应用数学和力学, 第 19 卷 第 2 期(1998 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

粘弹性薄板动力响应的边界元方法(Ⅱ) ——理论分析*

︿ 睿[①]　　朱正佑[②]　　程昌钧[②]

(1996 年 3 月 8 日收到, 1997 年 6 月 13 日收到修改稿)

摘 要

本文中, 对[1]中提出的粘弹性结构动力响应的近似边界元方法给出了必要的理论分析, 得到了近似解的存在唯一性定理和误差估计. 基于这些结论给出了网格宽度与基本解中截断项数的选取原则. 本文中得到的理论结果和[1]中数值实验结果是一致的.

关键词　动力响应　粘弹性　近似边界元法　误差估计

§1. 引　　言

[1]中利用在拉氏区域给出的两类近似基本解和相应的近似边界元方法计算了矩形域上粘弹性薄板的动力响应问题, 计算实例分析表明只有当近似基本解的截断阶数 k 和最大网格宽度满足一定的匹配关系时才能得到足够精度的近似解. 本文从理论上给出了近似边界元方法的误差估计同时提出了 h 和 k 相匹配的准则. 因为 Bellman 逆变换的误差分析已有成熟的结论[5], 这里只讨论采用[1]中的近似边界元方法求得的在拉氏空间中的近似解的收敛性和误差估计.

微分型本构关系的粘弹性薄板的动力响应经 Laplace 变换后, 在 Laplace 区域中应满足如下形式的方程

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^4 w + \theta w = f \qquad (\Omega) \\ &w\,|_\Gamma = w_0, \quad \partial w/\partial n\,|_\Gamma = g_0, \quad \theta = \rho h s/D \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

or

其中 $\Omega \subset R^2$ 是凸多边形区域, n 是 Ω 的单位外法向量, s 是拉氏变换参数, D 是 s 的多项式函数, ρ, h 为常数. Γ 是 Ω 的边界.

为讨论方便起见我们讨论间接边界元法. 先考虑如下齐次方程的内外边值问题

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^4 w + \theta w = 0 \qquad (\Omega \cup \Omega', \ \Omega' = R^2 \setminus \Omega) \\ &w\,|_\Gamma = w_0, \quad \partial w/\partial n\,|_\Gamma = g_0 \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

---

* 国家自然科学基金及教委博士点基金资助项目

① 西南交通大学, 力学博士后流动站, 成都 610031
② 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072

当采用传统的边界元法时, 齐次方程的计算方法如下: 方程(1.2)的基本解为

$$w^*(p,q)=(L^2/2\pi D)Kel_0(r/L^2),\quad r=|p-q|,\quad L^4=D/\rho hs$$

Kel_0 为零阶 Hankel 函数• 类似[2]中推导知内外边值问题(1.2)分别在 $H^2(\Omega)$ 和加权 Sobolev 空间 $W_0^2(\Omega')$ 中有唯一解, 且其边界积分方程为:

$$\frac{\alpha(Q)w^-(Q)+(2\pi-\alpha(Q))w^+(Q)}{\text{讨论}\,2\pi}=\int_\Gamma\left[\sigma(P)w^*(P,Q)-\varphi(P)\frac{\partial w^*(P,Q)}{\partial n_P}\right]dS_P$$

$$Q\in\Gamma\qquad(1.3)$$

其中

$$\sigma(P)=\left[\frac{\partial\Delta w}{\partial n}\right]=\frac{\partial\Delta w}{\partial n^-}-\frac{\partial\Delta w}{\partial n^+},\qquad\varphi(P)=[\Delta w]=(\Delta w)^--(\Delta w)^+$$

$\alpha(Q)$ 表示在角点 Q 处 Γ 的两条切线间的夹角•

$$w^+(Q)=\lim_{\substack{P\to Q\\P\in\Omega'}}w(P),\quad Q\in\Gamma,\quad w^-(Q)=\lim_{\substack{P\to Q\\P\in\Omega}}w(P),\quad Q\in\Gamma$$

n^+ 表示外法线, n^- 表示内法线• 此外(1.3)中 σ, φ 还应满足如下约束条件

$$\left.\begin{aligned}&\int_\Gamma\sigma(P)\,dS=0\\&M\int_\Gamma\left[\sigma(P)v(P)-\varphi(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n}\right]dS_P=0,\qquad\forall v\in P_1\setminus P_0\end{aligned}\right\}\qquad(1.4)$$

其中 P_0 和 P_1 分别表示零次和一次多项式空间• 若 Q 是 Γ 上的光滑点, 则 $\alpha(Q)=\pi$, 此时(1.3)可写为

$$w(Q)=\frac{1}{2}\left[w^-(Q)+w^+(Q)\right]=\int_\Gamma\left[\sigma(P)w^*(P,Q)-\varphi(P)\frac{\partial w^*(P,Q)}{\partial n_P}\right]dS_P$$

$$Q\in\Gamma\qquad(1.5)$$

利用(1.3)或(1.5)求出 σ, φ, 将其代入积分方程

$$w(q)=\int_\Gamma\left[\sigma(P)w^*(P,q)-\varphi(P)\frac{\partial w^*(P,q)}{\partial n_P}\right]dS_P,\qquad q\in\Omega\cup\Omega'\qquad(1.6)$$

即可求得方程(1.2)的解 $w(q)$•

若 $w^*(p,q)=w_k^*(p,q)+R_k(p,q)$, $|R_k(p,q)|\to 0\ (k\to\infty)$, 则称 w_k^* 为(1.2)的近似基本解, R_k 是近似基本解的余项• 在[1]中当 $\Omega=[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ 时给出了两类近似基本解 w_k^*, R_k 和 w_k^*, R_k• 它们分别为

$$\left.\begin{aligned}w_k^*(p,q)=&\frac{1}{4\pi m}+\frac{1}{2\pi^3}\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{\cos l(\xi-x)}{sDl^4+m}+\sum_{t=1}^{k}\frac{\cos t(\eta-y)}{sDt^4+m}\right)\\&+\frac{1}{\pi^2}\sum_{l=1}^{k}\sum_{t=1}^{k}\frac{\cos l(\xi-x)\cdot\cos t(\eta-y)}{sD(l^2+t^2)^2+m}\\R_k(p,q)=&w^*-w_k^*\qquad\qquad\eta\end{aligned}\right\}\qquad(1.7)$$

式中, $m=\rho hs^2$, $p=(x,y)$, $q(\xi,\eta)$•

$$\left.\begin{aligned}w_k^*(p,q)&=w_0^*(p,q)+(w_k^*(p,q)-w_k^*(p,q))\\R_k(p,q)&=w^*-w_k^*\end{aligned}\right\}\qquad(1.8)$$

其中 w_0^* 是双调和方程 $D\nabla^4w=0$ 的基本解, w_k^* 是 w_0^* 的双三角级数形式的近似基本解•

当用 $w_k^*(w_k^*)$ 代替(1.3)、(1.5)、(1.6)中的 w^* 时就得到了近似边界元方法• 在第二节中我们将讨论齐次方程(1.2)的近似边界元方法的误差估计• 在第三节中将问题推广到到非齐次的情形并给出必要的结语•

§2. 齐次问题近似边界元方法的误差估计

为了使用方便先复述若干间接边界元方法的有关结论•

记

$V(\Gamma) := H^{-3/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, $\overset{0}{V}(\Gamma) = \{(\sigma, \varphi) \in V(\Gamma) \mid (\sigma, \varphi)$ 满足条件(1.4)$\} \subset V$•

设 $v = (\sigma, \varphi) \in V(\Gamma)$ 其范数定义为

$$\| v \|_V = \|(\sigma, \varphi)\|_V = \left(\| \sigma \|^2_{-3/2, \Gamma} + \| \varphi \|^2_{-1/2, \Gamma} \right)^{1/2} \qquad (\quad)$$

若已知函数 $w_0 \in H^{3/2}(\Gamma)$, $g_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ 时, 则通过解如下边界变分问题

$$\left.\begin{aligned}
&\text{求 } v = (\sigma, \varphi) \in \overset{0}{V}, \text{使其满足} \\
&b(v, v') = \langle v_0, v' \rangle, \qquad \forall v' = (\sigma', \varphi') \in V \\
&b(v, v') = \int_\Gamma \int_\Gamma \left[\sigma(P)\sigma'(Q) w^*(P, Q) - \varphi(P)\sigma'(Q) \frac{\partial w^*(P, Q)}{\partial n_P} \right] dS_P dS_Q \\
&\qquad - \int_\Gamma \int_\Gamma \left[\sigma(P)\varphi'(Q) \frac{\partial w^*(P, Q)}{\partial n_Q} - \varphi(P)\varphi'(Q) \frac{\partial^2 w^*(P, Q)}{\partial n_P \partial n_Q} \right] dS_P dS_Q \\
&\langle v_0, v' \rangle = \int_\Gamma w_0(Q)\sigma'(Q)\, dS_Q - \int_\Gamma g_0(Q)\varphi'(Q)\, dS_Q, \quad v_0 = (w_0, g_0)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

求出 $v(\sigma, \varphi) \in \overset{0}{V}$ 后, 代入积分表达式(1.6), 即可得到平面上任意点处的解• 当用近似基本解 w_k^* 代替(1.6)和(2.1)中的基本解 w^* 时, 我们得到具近似基本解的边界元方法(ABEM)•

现在对(2.1)进行离散, 用 Γ 上一组分点剖分边界 Γ 为 Γ_h, h 为剖分 Γ_h 中的最大单元长度, 要求 $\Gamma_h \in J_h$, J_h 是拟一致剖分族[3]• 若 Γ 为多边形, 可选 $\Gamma_h = \Gamma$• 记 $V_h^{(n)} \subset H^{-3/2}(\Gamma)$ 和 $V_h^{(m)} \subset H^{-1/2}(\Gamma)$ 分别是分段 n 次和 m 次多项式函数构成的连续边界元空间, n, m 是非负整数• 令 $V_h^{(n,m)} := V_h^{(n)} \times V_h^{(m)}$, 显然 $V_h^{(n,m)} \subset V$• 我们先讨论由(1.7)中给出的近似基本解 w_k^*, 则具近似基本解的变分方程(2.1)的离散形式为:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{求 } v_h^{(k)} = (\sigma_h^{(k)}, \varphi_h^{(k)}) \in V_h^{(n,m)}, \text{使其满足} \\
&b_k(v_h^{(k)}, v') = \langle v_0, v' \rangle, \qquad \forall v' \in V_h^{(n,m)} \\
&b_k(v_h^{(k)}, v') = \int_\Gamma \int_\Gamma \left[\sigma_h^{(k)}(P)\sigma'(Q) w_k^*(P, Q) - \varphi_h^{(k)}(P)\sigma'(Q) \frac{\partial w_k^*(P, Q)}{\partial n_P} \right] dS_P dS_Q \\
&\qquad - \int_\Gamma \int_\Gamma \left[\sigma_h^{(k)}(P)\varphi'(Q) \frac{\partial w_k^*(P, Q)}{\partial n_Q} - \varphi_h^{(k)}(P)\varphi'(Q) \frac{\partial^2 w_k^*(P, Q)}{\partial n_P \partial n_Q} \right] dS_P dS_Q \\
&6\ v_0 = (w_0, g_0) \in V_h^{(n,m)}, \quad \langle v_0, v' \rangle \text{ 定义同(2.1)}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

b_k 是定义在 $V_h^{(n,m)} \times V_h^{(n,m)}$ 上的双线性形式, 若离散变分方程(2.2)有唯一解 $v_h^{(k)} = (\sigma_h^{(k)}, \varphi_h^{(k)})$, 将其代入如下积分表达式

$$w_h^{(k)}(q) = \int_\Gamma \left[\sigma_h^{(k)}(P) w_k^*(P, q) - \varphi_h^{(k)}(P) \frac{\partial w_k^*(P, q)}{\partial n_P} \right] dS_P, \quad q \in \Omega \cup \Omega' \tag{2.3}$$

便得到近似解 $w_h^{(k)}(q)$. 这种方法我们称之为近似边界元法.

在讨论变分方程(2.2)解的存在唯一性及误差估计之前, 先引入如下几个引理. 首先不难计算得到

引理 1 (1.7)中 w_k^*, R_k 和(1.8)中 w_k^*, R_k 分别满足如下估计

$$\left.\begin{aligned}
&\| w_k^* \|_{0,\Gamma\times\Gamma} \leqslant D_1 := \left(\frac{1}{4\pi m} + \frac{1}{sD}\right) |\Gamma|, \quad \left\| \frac{\partial w_k^*}{\partial n} \right\|_{0,\Gamma\times\Gamma} \leqslant D_2 := \frac{1}{sD} |\Gamma| \\
&|R_k(P, Q)| \leqslant \frac{C_1}{k^2}, \quad \left| \frac{\partial R_k(P, Q)}{\partial n_P} \right| \leqslant \frac{C_2}{k}, \quad \left| \frac{\partial R_k(P, Q)}{\partial n_Q} \right| \leqslant \frac{C_2}{k} \\
&\int_\Gamma \int_\Gamma \varphi(P) \varphi'(Q) \frac{\partial^2 R_k(P, Q)}{\partial n_P \partial n_Q} dS_P dS_Q \leqslant \frac{C_3}{sD} \left\{ \frac{1}{k} \| \varphi \|_{0,\Gamma} \cdot \| \varphi' \|_{0,\Gamma} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{k^2} \| \varphi \|_{1,\Gamma} \| \varphi' \|_{1,\Gamma} \right\}, \quad \forall \varphi, \varphi' \in V_h^{(m)} \\
&\| w_k^* \|_{0,\Gamma\times\Gamma} \leqslant D_1, \quad \left\| \frac{\partial w_k^*}{\partial n} \right\|_{0,\Gamma\times\Gamma} \leqslant \frac{1}{sD} |\Gamma| = D_2 \\
&|R_k(P, Q)| \leqslant \frac{C_1}{k^6}, \quad \left| \frac{\partial R_k(P, Q)}{\partial n_P} \right| \leqslant \frac{C_2}{k^5}, \quad \left| \frac{\partial R_k(P, Q)}{\partial n_Q} \right| \leqslant \frac{C_2}{k^5} \\
&\left| \frac{\partial^2 R_k(P, Q)}{\partial n_P \partial n_Q} \right| \leqslant \frac{C_3}{k^4}
\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

式中 D_1, D_2, C_1, C_2, C_3 均为常数.

下面的两个引理是已知的, 可参看[3, 4].

引理 2[3] 设 Γ 是凸多边形, V_h 是分段 m 次多项式的连续边界元空间, $V_h \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, 则对所有 $\phi \in V_h$, 成立估计式

$$\| \phi \|_s \leqslant C h^{t-s} \| \phi \|_t \tag{2.5}$$

这里 $t \leqslant s < m + 1/2$.

引理 3[4] 条件同引理 2, 另设 $t_0 < m + 1/2$, $t_0 \leqslant s \leqslant m + 1$, 那么对任意 $u \in H^s(\Gamma)$, 存在一个函数 $\phi \in V_h$, 满足

$$\| u - \phi \|_{t,\Gamma} \leqslant C h^{s-t} \| u \|_{s,\Gamma}, \qquad \forall t \leqslant t_0 \tag{2.6}$$

这里 C 为常数.

下面两个定理分别给出了离散近似边界元方法解的存在唯一性定理和解的误差估计.

定理 4 对给定的剖分网格宽度 h, k 只要足够大, 变分方程(2.2)在边界元空间 $V^{(n,m)}(\Gamma)$ 中有唯一解.

证明 首先证明 $b_k(\cdot, \cdot)$ 具 $V_h^{(n,m)}(\Gamma)$_强制性, 即

$$b_k(v', v') \geqslant \beta \| v' \|_V^2, \qquad \forall v' = (\sigma', \varphi') \in V_h^{(n,m)}$$

由(2.1)、(2.2)可知 $\quad b_k(v', v') = b(v', v') - d_k(v', v')$

这里

$$d_k(v, v') = d_k((\sigma, \varphi), (\sigma', \varphi'))$$

$$= \int_\Gamma\int_\Gamma\left[\sigma(P)\sigma'(Q)R_k(P,Q) - \varphi(P)\sigma'(Q)\frac{\partial R_k(P,Q)}{\partial n_P}\right]dS_P dS_Q$$

!

$$-\int_\Gamma\int_\Gamma\left[\sigma(P)\varphi'(Q)\frac{\partial R_k(P,Q)}{\partial n_Q} - \varphi(P)\varphi'(Q)\frac{\partial^2 R_k(P,Q)}{\partial n_P \partial n_Q}\right]dS_P dS_Q$$

$$\forall v = (\sigma, \varphi),\quad v' = (\sigma', \varphi') \in V_h^{(n,m)}$$

由引理 1, 得如下估计:

$$|d_k(v', v')| \leqslant \frac{C}{sD}\left\{\frac{1}{k^2}\|\sigma\|_{0,\Gamma}\|\sigma'\|_{0,\Gamma} + \frac{1}{k}\|\varphi\|_{0,\Gamma}\|\sigma'\|_{0,\Gamma}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{k}\|\sigma\|_{0,\Gamma}\|\varphi'\|_{0,\Gamma} + \frac{1}{k}\|\varphi\|_{0,\Gamma}\|\varphi'\|_{0,\Gamma} + \frac{1}{k^2}\|\varphi\|_{1,\Gamma}\|\varphi'\|_{1,\Gamma}\right\}$$

由引理 2 有

$$\|\sigma\|_{0,\Gamma} \leqslant \alpha h^{-3/2}\|\sigma\|_{-3/2,\Gamma},\quad \|\varphi\|_{0,\Gamma} \leqslant \beta h^{-1/2}\|\varphi\|_{-1/2,\Gamma}$$
$$\|\varphi\|_{1,\Gamma} \leqslant \gamma h^{-3/2}\|\varphi\|_{-3/2,\Gamma},\qquad \forall \sigma \in V_h^{(n)},\ \varphi \in V_h^{(m)}$$

α, β, γ 为常数• 因此对给定的网格宽度 $h \in (0, 1)$, 有

$$|d_k(v, v')| \leqslant \frac{C}{sD}\frac{1}{kh^3}\left(\|\sigma\|^2_{-3/2,\Gamma} + \|\varphi\|^2_{-1/2,\Gamma}\right)^{1/2}\left(\|\sigma'\|^2_{-3/2,\Gamma}\right.$$
$$\left. + \|\varphi'\|^2_{-1/2,\Gamma}\right)^{1/2} = \frac{K}{kh^3}\|v\|_V\|v'\|_V \tag{2.7}$$

易证 $b(\cdot,\cdot)$ 具 V_强制性, 故

$$b_k(v, v) \geqslant M\|v\|_V^2 - \frac{K}{kh^3}\|v\|_V^2 = \left(M - \frac{K}{kh^3}\right)\|v\|_V^2,\qquad \forall v \in V_h^{(n,m)}$$

对选定的 $h \in (0, 1)$, 注意到 $N = M - K/kh^3 \to M\ (k \to \infty)$, 因此当 k 足够大时有 $N > 0$, 即 $b_k(v, v)$ 具 $V_h^{(n,m)}$_强制性• 由 $b(\cdot,\cdot)$ 的强制性及 $d_k(\cdot,\cdot)$ 的有界性(见(2.7)式), 容易得到 $b_k(\cdot,\cdot)$ 是 $V_h^{(n,m)} \times V_h^{(n,m)}$ 上的有界双线性泛函• 并且显然 $\langle v_0, v^Q\rangle$ 是 $V_h^{(n,m)}$ 上的有界线性泛函• 由 Lax_Milgram 定理, 变分方程(2.2)在 $V_h^{(n,m)}$ 中有唯一解• 证毕

定理 5 设 Γ, h, $V_h^{(n,m)}$ 如前定义, $\sigma \in H^{n+1}(\Gamma)$, $\varphi \in H^{m+1}(\Gamma)$ 并且 $v = (\sigma, \varphi)$, $v_h^{(k)} = (\sigma_h^{(k)}, \varphi_h^{(k)}) \in V_h^{(n,m)}$ 分别是(2.1)、(2.2)的解• 当 k 足够大时, 有估计

$$\|\sigma - \sigma_h^{(k)}\|_{-3/2,\Gamma} + \|\varphi - \varphi_h^{(k)}\|_{-1/2,\Gamma} \leqslant a\left\{h^{n+5/2}\|\sigma\|_{n+1,\Gamma}\right.$$
$$\left. + h^{m+3/2}\|\varphi\|_{m+1,\Gamma} + k^{-1}h^{-3}\|(\sigma, \varphi)\|_V\right\} \tag{2.8}$$

证明

$$\|v_h^{(k)} - v'\|_V^2 \leqslant b\left(v_h^{(k)} - v', v_h^{(k)} - v'\right) = b\left(v - v', v_h^{(k)} - v'\right) + d_k\left(v_h^{(k)}, v_h^{(k)} - v'\right) +$$

$$\leqslant C_0\|v - v'\|_V\|v_h^{(k)} - v'\|_V + \frac{K}{kh^3}\|v_h^{(k)}\|_V\|v_h^{(k)} - v'\|_V,$$
$$\forall v' = (\sigma', \varphi') \in V_h^{(n,m)}$$

从而得

$$\|v_h^{(k)} - v'\|_V \leqslant C_0\|v - v'\|_V + \frac{K}{kh^3}\|v_h^{(k)}\|_V \tag{2.9}$$

由于 $\|v_h^{(k)} - v\|_V \leqslant \|v - v'\|_V + \|v_h^{(k)} - v'\|_V \leqslant C_0'\|v - v'\|_V + \frac{K}{kh^3}\|v_h^{(k)}\|_V$

因此 $\|v - v_h^{(k)}\|_V \leqslant C_0' \inf\limits_{v' \in V_h^{(n,m)}}\|v - v'\|_V + \frac{K}{kh^3}\|v_h^{(k)}\|_V$

$$\leqslant C_0'\left\{\inf_{\sigma'\in V_h^{(n)}}\|\sigma-\sigma'\|_{-3/2,\Gamma}+\inf_{\varphi'\in V_h^{(m)}}\|\varphi-\varphi'\|_{-1/2,\Gamma}+\frac{K}{kh^3}\|v_h^{(k)}\|_V\right. \tag{2.10}$$

由引理 3 及三角不等式有

$$\inf_{\sigma'\in V_h^{(n)}}\|\sigma-\sigma'\|_{-3/2,\Gamma}\leqslant a_1h^{n+5/2}\|\sigma\|_{n+1,\Gamma} \tag{2.11}$$

$$\inf_{\varphi'\in V_h^{(m)}}\|\varphi-\varphi'\|_{-1/2,\Gamma}\leqslant a_2h^{m+3/2}\|\varphi\|_{m+1,\Gamma} \tag{2.12}$$

$$\|v_h^{(k)}\|_V\leqslant\|v\|_V+\|v-v_h^{(k)}\|_V \tag{2.13}$$

将(2.10) ~ (2.13)式代入(2.9)式得

$$\left(1-Kk^{-1}h^{-5/2}\right)\|v-v_h^{(k)}\|_V\leqslant a_0\left\{h^{n+5/2}\|\sigma\|_{n+1,\Gamma}\right.$$
$$\left.+h^{m+3/2}\|\varphi\|_{m+1,\Gamma}+k^{-1}h^{-3}\|v\|_V\right\}$$

注意到对给定的网格宽度 $h\in(0,1)$, $1-Kk^{-1}h^{-5/2}\to1\,(k\to\infty)$, 因此当 k 足够大时, 有 $1-Kk^{-1}h^{-5/2}>1/2$, 从而得

$$\|v-v_h^{(k)}\|_V\leqslant a\left\{h^{n+5/2}\|\sigma\|_{n+1,\Gamma}+h^{m+3/2}\|\varphi\|_{m+1,\Gamma}+k^{-1}h^{-3}\|v\|_V\right. \tag{2.14}$$

由于

$$\|\sigma-\sigma_h^{(k)}\|_{-3/2,\Gamma}\leqslant\|v-v_h^{(k)}\|_V,\quad\|\varphi-\varphi_h^{(k)}\|_{-1/2,\Gamma}\leqslant\|v-v_h^{(k)}\|_V$$

因此得到估计式(2.8)• 证毕

最后利用上述估计式容易得到解的如下误差估计:

定理 6　假定同定理 **5**, 设 $w(q)$, $w_h^{(k)}(q)$分别是由积分表达式(1.6)、(2.3)得到的精确解和近似解, 则有如下估计

$$\|w-w_h^{(k)}\|_{0,\Omega}\leqslant M_1\left(h^{n+1}\|\sigma\|_{n+1,\Gamma}+h^m\|\varphi\|_{m+1,\Gamma}+M_2k^{-1}h^{-9/2}\|v\|_V\right.$$
$$\text{定 的}+M_3k^{-1}\left(\|\sigma\|_{0,\Gamma}+(\|\varphi\|_{0,\Gamma}\right.\quad\text{选}\quad, \tag{2.15}$$

式中 M_1, M_2, M_3 为常数•

证明　先估计

$$\left|w(q)-w_h^{(k)}(q)\right|\leqslant\int_\Gamma\left|\sigma(P)-\sigma_h^{(k)}(P)\right|\cdot\left|w_k^*(P,q)\right|dS_P+\int_\Gamma\left|\varphi(P)\right.$$
$$\left.-\varphi_h^{(k)}(P)\right|\cdot\left|\frac{\partial w_k^*(P,q)}{\partial n_P}\right|dS_P+\int_\Gamma\left|\sigma(P)\right|\cdot\left|R_k(P,q)\right|dS_P$$
$$+\int_\Gamma\left|\varphi(P)\right|\cdot\left|\frac{\partial R_k(P,q)}{\partial n_P}\right|dS_P$$
$$\leqslant\|\sigma-\sigma_h^{(k)}\|_{0,\Gamma}\|w_k^*\|_{0,\Gamma}+\|\varphi-\varphi_h^{(k)}\|_{0,\Gamma}\left\|\frac{\partial w_k^*}{\partial n_P}\right\|_{0,\Gamma}$$
$$+\frac{C_1}{k^2}\|\sigma\|_{0,\Gamma}+\frac{C_2}{k}\|\varphi\|_{0,\Gamma} \tag{2.16}$$

由引理 2 得

$$\|\sigma-\sigma_h^{(k)}\|_{0,\Gamma}\leqslant\|\sigma-\sigma'\|_{0,\Gamma}+\|\sigma_h^{(k)}-\sigma'\|_{0,\Gamma}$$
$$\leqslant\|\sigma-\sigma'\|_{0,\Gamma}+b_1h^{-3/2}\|\sigma_h^{(k)}-\sigma'\|_{-3/2,\Gamma}$$
$$\leqslant\|\sigma-\sigma'\|_{0,\Gamma}+b_1h^{-3/2}\|v_h^{(k)}-v'\|_V,\qquad\forall\sigma'\in V_h^{(n)}$$

同理

$$\|\varphi-\varphi_h^{(k)}\|_{0,\Gamma}\leqslant\|\varphi-\varphi'\|_{0,\Gamma}+b_2h^{-1/2}\|v_h^{(k)}-v'\|_V$$

于是引理 1

$$\|\sigma-\sigma_h^{(k)}\|_{0,\Gamma}\|w_k^*\|_{0,\Gamma}+\|\varphi-\varphi_h^{k}\|_{0,\Gamma}\left\|\frac{\partial w_k^*}{\partial n_P}\right\|_{0,\Gamma}$$
$$\leqslant M\left\{\|\sigma-\sigma_h^{(k)}\|_{0,\Gamma}+\|\varphi-\varphi_h^{(k)}\|_{0,\Gamma}\right.$$
$$\leqslant M\left\{\|\sigma-\sigma'\|_{0,\Gamma}+\|\varphi-\varphi'\|_{0,\Gamma}+(b_1h^{-3/2}+b_2h^{-1/2})\|v_h^{(k)}-v'\|_V\right.$$
$$\leqslant M\left\{\|\sigma-\sigma'\|_{0,\Gamma}+\|\varphi-\varphi'\|_{0,\Gamma}+(bh^{-3/2}(\|v-v_h^{(k)}\|_V+\|v-v'\|_V)\right\}$$
$$\forall v'=(\sigma',\varphi')\in V_h^{(n,m)}$$

从而

$$\|\sigma-\sigma_h^{(k)}\|_{0,\Gamma}\|w_k^*\|_{0,\Gamma}+\|\varphi-\varphi_h^{(k)}\|_{0,\Gamma}\left\|\frac{\partial w_k^*}{\partial n_P}\right\|_{0,\Gamma}$$
$$\leqslant M\left\{\inf_{\sigma'\in V_h^{(n)}}\|\sigma-\sigma'\|_{0,\Gamma}+\inf_{\varphi'\in V_h^{(m)}}\|\varphi-\varphi'\|_{0,\Gamma}+bh^{-3/2}\|v-v_h^{(k)}\|_V\right.$$
$$\left.+bh^{-3/2}\inf_{v'\in V_h^{(n,m)}}\|v-v'\|_V\right\}$$

由(2.11)、(2.12)、(2.13)式得

$$\inf_{\sigma'\in V_h^{(n,m)}}\|v-v'\|_V\leqslant\inf_{\sigma'\in V_h^{(n)}}\|\sigma-\sigma'\|_{-3/2,\Gamma}+\inf_{\varphi'\in V_h^{(m)}}\|\varphi-\varphi'\|_{-1/2,\Gamma}$$
$$\leqslant C_0\left\{h^{n+5/2}\|\sigma\|_{n+1,\Gamma}+h^{m+3/2}\|\varphi\|_{m+1,\Gamma}\right\}$$

将上面两式及(2.11)、(2.12)和(2.13)式代入 $|w(q)-w_h^{(k)}(q)|$ 的估计得

$$|w(q)-w_h^{(k)}(q)|\leqslant M_1\left(h^{n+1}\|\sigma\|_{n+1,\Gamma}+h^m\|\varphi\|_{m+1,\Gamma}\right)+M_2k^{-1}h^{-9/2}\|v\|_V$$
$$+M_3k^{-1}\left(\|\sigma\|_{0,\Gamma}+\|\varphi\|_{0,\Gamma}\right)$$

最后由 $\|w-w_h^{(k)}\|_{0,\Omega}=\left(\int_\Omega|w(q)-w_h^{(k)}(q)|^2d\Omega\right)^{1/2}$

立刻推出(2.15)式成立• 证毕

对于(1.8)中的近似基本解,采用类似于定理4~6的证明可得如下结论:

定理7 假定同定理**4**,则用近似基本解 w_k^* 代替变分方程(2.2)中的 w_k^*,所得的变分方程仍在 $V_h^{(n,m)}$ 中有唯一解•

定理8 假定同定理**5**,$v=(\sigma,\varphi)\in V$ 是变分方程(2.1)的精确解,$v_h^{(k)}=\left(\sigma_h^{(k)},\varphi_h^{(k)}\right)\in V_h^{(n,m)}$ 是定理7中所述的变分方程的解,此时有估计

$$\|\sigma-\sigma_h^{(k)}\|_{-3/2,\Gamma}+\|\varphi-\varphi_h^{(k)}\|_{-1/2,\Gamma}\leqslant C_1\left(h^{n+5/2}\|\sigma\|_{n+1,\Gamma}\right.$$
$$\left.+h^{m+3/2}\|\varphi\|_{m+1,\Gamma}\right)+C_2h^{-3}k^{-4}\|v\|_V \tag{2.17}$$

定理9 假定同定理**6**,$w(q)$ 为(1.2)的解,相应近似解为

$$w_h^{(k)}(q)=\int_\Gamma\left[\sigma_h^{(k)}(P)w_k^*(P,q)-\varphi_h^{(k)}(P)\frac{\partial w_k^*(P,q)}{\partial n_P}\right]dS_P,\qquad q\in\Omega\cup\Omega'$$

v, $v_h^{(k)}$ 同定理8,这时有如下估计

$$|w(q)-w_h^{(k)}(q)|\leqslant M_1\left(h^{n+1}\|\sigma\|_{n+1,\Gamma}+h^m\|\varphi\|_{m+1,\Gamma}\right)+M_2h^{-9/2}k^{-4}\|v\|_V$$
$$+M_3k^{-5}\left(\|\sigma\|_{0,\Gamma}+\|\varphi\|_{0,\Gamma}\right) \tag{2.18}$$

§3. 非齐次问题与结语

对于内外域上的非齐次方程(1.1),其解的积分表达式为

$$w(q) = \int_\Gamma \left[\sigma w^* - \varphi(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_P} \right] dS_P + \int_\Omega f(p) w^*(p, q) d\Omega, \qquad q \in \Omega \cup \Omega' \tag{3.1}$$

在边界光滑的条件下，变量 σ, φ 可由如下变分方程解出：

$$\left.\begin{aligned} & b(v, v') = F(v'), \qquad \forall v' = (\sigma', \varphi') \in V \\ & F(v') = \int_\Gamma (w_0 \sigma' - g_0 \varphi') dS_Q + \int_\Gamma \int_\Omega f(p) \Big[\sigma'(Q) w^*(p, Q) \\ & \qquad + \varphi'(Q) \frac{\partial w^*(p, Q)}{\partial n_Q} \Big] d\Omega_P dS_Q \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

这里 $b(\cdot, \cdot)$ 同(2.1)中，将 $v = (\sigma, \varphi)$ 代入(3.1)式，即得到方程(1.1)的解• 若采用第一类近似基本解 w_k^{*h}，则 $v_h^{(k)} = \left(\sigma_h^{(k)}, \varphi_h^{(k)}\right) \in V_h^{(n, m)}$ 是如下变分方程的解

$$\left.\begin{aligned} & b_k(v_h^{(k)}, v') = F_k(v'), \quad b_k(\cdot, \cdot) \text{ 同(1.8)}, \qquad \forall v' \in V_h^{(n, m)} \\ & F_k(v') = \int_\Gamma [w_0 \sigma' - g_0 \varphi'] dS_Q + \int_\Gamma \int_\Omega f(p) \Big[\sigma'(Q) w_k^*(p, Q) \\ & \qquad + \varphi'(Q) \frac{\partial w_k^*(p, Q)}{\partial n_Q} \Big] d\Omega_P dS_Q \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

把 $v_h^{(k)}$ 代入近似解的积分表达式

$$w_h^{(k)}(q) = \int_\Gamma \left[\sigma_h^{(k)}(P) w_k^*(P, q) - \varphi_h^{(k)}(P) \frac{\partial w_k^*(P, q)}{\partial n_P} \right] dS_P + \int_\Omega f(p) w_k^*(p, q) d\Omega_P \tag{3.4}$$

得到非齐次方程(1.1)的近似解 $w_h^{(k)}$•

利用 Lax_Milgram 定理，与定理 4 的证明类似可得变分方程(3.3)在 $V_h^{(n, m)}$ 中存在唯一解•并且还可类似地得到误差估计定理 5 和 6• 只是需在估计式(2.8)和(2.15)右端分别增加 $bk^{-1}h^{-3/2}\|f\|_{0, \Omega}$ 和 $bk^{-2}\|f\|_{0, \Omega}$•

由定理 6 的结论不难看出，为保证近似解以 $O(h^{n+1})$ 的速度收敛，需要将 $V_h^{(n)}$ 和 $V_h^{(m)}$ 作合理的匹配，为方便起见取 $m = n + 1$• 为保证(2.15)式右端第二项收敛，还需调整 k 与 h 的匹配使得 $k^{-1}h^{-9/2} \to 0$• 例如当取 $k > h^{-(n+11/2)}$ 时，(2.15)右端将以 $O(h^{n+1})$ 的速度收敛• 由定理 5 还可看到，此时 $v_h^{(k)} = (\sigma_h^{(k)}, \phi_h^{(k)})$ 也将以 $O(h^{n+1})$ 的速度收敛到 v• 因此当采用(1.7)中近似基本解时，h 和 k 的匹配关系为 $k > h^{-(n+5.5)}$• 同样由定理 8 和定理 9 的结论可以看出，当 $k > h^{-(n+5.5)/4}$, $m = n + 1$ 时，(2.17)、(2.18)式右端项将以 $O(h^{n+1})$ 的速度分别收敛到 v 和 w• 因此当采用(1.8)中近似基本解时，h 和 k 的匹配关系为 $k > h^{-(n+5.5)/4}$• 若取 $n = 0$, $h = 10^{-2}$，则(1.7)中近似基本解的截断项数为 $k > 10^{11}$，而(1.8)中近似基本解的截断项数 $k > 10^{2.25}$• 由此可见，在相同精度下，(1.8)中近似基本解的截断项数要远远小于(1.7)中近似基本解的截断项数• 对于[1]中例 1，若取 $\Omega = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, $h = \pi/6 < 1$, $n = 0$，则(1.7)中近似基本解的截断项 $k > 12.88$ 即可，而(1.8)中截断项为 $k > 1.8945$• 对于例 2，则由于 $h = \pi/6$, $n = 0$，因而(1.8)中近似基本解的截断项 $k > 2.4343$• 如果用(1.7)中近似基本解，则 $k > 35.1163$，而这样大的截断项在实际计算中是十分困难的• 从以上分析可以看出在使用近似边界元方法时，必须要注意网格宽度 h 与近似基本解中的截断项 k 的匹配，否则很难求得满意的结果•

参 考 文 献

1 丁睿、朱正佑、程昌钧, 粘弹性薄板动力响应的边界元法(Ⅰ), 应用数学和力学, **18**(3) (1997), 211—216.

2 丁方允, 三维 Helmholtz 方程 Dirichlet 问题的边界元法及其收敛性分析, 兰州大学学报, **31**(3) (1995), 30—38.

3 祝家麟,《椭圆边值问题的边界元分析》, 科学出版社 (1987).

4 K. Ruotsalainen and W. Wendland, On the boundary element method for some nonlinear boundary value problem, *Numer. Math.*, **53**(1) (1988), 229—314.

5 R. Bellman, *Numerical Inversion of the Laplace Transform*, Amer. Elsevier Publ. Co. (1966), 624—635.

Boundary Element Method for Solving Dynamical Response of Viscoelastic Thin Plate (Ⅱ) ——Theoretical Analysis

Ding Rui

(Mechanical Postdoctoral Station, Southwestern Jiaotong University, Chengdu 610031, P. R. China)

Zhu Zhengyou Cheng Changjun

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract

In this paper, the necessary theoretical analysis for the approximation boundary element method to solve dynamical response of viscoelastic thin plate presented in [1] is discussed. The theorem of existence and uniqueness of the approximate solution and the error estimation is also obtained. Based on these conclusions, the principle for choosing the mesh size and the number of truncated term in the fundamental solution is given. It is shown that the theoretical analysis in this paper are consistent with the numerical results in [1].

Key words dynamic response, viscoelasticity, approximate boundary element method, error estimation