^2-C|p_{xxxx}|^2-A|q_{xxx}|^2+A|p_{xxx}|^2\\
&=(Q_N(R(u_1)-R(u_2)),q_{xxxx})-(P_N(R(u_1)-R(u_2)),p_{xxx})
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

估计 $(Q_N(R(u_1)-R(u_2)),q_{xxxx}))$, 分部积分一次, 有

$$
\begin{aligned}
(R(u_1)-R(u_2))_x={}&U'(u_1)w_{xxx}+u_{2xxx}w\int_0^1 U''(N)dS+U(u_1)(u_{1x}^2+u_{1x}u_{2x}\\
&+u_{2x}^2)w_x+wu_{2x}^3\int_0^1 U^{(4)}(N)dS+3U''(u_1)u_{1xx}w_x
\end{aligned}
$$

$$+3\varphi'''(u_1)u_{2x}w_{xx}+3u_{2x}u_{2xx}w\int_0^1\varphi^{(4)}(\theta)dS+f''(u_1)w_{xx}$$

$$+u_{2xx}w\int_0^1 f'''(\theta)dS+f'''(u_1)(u_{1x}+u_{2x})w_x$$

$$+u_{2x}^2w\int_0^1 f^{(4)}(\theta)dS-g''(u_1)w_x-u_{2x}w\int_0^1 g'''(\theta)dS \tag{4.23}$$

有: $(\varphi''(u_1)w_{xx},q_{xxx})\le\frac{3\varphi_0}{2}|q_{xxx}|^2+\frac{\varphi_0}{2}|p_{xxx}|^2$

$$\left(u_{2xxx}w\int_0^1\varphi'''(\theta)dS,q_{xxx}\right)\le c_{11}|u_{2xxx}||w|_{L^\infty}|q_{xxx}|\le c_{11}e_3^{1/3}|w_x||q_{xxx}|$$

$$\le\frac{\nu}{16}|q_{xxx}|^2+\frac{8c_{11}^2e_3}{\nu}(|q_{xx}|^2+|p_{xx}|^2)$$

上式已利用 $|w|_{L^\infty}\le\sqrt2|w|^{1/2}(|w|^{\frac12}+|w_x|^{\frac12})\le\frac{\sqrt2}{\sqrt{2\pi}}|w_x|^{\frac12}\left(|w_x|^{\frac12}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|w_x|^{\frac12}\right)\le\frac{2}{\sqrt\pi}|w_x|\le|w_{xx}|$,$\left(注意|w_x|\le\frac{1}{2\pi}|w_{xx}|\le|w_{xx}|\right)$

$$(\varphi''(u_1)w_x(u_{1x}^2+u_{1x}u_{2x}+u_{2x}^2),q_{xxx})\le3c_{12}|w_x|e_2|q_{xxx}|$$

$$\le\frac{\nu}{16}|q_{xxx}|^2+\frac{72c_{12}^2e_2^2}{\nu}(|p_{xx}|^2+|q_{xx}|^2)$$

$$\left(wu_{2x}^3\int_0^1\varphi^{(4)}(\theta)dS,q_{xxx}\right)\le c_{14}|u_{2x}|_{L^6}^3|w|_{L^\infty}|q_{xxx}|$$

$$\le c_{14}|u_{2x}|^2|u_{2xx}||w_x||q_{xxx}|$$

$$\le\frac{\nu}{16}|q_{xxx}|^2+\frac{8c_{14}^2e_1^2e_2}{\nu}(|p_{xx}|^2+|q_{xx}|^2)$$

$$(3\varphi'''(u_1)u_{1xx}w_x,q_{xxx})\le3c_{11}e_2^{1/2}|w_{xx}||q_{xxx}|$$

$$\le\frac{\nu}{16}|q_{xxx}|^2+\frac{72c_{11}^2e_2}{\nu}(|p_{xx}|^2+|q_{xx}|^2)$$

$$\left(3u_{2x}u_{2xx}w\int_0^1\varphi^{(4)}(\theta)dS,q_{xxx}\right)\le3c_{12}|u_{2x}|_{L^\infty}|w|_{L^\infty}|u_{2xx}||q_{xxx}|$$

$$\le3c_{12}e_2^{1/2}|w_{xx}||q_{xxx}|$$

$$\le\frac{\nu}{16}|q_{xxx}|^2+\frac{72c_{12}^2e_2}{\nu}(|p_{xx}|^2+|q_{xx}|^2)$$

$$(3\varphi'''(u_1)u_{2x}w_{xx},q_{xxx})\le3c_{11}|u_{2x}|_{L^\infty}|w_{xx}||q_{xxx}|$$

$$\le\frac{\nu}{16}|q_{xxx}|^2+\frac{72c_{11}^2e_2}{\nu}(|p_{xx}|^2+|q_{xx}|^2)$$

$$(f''(u_1)w_{xx},q_{xxx})\le\frac{\nu}{16}|q_{xxx}|^2+\frac{8c_9^2}{\nu}(|p_{xx}|^2+|q_{xx}|^2)$$

$$\left(u_{2xx}w\int_0^1 f'''(\theta)dS,q_{xxx}\right)\le\frac{\nu}{16}|q_{xxx}|^2+\frac{8c_{10}^2e_2}{\nu}(|p_{xx}|^2+|q_{xx}|^2)$$

$$(f'''(u_1)(u_{1x}+u_{2x})w_x,q_{xxx})\le c_{10}|u_{1x}+u_{2x}||w_x|_{L^\infty}|q_{xxx}|$$

$$\le\frac{\nu}{16}|q_{xxx}|^2+\frac{32c_{10}^2e_1}{\nu}(|p_{xx}|^2+|q_{xx}|^2)$$

$$\left(\int_{Q_0}^{1} u_{2x}^2 w f(N)\,dS,\ q_{xxx}\right) \le c_{15}|u_{2x}|_{L^4}^2 |w|_L|q_{xxx}|_x$$

$$\le \frac{A}{16}|q_{xxx}|^2 + \frac{8c_{15}^2 e_2^2}{A}(|p_{xx}|^2 + |q_{xx}|^2)$$

$$(g^c(u_1)w_x,\ q_{xxx}) \le \frac{A}{16}|q_{xxx}|^2 + \frac{8c_{13}^2}{A}(|p_{xx}|^2 + |q_{xx}|^2)$$

$$\left(\int_{Q_0}^{1} u_{2x} w g^d(N)\,dS,\ q_{xxx}\right) \le c_{16}|u_{2x}||w|_{L^\infty}|q_{xxx}|$$

$$\le \frac{A}{16}|q_{xxx}|^2 + \frac{8c_{16}^2 e_1}{A}(|p_{xx}|^2 + |q_{xx}|^2)$$

以 p_{xxx} 代替 q_{xxx} 得到类似估计, 综合得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|q_{xx}|^2 - |p_{xx}|^2] + C|q_{xxxx}|^2 - C|p_{xxxx}|^2 - A|q_{xxx}|^2 + A|p_{xxx}|^2$$

$$\le 2U_0(|q_{xxx}|^2 + |p_{xxx}|^2) + A(|q_{xxx}|^2 + |p_{xxx}|^2) + e_2(|q_{xx}|^2 + |p_{xx}|^2) \tag{4.24}$$

其中 $Ae_2 = 16c_{11}^2 e_3 + 144c_{12}^2 e_2^2 + 144c_{12}^2 e_2 + 16c_{14}^2 e_1^2 e_2 + 288c_{11}^2 e_2 + 16c_9^2$

$$+ 16c_{10}^2 e_2 + 64c_{10}^2 e_1 + 16c_{15}^2 e_1^2 + 16c_{13}^2 + 16c_{15}^2 e_1 \tag{4.25}$$

类似于第一步估计有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|q_{xx}|^2 - |p_{xx}|^2] + [K_{N+1}^{1/2}(CK_{N+1}^{1/2} - 2U_0 - 2A) - e_2]|q_{xx}|^2$$

$$- [K_N^{1/2}(CK_N^{1/2} + 2U_0) + e_2]|p_{xx}|^2 \le 0 \tag{4.26}$$

类似于(4.20), 当 N 满足

$$32P^4 cN^3 > e_2 \tag{4.27}$$

时, 只要 $|q_{xx}(t_0)| = |p_{xx}(t_0)|$, 则对一切 $t \ge t_0$ 有

$$|q_{xx}(t)|^2 \le |p_{xx}(t)|^2$$

综合一, 二, 三步估计, 得到, 若存在 t_0, 使 $\|p(t_0)\|_{H^2} = \|q(t_0)\|_{H^2}$ 则当(4.3) 成立时, 对一切 $t \ge t_0$ 有

$$\|q(t)\|_{H^2} \le \|p(t)\|_{H^2}$$

定理 4 证完.

§5. 吸引子的分形结构

定理 5 在引理 1 条件下, 若 $|q(t)| > |p(t)|$ 时某 $t \in R$ 成立, 则只要 N 满足(4.3), 我们有

$$|q(t)|^2 \le |q(t_0)|^2 \exp[-2L(t - t_0)] \tag{5.1}$$

对一切 $t_0 \le t$ 成立, 其中

$$L = 32P^4 cN^3 - \max\{e_1, e_2, e_3\} \tag{5.2}$$

对 $q_x(t), q_{xx}(t)$ 有相同结论. 即只要 N 满足(4.3), 则若 $|q_x(t)| > |p_x(t)|$, 对一切 $t_0 \le t$, 有

$$|q_x(t)|^2 \le |q_x(t_0)|^2 \exp[-2L(t - t_0)] \tag{5.3}$$

而若 $|q_{xx}(t)| > |p_{xx}(t)|$, 就有

$$|q_{xx}(t)|^2 \le |q_{xx}(t_0)|^2 \exp[-2L(t - t_0)] \quad (\forall t_0 \le t) \tag{5.4}$$

证明 利用 $|w| < 2|q|$, $|w_x| < 2|q_x|$, $|w_{xx}| < 2|q_{xx}|$ 以及 $|w| \le |w_x|$, $|w_x| \le$

$| w_{xx} |$, 分别用 q, q_{xx}, q_{xxxx} 与(416) 相乘且在$(-1/2, 1/2)$ 上积分, 在定理4证明中的估计中再分别利用 $| p | < | q |$, $| p_x | < | q_x |$, $| p_{xx} | < | q_{xx} |$, 就得到,

$$\frac{1}{2}\frac{d | q |^2}{dt} + [K^{1/2}_{N+1}(CK^{1/2}_{N+1} - 2A - 2U_0) - e_0] | q |^2 [0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} | q_x |^2 + [K^{1/2}_{N+1}(CK^{1/2}_{N+1} - 2A - 2U_0) - e_1] | q_x |^2 [0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} | q_{xx} |^2 + [K^{1/2}_{N+1}(CK^{1/2}_{N+1} - 2A - 2U_0) - e_2] | q_{xx} |^2 [0$$

展开 $K^{1/2}_{N+1}(CK^{1/2}_{N+1} - 2A - 2U_0) - e_i$ 利用 $2C > A + U_0$ 有

$$K^{1/2}_{N+1}(CK^{1/2}_{N+1} - 2A - 2U_0) - e_i > 16P^4 cN(N+1)^3 - e_i$$

$$> 32P^4 cN^3 - e_i = L > 0 \qquad (i = 0, 1, 2)$$

由此立得结论#

定理 6 若 N 满足(413), 方程(211)的吸引子 $\mathscr{A}$有如下包含关系

$$\mathscr{A}\mathscr{A}E^{(k)} \text{ 和 } \mathscr{A}\mathscr{A}\overline{\mathscr{G}_{j=k}}E^{(j)} \qquad (Pk \setminus 1) \tag{515}$$

特别有

$$\mathscr{A}\mathscr{A}\#] \tag{516}$$

其中, $E^{(k)}$ 为定理 2 中所列集合, 而

$$\#] = \mathop{G}_{j=0}^{]} \overline{\mathop{G}_{k=1}^{]} S^j(t_*)E^{(k)}} \tag{517}$$

证明 记 # 为$H^2(8)$ 空间中闭锥# 首先证明$\mathscr{A}\mathscr{A}\#\#$ 其中 $\# = \{u, v \ I \ B, + u - v +_{H^2} [\sqrt{2} + P_N(u - v) +_{H^2}\}$, N 满足(413), 则 $\mathscr{A}$与 # 有三种位置关系

( ) $\mathscr{A}\mathscr{A}\#$

( ) $\mathscr{A}\mathscr{H}\# = <$

( ) $\mathscr{A}\mathscr{H}\# = \#_1$

对于( ), 结论已成立# 对于( ), 设 $u_1(t)$, $u_2(t)$ 是 $\mathscr{A}$中任意两点, 由设 $+ q(t) +_{H^2} > + p(t) +_{H^2}$, 但是下面三个不等式关系中若至少有一个成立

$$| q(t) | > | p(t) | \tag{518}$$

$$| q_x(t) | > | p_x(t) | \tag{519}$$

$$| q_{xx}(t) | > | p_{xx}(t) | \tag{5110}$$

例如 $| q_x(t) | > | p_x(t) |$, t 固定, 由于过 u_1, u_2 的全轨位于 $\mathscr{A}$中, 利用定理 5, 令 $t - t_0$ y] 推知 $| q_x(t) | = 0$, 以而由(519), $| p_x(t) | = 0$ 这与(519) 矛盾, 对(518), (5110) 有类似结论# 这表明( ) 不会发生#

对于( ), 记 $\#^c = \mathscr{A}\#_1$, $\#^c$ 是$H^2(8)$ 中开集# 设 $u_1(t)$, $u_2(t)$ 是 $\#^c$ 中任意两点, 则对于任何 $t_0 [t$, 有 $u_1(t_0)$, $u_2(t_0) \ I \ \#^c$# 若不然, 设 $u_1(t_0)$, $u_2(t_0) \ I \ \#_1$, 从而 $u_1(t_0)$, $u_2(t_0) \ I \ \#$, 即 $h(t_0) \ C + q(t_0) +_{H^2} - + p(t_0) +_{H^2} [0$, 但 $u_1(t)$, $u_2(t) \ I \ \#^c$, 故 $h(t) > 0$, 由 $h(t)$ 关于 t 连续, 必存在 t_1: $t_0 [t_1$ 使 $h(t_1) = 0$, 由定理4推知当 $t \setminus t_1$ 时, $h(t) [0$, 特别 $h(t) [0$ 矛盾# 故对一切 $t_0 [t$, $u_1(t_0)$, $u_2(t_0) \ I \ \#^c$, 利用( ) 证明推知 $\#^c$ 是空集, 即 $\mathscr{A}\mathscr{A}\#\#$ 综合( ) ~ ( ) 得到 $\mathscr{A}\mathscr{A}\#\#$

现在可以证明(515), 对任何 $k \setminus 1$,

记 $\mathscr{A}_{j_1,\ldots,j_k} = B H_R(a_{j_1,\ldots,j_k}) \ H \ \mathscr{A}$, 于是

$S(t_*)\mathscr{A}_{j_1,\ldots,j_k} \ A \ S(t_*)(B H_R(a_{j_1,\ldots,j_k}) \ H \ S^k(t_*)B)$, 但是 $\mathscr{A}_{j_1,\ldots,j_k} \ A \ \mathscr{A}\mathscr{A}\#$ 由 $\mathscr{A}$不变

性, $S(t_*)\mathscr{A}_{j_1,\,,\,,j_k}$ A $S(t_*)\mathscr{A}$= $\mathscr{A}\mathscr{A}$#, 再据 $E_{k+1,j_1,\,,\,,j_k}$ 定义知: $S(t_*)\mathscr{A}_{j_1,\,,\,,j_k}$ A $E_{k+1,j_1,\,,\,,j_k}$, 由

$$\mathscr{A}= S(t_*)\mathscr{A}\mathscr{A}S(t_*)\ \underset{\substack{j_1=1\\ s\\ j_k=1}}{\overset{k_0}{G}}(B H\!\!R(a_{j_1,\,,\,,j_k})\ H\ \mathscr{A})$$

$$A\ \underset{\substack{j_1=1\\ s\\ j_k=1}}{\overset{k_0}{G}} S(t_*)(B H\!\!R(a_{j_1,\,,\,,j_k})\ H\ \mathscr{A})$$

$$= \underset{\substack{j_1=1\\ s\\ j_k=1}}{\overset{k_0}{G}} S(t_*)\mathscr{A}_{j_1,\,,\,,j_k}\ A\ \underset{\substack{j_1=1\\ s\\ j_k=1}}{\overset{k_0}{G}} E_{k+1,j_1,\,,\,,j_k} = E^{(k+1)}$$

推知(515)成立, 于是(516)也真# 上式已利用如下事实: 由于

$\underset{\substack{j_1=1\\ s\\ j_k=1}}{\overset{k_0}{G}} B H\!\!R(a_{j_1,\,,\,,j_k})$ 是 $S^k(t_*)B$ 的一个有限复盖, 从而也是 $\mathscr{A}$的一个有限复盖/因为 $\mathscr{A}\mathscr{A}$ $S^k(t_*)B)$, 故有

$$\mathscr{A}\mathscr{A}\underset{\substack{j_1=1\\ s\\ j_k=1}}{\overset{k_0}{\mathscr{G}}}(B H\!\!R(a_{j_1,\,,\,,j_k})\ H\ \mathscr{A})$$

定理 6 证完#

推论 方程(211)在 $H^2(8)$ 中惯性集 $M = \underset{0[\ t[\ t_*}{G} S(t)\#]$, 这就改进了[5] 的结果#

定理 7 记 $U_k = \overset{]}{\underset{j=k}{G}} E^{(j)}$, 则$\{U_k\}^{]}$ 构成吸引子 $\mathscr{A}$的一个紧分形局部化指数型逼近序列, 特别有

$$\mathscr{A}= \overset{]}{\underset{k=1}{H}} U_k \quad 且\ \mathrm{dis}_{H^2}(U_k, \mathscr{A})\ [\ c_0\exp[-c_1 k] \tag{5111}$$

只要 N 满足(413), 其中 c_0, c_1 是常数#

证明 由[5]及定理 3, U_k 是$H^2(8)$ 中紧分形集, 由定义知 U_1 B U_2 B , B U_k B U_{k+1} B , , 利用 $H^2(8)$ 完备性得到:

$$\overset{]}{\underset{k=1}{H}} U_k\ 是H^2(8)\ 空间非空紧分形集$$

由 $\mathscr{A}\mathscr{A}E^{(k)}$, $P\ k\ \backslash\ 1$, 故 $\mathscr{A}\mathscr{A}U_k$, $P\ k\ \backslash\ 1$, 从而$\{U_k\}$构成 $\mathscr{A}$的一个紧分形局部化逼近序列# 设 u 是 U_k 中任一点, 则在 $\mathscr{A}$中至少存在一点 $v\ I\ E_{k,j_1,\,,\,,j_k}$成立, 于是

$$\mathrm{dist}_{H^2}(U_k, \mathscr{A})\ [\ \mathrm{dist}_{H^2}(u, v)\ [\ H^k R = c_0\exp[-c_1 k]$$

其中, $C_0 = \exp[\ln k]$, $c_1 = \ln\dfrac{1}{H}$, $0 < H < 1$ 是绝对常数#

由于 $\mathscr{A}\mathscr{A}U_k$ $(P\ k\ \backslash\ 1)$, 于是

$$\mathscr{A}\mathscr{A}\overset{/}{\underset{k=1}{\mathscr{H}}}U_k \tag{5112}$$

另一方面, 利用 B 正向不变性和$E^{(k)}$ A $S^k(t_*)B$, 有对一切$j\ \backslash\ 0$, $E^{(k+j)}$ A $S^{k+j}(t_*)B$ A $S^k(t_*)B$, 于是

$$\underset{k}{H} U_k\ A\ \underset{k}{H} S^k(t_*)B\ A\ \underset{k}{H}(\overline{\underset{t\backslash 0}{G} S(t+kt_*)B}) = \underset{k}{H}(\overline{\underset{t\backslash kt_*}{G} S(t)B})\ A\ \mathscr{A} \tag{5113}$$

(5113) 最后一个包含关系已利用吸引子定义, 结合(5112), (5113) 推得 $\mathcal{A}= \bigcap_k U_k$, 定理证完#

参 考 文 献

1 Guo Boling, The global attractors for the periodic initial value problem of generalized Kuramoto_Sivashinsky type equations, Progress in Natural Science, **3**(4) (1993), 327) 340.

2 Gao Boling, The existence and nonexistence of a global smooth solution for the initial value problem of generalized Kuramoto_Sivashinsky type equations, J. Math. Res. &Expo, **11**(1), 1991, 57) 65.

3 P. Constantin, C. Foias and R. Temam, Mem. Amer. Math. Soc., N314 (1985).

4 P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenko and R. Temam, Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations Springer_Verlag (1989).

5 A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko and R. Temam, Inertial sets for dissipative evolution equations, IMA. Preprint Series 812 (1991).

6 A. V. Babin and M. I. Vishik, Regular attractors of semigroups and evolution equations, J. Math. Pures Appl., **62**(3) (1983), 441) 491.

7 C. Foias and R. Temam, The algebra approximation of attractors, the finite dimensional case, Physics D, **32** (1988), 163) 182.

8 K. Promislom and R. Temam, Localization and approximation of attractors for the Gingburg_Landaw equation, J. Dynam. Diff. Eq., **3**(4) (1991), 491) 514.

9 Dai Zhengde, Guo Boling and Gou Hongjun, The inertial fractal sets for nonlinear schrodinger equations, J. Part. Diff. Eq., **8**(1) (1995), 37) 81.

The Fractal Structure of Attractor for the Generalized Kuramoto_Sivashinsky Equations

Dao Zhengde
(Department to Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, P.R. China)

Guo Boling
(P. O. Box 8009, Beijing 100088, P. R. China)

Lin Guoguang
(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, P.R. China)

Abstract

In this paper, the generalized Kuramoto_Sivashinsky equations (GKS) with periodic initial boundary value problem are considered and the construction of inertial sets in space H^2 is given. Furthermore, this paper gives and proves the fractal structure of attractors for GKS equations, and find out an exponentially approximating sequence of compact fractal localizing sets of the attractors, these results sharpen and improve the conclusions of the inertial sets and attractor for GKS equation in [1, 3, 5, 7], which describe a kind of geometrical structure of the attractors.

Key words GKS equation, attractor, inertial set, fractal structure