应用数学和力学, 第 19 卷 第 2 期(1998 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

一类非完整系统的 Lagrange 定理及其应用

李刚常[①] 何世本[①]

(叶庆凯推荐, 1995 年 9 月 6 日收到, 1997 年 6 月 28 日收到修改稿)

摘 要

本文研究一类非完整系统平衡位置流形的稳定性问题• 利用 ÑÁÅ¿À³ 直接法和稳定性定义将完整系统的 Lagrange 定理推广到一类非完整保守系统与耗散系统, 并对该类非完整系统平衡位置流形的渐近稳定性与耗散力间的关系作了新的表述, 最后举例说明定理的应用•

关键词 非完整系统 Lagrange 定理 稳定性 流形 ÑÁÅ¿À³ 直接法

§ 1. 引 言

自从 Whittaker 于 1904 年首先提出非完整系统的平衡稳定性问题[1]以来, 国内外学者在线性与非线性非完整系统平衡稳定性的研究方面做了大量工作, 取得了一系统列重要成果([2—7])• 然而, 迄今为止在非完整系统的稳定性分析中却很少见到有关 Lagrange 定理的阐述和应用• 文献[3] 虽有提及, 但未作专门讨论• 作为广大力学工作者所熟悉并在完整系统平衡稳定性分析中行之有效的著名判据, Lagrange 定理在非完整系统中究竟有多大的适用范围, 具有什么特征, 应如何表述, 其应用前景怎样, 这些都还是有待于研究的问题• 本文正是基于这一考虑, 并致力于稳定性判据的实际应用, 将 Lagrange 定理推广到一类非完整系统• 这种推广使一类非完整系统的平衡稳定性分析得到简化, 实际应用比较方便• 全文在给出一类非完整系统的平衡方程后, 利用 ÑÁÅ¿À³ 直接法和稳定性定义证明了所推广的平衡稳定性定理• 在定理的推广过程中还特别对一类非完整系统平衡位置流形的渐近稳定性与耗散力间的关系作了新的表述• 最后本文以两个非完整系统的经典实例说明了定理的具体应用•

§ 2. 非完整系统的运动方程与能量性质

设力学系统所受完整约束是定常的, 系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1, \cdots, n)$ 确定, 系统运动受有 g 个定常的非完整约束

$$\dot{q}_{e+\beta} = \dot{q}_{e+\beta}(q_s, \dot{q}_\sigma) \quad \begin{cases} \beta = 1, \cdots, g; & e = n - g \text{ 限环} \\ s = 1, \cdots, n; & \sigma = 1, \cdots, e \end{cases} \tag{2.1}$$

① 辽宁工程技术大学基础部, 辽宁阜新 123000

系统的运动方程可表示为广义 ±Å½Í´º¿ 方程的形式[4]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\sigma}-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial q_{e+\beta}}T_\sigma^{e+\beta}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial q_{e+\beta}}\cdot\frac{\partial \dot q_{e+\beta}}{\partial \dot q_\sigma}=Q''_\sigma \qquad (\sigma=1,\cdots,e) \tag{2.2}$$

其中
$$T_\sigma^{e+\beta}=\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot q_{e+\beta}}{\partial \dot q_\sigma}-\frac{\partial \dot q_{e+\beta}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial \dot q_{e+\beta}}{\partial q_{e+\gamma}}\cdot\frac{\partial \dot q_{e+\gamma}}{\partial \dot q_\sigma}$$

Lagrange 函数 $L=T-\Pi$, $L=T-\Pi$; T 为系统动能 $T=T(q_s,\dot q_s)(s=1,\cdots,n)$ 借助式(2.1)消去 $\dot q_{e+\beta}$ 而得的表达式.

$$Q''_\sigma=Q''_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q''_{e+\beta}\frac{\partial \dot q_{e+\beta}}{\partial \dot q_\sigma}$$

这里广义耗散力 $Q''_s=Q''_s(q_k,\dot q_k)(s,k=1,\cdots,n)$ 关于 $\dot q_k$ 可以是线性的, 也可以是非线性的, 且根据耗散力性质应满足 $Q''_s(q_k,0)=0$.

利用文献[4]对方程(2.2)所作的广义能量积分, 可知, 当 Lagrange 函数不显含时间 t, 并且 $\dot q_{e+\beta}$ 相对 $\dot q_\sigma(\sigma=1,\cdots,e)$ 是一次齐次函数时, 若系统不受耗散力作用, 则系统具有机械能守恒的积分, 即

$$T+\Pi=h \tag{2.3}$$

若系统受耗散力作用, 则系统的机械能对时间的变化等于系统的耗散功率, 即

$$\frac{d}{dt}(T+\Pi)=\sum_{\sigma=1}^{e}Q''_\sigma\dot q_\sigma \tag{2.4}$$

由于耗散力的性质, 恒有

$$\sum_{\sigma=1}^{e}Q''_\sigma\dot q_\sigma\leqslant 0 \tag{2.5}$$

§3. 一类非完整系统及其平衡方程

将 $\dot q_s=0$, $\ddot q_s=0\ (s=1,\cdots,n)$ 代入方程(2.1)、(2.2)得非完整系统的平衡方程

$$\begin{cases}\dot q_{e+\beta}(q_s,0)=0 & (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \qquad (3.1)\\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma}+\displaystyle\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \Pi}{\partial q_{e+\beta}}\frac{\partial \dot q_{e+\beta}}{\partial \dot q_\sigma}=0 & (\sigma=1,\cdots,e;\ e=n-g) \qquad (3.2)\end{cases}$$

考虑到在非完整系统中推广 Lagrange 定理的需要, 设非完整约束(2.1)可表示为 $\dot q_{e+\beta}$ 相对 $\dot q_\sigma(\sigma=1,\cdots,e)$ 是一次齐次的形式, 即

$$\dot q_{e+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{e}\frac{\partial \dot q_{e+\beta}}{\partial \dot q_\sigma}\dot q_\sigma \qquad (\beta=1,\cdots,g) \tag{3.3}$$

这里一般有 $\partial\dot q_{e+\beta}/\partial\dot q_\sigma=f_{e+\beta,\sigma}(q_s,\dot q_\tau)\ (s=1,\cdots,n;\ \tau=1,\cdots,e)$, 且 $\partial\dot q_{e+\beta}/\partial\dot q_\sigma$ 在系统平衡状态 $q_s=q_s^0$, $\dot q_s=0\ (s=1,\cdots,n)$ 的邻域内连续. 特别地, 当 $\partial\dot q_{e+\beta}/\partial\dot q_\sigma=B_{e+\beta,\sigma}(q_s)\ (s=1,\cdots,n)$ 时, 约束(3.3)为线性齐次定常的.

又设系统的势能 Π 为 ±Å½Í´º¿ 型, 即

$$\Pi=\Pi(q_1,\cdots,q_r) \qquad (r\leqslant e;\ e=n-g) \tag{3.4}$$

本文讨论满足上述条件(3.3)、(3.4)的一类非完整定常力学系统, 该类系统包括非完整约

束为一阶线性与一阶非线性的两种情况, 而 ±Á½Í´º¿ 系统则是该类系统中最常见的一个特例•

现在考虑一类非完整系统的平衡方程• 由于约束(3.3) 对 $\dot q_s = 0$ 自然满足, 所以方程(3.1)成为恒等式, 再将式(3.4)代入方程(3.2), 则系统的平衡方程简化为

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_\rho} = 0 \qquad (\rho = 1, \cdots, r;\ r \leqslant e) \tag{3.5}$$

式(3.5)即为本文所讨论的一类非完整系统无论有无耗散力作用时的平衡方程•

假设方程(3.5)彼此独立, 那么由方程(3.5)可确定系统在 n 维位形空间中的平衡位置为 $q_1^0, \cdots, q_r^0; q_{r+1}^0, \cdots, q_n^0$• 由于势能 Π 仅为 $q_1, \cdots, q_r$ 的函数, 所以 $q_{r+1}^0, \cdots, q_n^0$ 可在各自取值范围内任意给定• 因此, 与完整系统不同, 该类非完整系统的平衡位置一般不是 n 维位形空间中的孤立平衡点, 而是 n 维位形空间中全体平衡位置所构成的 $n-r$ 维平衡位置流形• 设为 D, 即

$$D = \left\{ (q_1, \cdots, q_n) \,\middle|\, q_1 = q_1^0, \cdots, q_r = q_r^0; q_{r+\alpha} \in R, (\alpha = 1, \cdots, n-r) \right\} \tag{3.6}$$

在实际问题中, 方程(3.5)可能不全是独立的, 此时平衡位置流形的维数将大于 $n-r$•

§4. 一类非完整系统的 Lagrange 定理

由于满足条件(3.4)的系统(2.2)、(3.3)在流形 D 上任一给定点的平衡状态 $q_s = q_s^0$, $\dot q_s = 0\ (s = 1, \cdots, n)$ 的稳定性问题, 都能通过简单的坐标变换

$$q_s' = q_s - q_s^0, \quad \dot q_s' = \dot q_s \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{4.1}$$

化成相应的扰动方程零解 $q_s' = 0$, $\dot q_s' = 0\ (s = 1, \cdots, n)$ 的稳定性问题• 因此, 为简化讨论, 不失一般性, 可设系统在流形 D 上任意给定点的平衡状态为 $q_s^0 = 0$, $\dot q_s^0 = 0\ (s = 1, \cdots, n)$, 这时系统在平衡状态附近的扰动方程即可表示为广义 ±Á½Í´º¿ 方程(2.2)和约束方程(3.3)•

以下为简化表述, 本文约定以 q_s, $\dot q_s$ 分别表示 $q_s (s = 1, \cdots, n)$ 及 $\dot q_s (s = 1, \cdots, n)$ 变量的全体•

定义 4.1 若对平衡位置流形 D 上任意给定的点 q_s^0, 存在某个 ε 邻域, 使得对于 $|q_s - q_s^0| < \varepsilon$, 且 $(q_1 - q_1^0)^2 + \cdots + (q_r - q_r^0)^2 \neq 0$ 的点 q_s, 总有 $\Pi(q_s^0) < \Pi(q_s)$, 即 $\Pi(q_1^0, \cdots, q_r^0) < \Pi(q_1, \cdots, q_r)$, 则称势能 Π 在平衡位置流形 D 上取严格极小值•

定义 4.2 若对平衡位置流形 D 上任意给定的点, 系统按 ÑÁÅ¿À³ 意义都是稳定的, 则称系统的平衡位置流形 D 是稳定的•

有了上述准备, 我们有 Lagrange 定理在一类非完整系统中的推广•

定理 4.1 对于具有 ±Á½Í´º¿ 型势能函数 $\Pi = \Pi(q_1, \cdots, q_r) (r \leqslant e; e = n - g)$, 并受有满足条件

$$\dot q_{e+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{e} \frac{\partial \dot q_{e+\beta}}{\partial \dot q_\sigma} \dot q_\sigma \qquad (\beta = 1, \cdots, g)$$

的非完整约束 $\dot q_{e+\beta} = \dot q_{e+\beta}(q_s, \dot q_\sigma) (\sigma = 1, \cdots, e)$ 的定常力学系统, 若系统势能在平衡位置流形上取严格极小值, 则无论有无耗散力作用, 该平衡位置流形是稳定的•

证明 不失一般性, 设系统在流形 D 上任意给定的平衡位置为 $q_s^0 = 0$•

(1) 首先证明系统的平衡状态 $q_s^0 = 0$, $\dot q_s^0 = 0$ 对变量 $q_1, \cdots, q_r, \dot q_1, \cdots, \dot q_e (r \leqslant e)$ 是稳定的•

取系统总机械能为 ÑÁÅ¿À³ 函数

$$V = T(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_e) + \Pi(q_1, \cdots, q_r) \qquad (r \leqslant e, e = n - g) \tag{4.2}$$

其中预先嵌入约束(3.3)的动能

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{e}\sum_{\tau=1}^{e} a_{\sigma\tau}(q_s)\dot{q}_\sigma \dot{q}_\tau \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{4.3}$$

由动能的物理意义知, 在一般情况下, 不管 q_s 取什么值, 只要 $\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_e$ 不同时为零, 总有 $T > 0$, 所以, T 仅是广义速度 $\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_e$ 的正定齐二次函数•

取平衡位置 $q_1^0 = \cdots = q_r^0 = 0$ 的势能 $\Pi(0, \cdots, 0) = 0$, 由定理 4.1 条件与定义 4.1 知, 只要 $q_\rho(\rho = 1, \cdots, r)$ 不同时为零, 总有严格不等式

$$\Pi(q_1, \cdots, q_r) > \Pi(0, \cdots, 0) = 0 \tag{4.4}$$

成立, 所以, Π 为 $q_1, \cdots, q_r$ 的正定函数• 由此可知, $V = T + \Pi$ 关于变量 $q_1, \cdots, q_r, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_e$ 正定•

又因为 V 沿方程(2.2)解的导数为

$$\dot{V} = \sum_{\sigma=1}^{e} Q''_\sigma \dot{q}_\sigma$$

当系统不受耗散力作用时, $\dot{V} = 0$, 当系统受耗散力作用时, $\dot{V} \leqslant 0$, 所以, 在这两种情形下, 系统的平衡状态 $q_s^0 = 0, \dot{q}_s^0 = 0$ 相对变量 $q_1, \cdots, q_r, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_e (r \leqslant e)$ 都是稳定的•

(2) 其次证明系统的平衡状态 $q_s^0 = 0, \dot{q}_s^0 = 0$ 相对变量 $\dot{q}_{e+1}, \cdots, \dot{q}_n, q_{e+1}, \cdots, q_n$ 稳定•

(a) 因为方程组(3.3)中 $\partial \dot{q}_{e+\beta} / \partial \dot{q}_\sigma$ 在平衡状态 $q_s^0 = 0, \dot{q}_s^0 = 0$ 邻域内连续, 所以, 在该邻域内对任意给定的 $T \geqslant 0$, $t_0 > 0$, 在 $[t_0, T]$ 或 $[T, t_0]$ 上,

$$\left|\frac{\partial \dot{q}_{e+\beta}}{\partial \dot{q}_1}\right| \leqslant M_1, \cdots, \left|\frac{\partial \dot{q}_{e+\beta}}{\partial \dot{q}_e}\right| \leqslant M_e$$

令 $M = \max\{M_1, \cdots, M_e\}$, 现任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\varepsilon_1 = \varepsilon / eM > 0$, 由(1)的证明已知平衡状态相对 $\dot{q}_\sigma(t) (\sigma = 1, \cdots, e)$ 稳定, 就是存在 $\delta_1 > 0$, 使得 $|\dot{q}_\sigma(t_0)| < \delta_1 (\sigma = 1, \cdots, e; t_0$ 为初时刻$)$ 时, $|\dot{q}_\sigma(t)| < \varepsilon_1$ 总成立• 因为

$$|\dot{q}_{e+\beta}| \leqslant \left|\frac{\partial \dot{q}_{e+\beta}}{\partial \dot{q}_1}\right| |\dot{q}_1| + \cdots + \left|\frac{\partial \dot{q}_{e+\beta}}{\partial \dot{q}_e}\right| |\dot{q}_e| < eM\varepsilon_1 = eM \cdot \frac{\varepsilon}{eM} = \varepsilon$$

$$(t_0 \leqslant t \leqslant T) \text{ 或 } (T \leqslant t \leqslant t_0)$$

这样 $|\dot{q}_{e+\beta}(t)| < \varepsilon$, 又 $|\dot{q}_{e+\beta}(t_0)| < \varepsilon$, 令 $0 < \delta < \varepsilon$, 那么, 由于 T 是任意给定的, 当 $|\dot{q}_{e+\beta}(t_0)| < \delta$ 时, $|\dot{q}_{e+\beta}(t)| < \varepsilon$ 对一切 $t \geqslant 0$ 总成立• 所以, 按定义知, 系统的平衡状态 $q_s^0 = 0, \dot{q}_s^0 = 0$ 相对变量 $\dot{q}_{e+\beta}(\beta = 1, \cdots, n - e)$ 是稳定的•

(b) 再证系统的平衡状态相对变量 $q_{e+\beta}(\beta = 1, \cdots, n - e)$ 稳定• 用反证法, 注意

$$q_{e+\beta}(t) = \int_{t_0}^{t} \dot{q}_{e+\beta}(t)\,dt + q_{e+\beta}(t_0) \qquad (\beta = 1, \cdots, n - e) \tag{4.5}$$

依(a)已证得系统的平衡状态相对变量 $\dot{q}_{e+\beta}(t)$ 稳定, 现假定相对 $q_{e+\beta}(t)$ 不稳定, 则对某个正数 $\varepsilon > 0$(取 $\varepsilon = \varepsilon_1 + |q_{e+\beta}(t_0)|$), 存在 $\delta > 0$, $t_1 > 0$, 使得 $|q_{e+\beta}(t_0)| < \delta$ 时, $|q_{e+\beta}(t_1)| \geqslant \varepsilon$ 成立, 于是

$$|q_{e+\beta}(t_1)| = \left|\int_{t_0}^{t_1} \dot{q}_{e+\beta}(t)\,dt + q_{e+\beta}(t_0)\right| \geqslant \varepsilon$$

但是

$$\left|\int_{t_0}^{t_1}\dot{q}_{e+\beta}(t)\,dt\right| + \left|q_{e+\beta}(t_0)\right| \geqslant \left|\int_{t_0}^{t_1}\dot{q}_{e+\beta}(t)\,dt + q_{e+\beta}(t_0)\right| \geqslant \varepsilon$$

所以,按积分中值定理

$$\left|\dot{q}_{e+\beta}(\xi)\right|\left|t_1 - t_0\right| \geqslant \varepsilon - \left|q_{e+\beta}(t_0)\right| = \varepsilon_1 > 0$$

则

$$\left|\dot{q}_{e+\beta}(\xi)\right| \geqslant \frac{\varepsilon_1}{\left|t_1 - t_0\right|} = \varepsilon_0 > 0 \qquad (t_0 < \xi < t_1)$$

于是,对任何 $\delta > 0$,某个数 $\varepsilon_0 > 0$,存在 $\xi > t_0$,当 $\left|\dot{q}_{e+\beta}(t_0)\right| < \delta$ 时,使 $\left|\dot{q}_{e+\beta}(\xi)\right| \geqslant \varepsilon_0$ 成立,这显然与平衡状态相对 $\dot{q}_{e+\beta}(t)$ 稳定相矛盾• 由此可见,系统的平衡状态 $q_s^0 = 0$, $\dot{q}_s^0 = 0$ 相对变量 $q_{e+\beta}(\beta = 1, \cdots, n - e)$ 是稳定的•

(3) 当 $r < e$ 时,尚需证明系统的平衡状态 $q_s^0 = 0$, $\dot{q}_s^0 = 0$ 相对变量 $q_{r+1}, \cdots, q_e$ 稳定•

$$q_{r+l}(t) = \int_{t_0}^{t}\dot{q}_{r+l}(t)\,dt + q_{r+l}(t_0) \qquad (l = 1, \cdots, e - r) \tag{4.6}$$

因为依(1)已知平衡状态 $q_s^0 = 0$, $\dot{q}_s^0 = 0$ 相对变量 $\dot{q}_{r+l}$ 稳定,类似(2)-(b)用反证法依同样步骤证得平衡状态 $q_s^0 = 0$, $\dot{q}_s^0 = 0$ 相对变量 $q_{r+l}(l = 1, \cdots, e - r)$ 稳定•

至此,我们已证得具有 ±À½Í´º¿ 型势能函数(3.4),并受有满足条件(3.3)的非完整约束(2.1)的定常力学系统在流形 D 上任一给定的平衡位置处,符合定理 4.1 条件时,无论有无耗散力作用,相对全部变量 $q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n$ 是稳定的• 于是按定义 4.2,系统的平衡位置流形是稳定的• 定理 4.1 证毕•

现在进一步考虑系统在耗散力作用下平衡位置流形 D 的渐近稳定性•

设约束(3.3)中 $\partial\dot{q}_{e+\beta}/\partial\dot{q}_\sigma$ 在平衡状态 $q_s = q_s^0 \in D$, $\dot{q}_s = 0$ 的邻域内连续;且对一切 $t \geqslant 0$ 有界•

若系统相对独立的广义速度 $\dot{q}_\sigma(t)$ $(\sigma = 1, \cdots, e)$ 受完全耗散力 $Q''_\sigma(\sigma = 1, \cdots, e)$ 作用,则

$$\sum_{\sigma=1}^{e} Q''_\sigma \dot{q}_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{e}\left(Q''_\sigma + \sum_{\beta=1}^{g} Q''_{e+\beta}\frac{\partial\dot{q}_{e+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}\right)\dot{q}_\sigma \begin{cases} = 0 & (\dot{q}_\sigma = 0) \\ < 0 & (\dot{q}_\sigma \neq 0) \end{cases} \tag{4.7}$$

这里无论 $Q''_{e+\beta}(\beta = 1, \cdots, g)$ 是否存在,只要 $Q''_\sigma \neq 0$,这个关系总成立• 因此,这个条件比通常所说的完全耗散力条件 $Q''_s \neq 0$ $(s = 1, \cdots, n)$ 要宽松些•

定义 4.3 若对平衡位置流形 D 上任意给定的点,系统相对部分变量 $q_1, \cdots, q_r, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n(r \leqslant n - g)$ 按 ÑÁÅ¿À³ 意义都是渐近稳定的,则称该平衡位置流形 D 相对部分变量 $q_1, \cdots, q_r, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n$ 是渐近稳定的•

定理 4.2 对于具有 ±À½Í´º¿ 型势能函数 $\Pi = \Pi(q_1, \cdots, q_r)$ $(r \leqslant e; e = n - g)$,并受有满足条件

$$\dot{q}_{e+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{e}\frac{\partial\dot{q}_{e+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma \qquad (\beta = 1, \cdots, g)$$

的非完整约束 $\dot{q}_{e+\beta} = \dot{q}_{e+\beta}(q_s, \dot{q}_\sigma)$ $(\sigma = 1, \cdots, e)$ 的定常力学系统,若系统势能在平衡位置流形上取严格极小值,且耗散力对独立的广义速度是完全的,则该平衡位置流形是稳定的,且相对部分变量 $q_1, \cdots, q_r, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n(r \leqslant n - g)$ 是渐近稳定的•

证明 在定理 4.2 条件下,由定理 4.1 证明知,系统在平衡位置流形 D 上任意给定点相对全部变量 $q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n$ 是稳定的• 现只需进一步证明系统相对部分变量 $q_1, \cdots, q_r$,

$\dot q_1, \cdots, \dot q_n (r \leqslant n - g)$ 还是渐近稳定的•

(1) 首先证明系统的平衡状态 $q_s^0 = 0, \dot q_s^0 = 0$ 对变量 $q_1, \cdots, q_r, \dot q_1, \cdots, \dot q_e (r \leqslant e)$ 是渐近稳定的•

取系统总机械能为 ÑÁÅ¿À³ 函数

$$V = T(q_1, \cdots, q_n, \dot q_1, \cdots, \dot q_e) + \Pi(q_1, \cdots, q_r)$$

由定理 4.1 证明已知, 若在点 $q_1^0 = \cdots = q_r^0 = 0$ 置 $\Pi(0, \cdots, 0) = 0$, 则在 $q_s^0 = 0, \dot q_s^0 = 0$ 邻域内 V 关于变量 $q_1, \cdots, q_r, \dot q_1, \cdots, \dot q_e$ 正定• V 沿方程(2.2)解的导数

$$\dot V = \sum_{\sigma=1}^{e} Q''_\sigma \dot q_\sigma$$

当耗散力对独立的广义速度 $\dot q_1, \cdots, \dot q_e$ 是完全的, $\dot V$ 关于变量 $\dot q_1, \cdots, \dot q_e$ 是负定的, 但关于变量 $q_1, \cdots, q_r, \dot q_1, \cdots, \dot q_e$ 全体是常负的•

为证明平衡状态 $q_s^0 = 0, \dot q_s^0 = 0$ 对变量 $q_1, \cdots, q_r, \dot q_1, \cdots, \dot q_e$ 渐近稳定, 只需证明集合

$$M = \left\{ (q_\rho, \dot q_\sigma) \mid \dot V_t = \sum_{\sigma=1}^{e} Q''_\sigma \dot q_\sigma = 0,\ \rho = 1, \cdots, r;\ \sigma = 1, \cdots, e \right.$$

中除 $q_1 = \cdots = q_r = 0, \dot q_1 = \cdots = \dot q_e = 0$ 外无系统的其他非零解• 由于系统所受耗散力对独立的广义速度 $\dot q_\sigma$ 是完全的, 所以,

$$\dot V = \sum_{\sigma=1}^{e} Q''_\sigma \dot q_\sigma = 0$$

保证了 $\dot q_\sigma = 0\ (\sigma = 1, \cdots, e)$, 于是, M 在平衡状态 $q_s^0 = 0, \dot q_s^0 = 0$ 邻域内就是在平衡位置 $q_s^0 = 0$ 的邻域内, 即 $M = \left\{ (q_\rho, 0) \mid \dot V = 0, \rho = 1, \cdots, r \right.$, 并有 $\ddot q_\sigma = 0\ (\sigma = 1, \cdots, e)$• 将 $\dot q_\sigma = 0, \ddot q_\sigma = 0$ 代入扰动方程(2.2)和(3.3)并注意到式(3.4), 得 $\partial \Pi / \partial q_\rho = 0\ (\rho = 1, \cdots, r)$, 此即为系统的平衡方程• 于是, 集合 M 中满足该方程的解只能是 $q_\rho = q_\rho^0 = 0\ (\rho = 1, \cdots, r; r \leqslant e)$• 所以, 在集合 M 中除 $q_1 = \cdots = q_r = 0, \dot q_1 = \cdots = \dot q_e = 0$ 外, 不再包含系统的其他非零解• 于是系统的平衡状态 $q_s^0 = 0, \dot q_s^0 = 0$ 相对变量 $q_1, \cdots, q_r, \dot q_1, \cdots, \dot q_e (r \leqslant e)$ 是渐近稳定的•

(2) 其次证明系统的平衡状态 $q_s^0 = 0, \dot q_s^0 = 0$ 相对变量 $\dot q_{e+1}, \cdots, \dot q_n$ 渐近稳定•

由(1)的结论已知 $t \to \infty$ 时, $\dot q_\sigma(t) \to 0\ (\sigma = 1, \cdots, e)$, 因 $\partial \dot q_{e+\beta} / \partial \dot q_1, \cdots, \partial \dot q_{e+\beta} / \partial \dot q_e$ 对一切 $t \geqslant 0$, 在 $q_s^0 = 0, \dot q_s^0 = 0$ 邻域内有界, 所以, 由

$$\dot q_{e+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{e} \frac{\partial \dot q_{e+\beta}}{\partial \dot q_\sigma} \dot q_\sigma \qquad (\beta = 1, \cdots, g; e = n - g)$$

就得知 $t \to \infty$ 时, $\dot q_{e+\beta}(t) \to 0$, 即系统的平衡状态 $q_s^0 = 0, \dot q_s^0 = 0$ 相对变量 $\dot q_{e+\beta} (\beta = 1, \cdots, n - e)$ 是渐近稳定的•

至此, 我们已证得具有 ±Á½Í´º¿ 型势能函数(3.4), 并受有满足条件(3.3)的非完整约束(2.1)的定常力学系统在流形 D 上任一给定的平衡位置处, 符合定理 4.2 条件时相对全部变量 $q_1, \cdots, q_n, \dot q_1, \cdots, \dot q_n$ 是稳定的, 且相对部分变量 $q_1, \cdots, q_r, \dot q_1, \cdots, \dot q_n (r \leqslant n - g)$ 还是渐近稳定的• 于是, 按定义 4.2 和定义 4.3 知, 系统的平衡位置流形是稳定的, 且该平衡位置流形相对部分变量 $q_1, \cdots, q_r, \dot q_1, \cdots, \dot q_n$ 是渐近稳定的• 定理 4.2 证毕•

§5. 应 用 实 例

例 **5.1** 设质量为 m, 半径为 R, 质心偏离球心距离为 l 的非匀质球在粗糙水平面上滚动

且旋转•

取球心坐标 x, y, Resal 角 ψ, θ 及绕动力对称轴的转角 φ 为广义坐标[4]• 非完整约束方程为

$$\dot{x} = R\dot{\psi} - R\dot{\varphi}\sin\theta, \quad \dot{y} = -R\dot{\theta}\cos\psi - R\dot{\varphi}\sin\psi\cos\theta \tag{5.1}$$

球的动能为

$$T = \frac{1}{2}m\left\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2l[\dot{x}(\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi - \dot{\psi}\cos\theta\cos\psi) + \dot{y}\dot{\theta}\cos\theta] + l^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\cos^2\theta)\right\} + \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\cos^2\theta) + \frac{1}{2}C(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta)^2 \tag{5.2}$$

球的势能为

$$\Pi = -mgl\cos\theta\cos\psi \tag{5.3}$$

由方程(5.1)知, 约束是一阶线性、齐次、定常的, 且不含 x, y; 动能 T, 势能 Π 均不含 x, y (且不含 φ)• 因此系统为 ±Á½Í´º¿ 系统, 满足条件(3.3)、(3.4)属于本文讨论的一类非完整系统•

设球运动时受粘性阻尼, 耗散函数为

$$F = \frac{1}{2}h(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2}h_1\omega_z^2 \qquad (h > 0, h_1 > 0) \tag{5.4}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\cos\theta\sin\psi \\ \omega_y &= \dot{\psi} - \dot{\varphi}\sin\theta \\ \omega_z &= -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\cos\theta\cos\psi \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

0

由平衡条件(3.5)给出 $\partial\Pi/\partial\theta = 0, \partial\Pi/\partial\psi = 0$, 得系统的平衡方程

$$\sin\theta\cos\psi = 0, \qquad \cos\theta\sin\psi = 0 \tag{5.6}$$

满足方程(5.6)的平衡位置为

① $\theta^\circ = 0, \psi^\circ = 0$; ② $\theta^\circ = \pi, \psi^\circ = \pi$; ③ $\theta^\circ = \pi, \psi^\circ = 0$; ④ $\theta^\circ = 0, \psi^\circ = \pi$

这些平衡位置在 5 维空间 $(\psi, \theta, \varphi, x, y)$ 中构成 3 维平衡位置流形, 由于系统的动力对称性, ①与②, ③与④分别表示系统相同的力学形态• 我们用平衡位置流形 D_1, D_2 来表示, 即

$$D_1 = \{(\theta, \psi, \varphi, x, y) \mid \theta = 0, \psi = 0, \varphi \in [0, 2\pi], x \in R, y \in R\}$$

$$D_2 = \{(\theta, \psi, \varphi, x, y) \mid \theta = \pi, \psi = 0, \varphi \in [0, 2\pi], x \in R, y \in R\}$$

$\theta = \psi = \pi/2$ 也满足方程(5.6), 但由动力学分析可知, 它不满足平衡状态要求, 所以不是平衡位置, 应予剔除•

为考察平衡位置流形的稳定性, 将势能 $\Pi(\theta, \psi)$ 在 D_1 上任给平衡位置的邻域内展开

$$\begin{aligned} \Pi(\theta, \psi) &= -mgl\cos\theta\cos\psi = -mgl\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right)\left(1 - \frac{\psi^2}{2!} + \frac{\psi^4}{4!} - \cdots\right) \\ &= -mgl + mgl\left(\frac{\theta^2}{2} + \frac{\psi^2}{2}\right) + \cdots \end{aligned}$$

去掉常数

$$\Pi(\theta, \psi) = mgl\left(\frac{\theta^2}{2} + \frac{\psi^2}{2}\right) + \cdots$$

因为二次项正定, 所以

$$\Pi(\theta, \psi) > \Pi(0, 0) = 0$$

系统势能 Π 在 D_1 上取严格极小值, 因此根据定理 4.1, 平衡位置流形 D_1 是稳定的•

类似上述讨论可知，势能 $\Pi(\theta,\psi)$ 在 D_2 上取严格极大值，所以平衡位置流形 D_2 不稳定•这一结论所依据的平衡位置流形不稳定性定理将另文讨论•

再考察平衡位置流形 D_1 的渐近稳定性，在(5.4)式中将 F 视为 $\dot\psi,\dot\theta,\dot\varphi$ 的复合函数，则广义耗散力为

$$\left.\begin{aligned} Q''_{\dot\psi} &= -\frac{\partial F}{\partial\dot\psi} = -h\omega_y \\ Q''_{\dot\theta} &= -\frac{\partial F}{\partial\dot\theta} = -h\omega_x\cos\psi + h_1\omega_z\sin\psi \\ Q''_{\dot\varphi} &= -\frac{\partial F}{\partial\dot\varphi} = -h\omega_x\cos\theta\sin\psi + h\omega_y\sin\theta - h_1\omega_z\cos\theta\cos\psi \end{aligned}\right\}\qquad(5.7)$$

式中 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 由(5.5)式确定•

令 $\quad Q''_1 = Q''_{\dot\psi},\ Q''_2 = Q''_{\dot\theta},\ Q''_3 = Q''_{\dot\varphi};\ \dot q_1 = \dot\psi,\ \dot q_2 = \dot\theta,\ \dot q_3 = \dot\varphi$

利用式(4.7)作检验，并将式(5.7)代入，得

$$\sum_{\sigma=1}^{3} Q''_\sigma\dot q_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{3} Q''_\sigma\dot q_\sigma = Q''_{\dot\psi}\dot\psi + Q''_{\dot\theta}\dot\theta + Q''_{\dot\varphi}\dot\varphi$$
$$= -h(\omega_x^2+\omega_y^2) - h_1\omega_z^2 = -2F < 0$$

由此可知，系统相对独立的广义速度$(\dot\psi,\dot\theta,\dot\varphi)$受完全耗散力，根据定理 4.2，系统的平衡位置流形 D_1 相对部分变量 ψ,θ 以及 $\dot\psi,\dot\theta,\dot\varphi,\dot x,\dot y$ 又是渐近稳定的•

这个结果较之文献[4]所记叙的线性化方法的分析结果已有进步•

例 5.2 设一质量为 m 的质点在力场中作小振动，其动能 $T = m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)/2$，弹性势能 $\Pi = k(x^2+y^2)/2\ (k>0)$，耗散函数 $F = h(\dot x^2+\dot y^2)/2\ (h>0)$，它的运动受有 Apell 非完整约束

$$\dot z^2 = a^2(\dot x^2+\dot y^2)\qquad(a>0)\qquad(5.8)$$

显然，约束(5.8)是一阶非线性、齐次、定常的，且满足条件(3.3)的一次齐次性要求，即

$$\dot z = \frac{\partial\dot z}{\partial\dot x}\dot x + \frac{\partial\dot z}{\partial\dot y}\dot y = a\left(\frac{\dot x}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}\dot x + \frac{\dot y}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}\dot y\right) = a\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\qquad($$

势能函数 Π 为 ±Á½Í´º¿ 型，满足条件(3.4)，所以，系统属本文讨论的一类非完整系统•

根据平衡条件(3.5)有

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x} = 0;\qquad \frac{\partial\Pi}{\partial y} = 0$$

得系统的平衡位置流形为

$$D = \{(x,y,z)\mid x = y = 0,\ z\in R\}$$

考察其稳定性，在 D 上任意给定的平衡位置均满足

$$\Pi(x,y) > \Pi(0,0) = 0$$

系统势能 Π 在 D 上取严格极小值，因此根据定理 4.1，无论系统是否受耗散力作用，平衡位置流形 D 都是稳定的• 在此基础上我们可讨论系统在流形 D 附近的小振动•

若用扰动方程的一次近似方程来讨论无阻尼时系统的稳定性，将会遇到其特征根为共轭虚根的临界情形，还需研究非线性项对稳定性的影响，显然，这种方法不如定理 4.1 简单•

再考察耗散力对稳定性的影响，因为

$$Q''_{\dot x} = -\frac{\partial F}{\partial\dot x} = -h\dot x;\qquad Q''_{\dot y} = -\frac{\partial F}{\partial\dot y} = -h\dot y$$

系统所受耗散力相对独立的广义速度$(\dot x, \dot y)$是完全的• 所以, 根据定理 4. 2, 流形 D 相对部分变量 x , y 以及 $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$ 又是渐近稳定的•

以上两个实例表明, 在对一类非完整系统进行平衡稳定性分析时, 推广的 Lagrange 定理比线性化方法简捷, 且更便于应用, 分析结果也更为深入•

§ 6. 结　　论

Lagrange 定理可以推广到一类具有 ±Á½Í´º¿ 型势能函数并满足 $\dot q_{\varepsilon+\beta}$ (β= 1, …, g) 相对 $\dot q_\sigma$ (σ= 1, …, $n-g$) 为一次齐次函数的一阶线性与非线性、齐次、定常的非完整约束系统• 该类系统的平衡条件与完整保守系统具有相同的形式• 其平衡位置一般不是孤立的, 而是组成流形• 当系统势能在平衡位置流形上取严格极小值时, 无论有无耗散力作用, 系统的平衡位置流形都是稳定的• 若系统相对独立的广义速度受有完全耗散力, 则系统的平衡位置流形相对势能函数所含的广义坐标变量以及全部广义速度变量还是渐近稳定的•

参　考　文　献

1 E. T. Whittaker, A Treatise on the Analytical Dynamics of Particals and Rigid Bodies, Cambridge Univ. Press, Eng. (1904), 221—225.

2 Ш. . ¶»¾±Â¼º . . ÅÆ±Þ, º¿±¼º¼± ¶ÀÀ½À¿À¾¿ÍÇ ºÃÄ¶¾, . (1967), 241.

3 . . Å¾Ñ¿È¶³, ² ÅÃÄÀ»Éº³ÀÃÄº µ³º ,¶¿ºÑ ¿¶ÀÀ½À¿À¾¿ÍÇ ÃºÃÄ¶¾, , **31**(2) (1967), 260—271.

4 梅凤翔,《非完整系统力学基础》, 北京工业学院出版社, 北京 (1985), 323—325, 385—389.

5 梅凤翔, 关于非线性非完整系统平衡状态的稳定性, 科学通报, **37**(1) (1992), 82—85.

6 朱海平、梅凤翔, 一类非完整系统关于部分变元稳定性与关于全部变元稳定性的关系, 科学通报, **39** (2) (1994), 129—132.

7 朱海平、梅凤翔, 关于非完整力学系统相对部分变量的稳定性, 应用数学和力学, **16**(3) (1995), 225—233.

Lagrange′s Theorem for a Class of Nonholonomic Systems and Its Application

Li Gangchang　　He Shiben

(Department of Basic Science, Liaoning Technical University, Fuxin, Liaoning 123000, P. R. China)

Abstract

The stability problem for the manifold of equilibrium positions of a class of nonholonomic systems is studied in this paper. Based on Liapunov′s direct method and the definition of stability, Lagrange′s theorem of holonomic systems is extended to a class of nonholonomic conservative systems and dissipative systems, and a new expression is made to the relation between asymptotic stability for the manifold of equilibrium positions of this class of nonholonomic systems and dissipative forces. Two examples are finally given to illustrate the application of the theorems.

Key words　nonholonomic system, Lagrange′s theorem, manifold, stability, Liapunov′s direct method