应用数学和力学, 第 19 卷 第 1 期(1998 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

转动系统的相对论性分析力学理论*

罗绍凯①

(李骊推荐, 1996 年 10 月 24 日收到, 1997 年 5 月 20 日收到修改稿)

摘　　要

本文讨论了转动相对论力学理论, 主要是建立转动系统的相对论性分析力学理论• 构造转动系统的相对论性广义动能函数 $T_r^* = \sum_{i=1}^{n} I_{0i}\Gamma_i^{2}\left(1-\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^{2}}\right)$ 和广义加速度能量函数 $S_r^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i\left[\frac{(\dot{\theta}_i\cdot\ddot{\theta}_i)^2}{\Gamma_i^{2}-\dot{\theta}_i^2}+\ddot{\theta}_i^2\right]$, 给出其 Hamilton 原理和三种不同形式的 D′Alembert 原理; 对于完整约束系统, 建立了转动系统的相对论性 Lagrange 方程、Nielsen 方程、Appell 方程和 Hamilton 正则方程; 对于非完整约束系统, 建立了转动系统的相对论性 Routh 方程、±Á½Í´º¿ 方程、Nielsen 方程和 Appell 方程; 并给出转动系统的相对论性 Noether 守恒律•

关键词　转动系统　相对论　分析力学　非完整约束　变分原理　运动方程　守恒律

§1. 引　　言

自旋运动是微观粒子的固有属性• 1979 年, R. Bengtsson 和 S. Frauendorf 精确测量 14 种核子的自旋转速最大值, 结果表明各核子的自旋转速最大值各不相同[1]• 随着科学与技术的进步, 越来越多的实验现象与高速转动问题有关, 爱因斯坦的相对论理论和经典力学的转动理论已不适用, 近年来建立的相对论性完整和非完整系统的分析力学理论[6~11] 也不适用• M. Carmeli 于 1985 年, 建立了转动相对论力学理论[2~5], 本文对该理论加以探讨, 主要是首次建立转动系统的相对论性分析力学的理论框架, 构造转动系统相对论性的新型动力学函数, 给出多种形式的变分原理、运动方程及相应的守恒律•

§2. 转动相对论力学

1. 基本假设

假设(1)　任何物理定律在一切相互匀角速转动的系统中具有相同的表述形式•

假设(2)　在一切相互匀角速转动的系统中, 静止转动惯量一定的转动物体均具有确定的转速上限 Γ•

* 河南省自然科学基金资助课题

① 商丘师专, 河南商丘 476000

如果坐标系 $S'(Ox'y'z')$ 与 $S(Oxyz)$ 的 Oz 轴重合, 且 S' 系绕 S 系的 Oz 轴以匀角速度 Ω 转动, 在转动角坐标 θ 和时间 t 的二维时空度规中, 转动相对论的基本不变量 ——时空间隔微元为

$$(dS)^2 = \Gamma^2(dt)^2 - (d\theta)^2 \tag{2.1}$$

2. **时空特性**

在二维时空度规下, S 系和 S' 系的坐标变换为

$$\theta' = a_1\theta + a_2 t, \quad t' = a_3\theta + a_4 t \tag{2.2}$$

为使时空间隔微元满足 $(dS)^2 = (dS')^2$, 则

$$\Gamma^2 t^2 - \theta^2 = \Gamma^2(a_3\theta + a_4 t)^2 - (a_1\theta + a_2 t)^2$$

故有

$$a_1^2 - \Gamma^2 a_3^2 = 1,\ a_1 a_2 - \Gamma^2 a_3 a_4 = 0,\ a_2^2 - \Gamma^2 a_4^2 = -\Gamma^2 \tag{2.3}$$

若 t 时刻在 S 系中 $\theta = \Omega t$, 而此时刻在 S' 系中为 t' 时刻 $\theta' = 0$, 代入(2.2)式, 得

$$a_2 = -a_1\Omega \tag{2.4}$$

由(2.3)、(2.4) 解得

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\Omega^2/\Gamma^2}} = a_4, \quad a_2 = \frac{-\Omega}{\sqrt{1-\Omega^2/\Gamma^2}}, \quad a_3 = \frac{-\Omega/\Gamma}{\sqrt{1-\Omega^2/\Gamma^2}}$$

把上式代入(2.2), 得到转动相对论的坐标变换公式

$$\theta' = \frac{\theta - \Omega t}{\sqrt{1-\Omega^2/\Gamma^2}}, \quad t' = \frac{t - \Omega\theta/\Gamma}{\sqrt{1-\Omega^2/\Gamma^2}} \tag{2.5}$$

若用静止于 S 系中的量角装置测得的事件 A 和事件 B 的角距离 $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$, 那么在 S' 系中测量此二事件的角距离则为

$$\Delta\theta' = \frac{\Delta\theta}{\sqrt{1-\Omega^2/\Gamma^2}} \tag{2.6}$$

即角距离在转动方向上因高速转动而收缩•

若用静止于 S 系中校准的同步时钟测量事件 A 和事件 B 发生的时间间隔为 $\Delta t = t_1 - t_2$, 那么在 S' 系中测得此二事件的时间间隔为

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\Omega^2/\Gamma^2} \tag{2.7}$$

即二事件的时间间隔因高速转动而延长•

如果物体绕 Oz 轴转动, 在 S 系中测得角速度为 ω, 在 S' 系中则为

$$\omega' = \frac{d\theta'}{dt'} = \frac{d\theta - \Omega dt}{dt - \Omega d\theta/\Gamma} = \frac{\omega - \Omega}{1 - \Omega\omega/\Gamma} \tag{2.8}$$

这便是转动相对论的角速度变换式• 其逆变换为

$$\omega = \frac{\omega' + \Omega}{1 + \Omega\omega'/\Gamma} \tag{2.9}$$

在此变换下, 转动角速度的迭加结果不会超过 Γ• 例如, 一粒子高速转动的上限为 Γ, 某时刻相对于 S' 系的角速度 $\omega' = 0.9\Gamma$, S' 系相对于 S 系的角速度 $\Omega = 0.9\Gamma$, 则粒子在 S 系中的角速度

$$\omega = \frac{1.8\Gamma}{1 + 0.81\Gamma^2/\Gamma^2} = 0.9945\Gamma$$

3. **转动相对论动力学**

在转动相对论力学中, 物体的转动惯量、角动量和能量都需要重新定义, 这种定义在 $\Omega \ll$

Γ 时自然回到经典力学情形•

转动相对论中物体的转动惯量和角动量分别定义为

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{1 - \Omega^2/\Gamma^2}} \tag{2.10}$$

$$J = I\Omega = \frac{I_0\Omega}{\sqrt{1 - \Omega^2/\Gamma^2}} \tag{2.11}$$

转动相对论的动力学基本方程为

$$\frac{d}{dt}(I\Omega) = \frac{d}{dt}\left(\frac{I_0\Omega}{\sqrt{1 - \Omega^2/\Gamma^2}}\right) = M \tag{2.12}$$

I_0 为经典(静止)转动惯量, M 为物体受到的转动力矩•

若物体在力矩 M 的作用下, 从静止而获得角速度 Ω, 由(2.12)易得转动相对论中物体的动能

$$T_r = \frac{I_0}{\sqrt{1 - \Omega^2/\Gamma^2}}\Gamma^2 - I_0\Gamma^2 = E - E_0 \tag{2.13}$$

其中

$$E = I\Gamma^2 = \frac{I_0}{\sqrt{1 - \Omega^2/\Gamma^2}}\Gamma^2 \tag{2.14}$$

$$E_0 = I_0\Gamma^2 \tag{2.15}$$

分别为转动相对论系统的能量和静能量•

从(2.11)、(2.14)和(2.15)式, 易得角动量与能量的关系

$$E^2 = E_0^2 + J^2\Gamma^2 \tag{2.16}$$

§3. 转动系统的相对论性分析力学的变分原理

1. 转动系统的相对论性 Hamilton 原理

研究 n 个物体构成的力学系统, 在 t 时刻第 i 个物体受到的外力对 Oz 轴之矩 M_i, 经典转动惯量 I_{0i}, 相对于 S 系角坐标 θ_i, 极限角速度 Γ_i, 在理想约束条件下, 转动系统相对论性基本形式的 D′Alembert 原理可写为

$$\sum_{i=1}^{n}\left[-M_i + \frac{d}{dt}(I_i\dot{\theta}_i)\right]\delta\theta_i = 0, \quad I_i = \frac{I_{oi}}{\sqrt{1 - \Omega^2/\Gamma_i^2}} \tag{3.1}$$

设系统的位形由广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ 确定, 第 i 个质点的角坐标 $\theta_i = \theta_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t)$ •在 s 维位形空间中沿着 t_1, t_2 对应的位形点之间的某一位轨道积分, 由(3.1)可得

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left[-M_i + \frac{d}{dt}(I_i\dot{\theta}_i)\right]\delta\theta_i dt = 0 \tag{3.2}$$

在等时变分条件下 $\delta t = 0$, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(I_i\dot{\theta}_i)\cdot\delta\theta_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}I_i\dot{\theta}_i\cdot\delta\theta_i\right) - \sum_{i=1}^{n}(I_i\dot{\theta}_i)\cdot\delta\dot{\theta}_i$$

动相 $$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}I_i\dot{\theta}_i\cdot\delta\theta_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{I_{oi}\Gamma_i^2}{\sqrt{1 - \dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}}\delta\left(\frac{\dot{\theta}_i^2}{\Gamma_i^2}\right)\right.$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\dot{\theta}_i\cdot\delta\theta_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{I_{oi}\Gamma_i^2}{\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}}\delta\left(1-\frac{\dot{\theta}_i^2}{\Gamma_i^2}\right)\right.$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\dot{\theta}_i\cdot\delta\theta_i - \delta\left[\sum_{i=1}^{n} I_{oi}\Gamma_i^2\left(1-\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}\right)\right]\right.$$

把上式代入(3.2),得

$$\sum_{i=1}^{n} I_i\dot{\theta}_i^2\cdot\delta\theta_i\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t}\delta\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} I_{oi}\Gamma_i^2\left(1-\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}\right)\right]+\sum_{i=1}^{n} M_i\,\delta\theta_i\right\}dt = 0$$

位轨道二端点给定 $\delta\theta_i|_{t_1}=0,\ \delta\theta_i|_{t_2}=0$,取

$$T_r^* = \sum_{i=1}^{n} I_{oi}\Gamma_i^2\left(1-\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}\right) \tag{3.3}$$

得到转动系统的相对论性 Hamilton 原理

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta T_r^* + \sum_{i=1}^{n} M_i\,\delta\theta_i\right)dt = 0 \tag{3.4}$$

T_r^* 是我们构造的新型动力学函数,为转动系统的相对论性广义动能•

把关系式 $\delta\theta_i = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\theta_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha$ 代入(3.4),令 $G_\alpha = \sum_{i=1}^{n} M_i\frac{\partial\theta_i}{\partial q_\alpha}$ 为第 α 个广义坐标对应的广义力,则(3.4) 式写为广义坐标形式

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta T_r^* + \sum_{\alpha=1}^{s} G_\alpha\delta q_\alpha\right)dt = 0 \tag{3.5}$$

如果系统只受保守力作用,系统的势能为 V,则 $\sum_{i=1}^{n} M_i\,\delta\theta_i = \sum_{\alpha=1}^{s} G_\alpha\delta q_\alpha = -\delta V$,则由(3.4)或(3.5) 得

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T_r^* - V)\,dt = \delta\int_{t_1}^{t_2} L_r\,dt = 0 \tag{3.6}$$

其中,$L_r = T_r^* - V$ 是我们构造的转动系统的相对论性 Lagrange 函数•

2. 转动系统相对论性 D′Alembert 原理的 Lagrange 形式

把关系式 $\delta\theta_i = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\theta_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha$ 代入(3.1),得

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left[-\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\dot{\theta}_i\right)\frac{\partial\theta_i}{\partial q_\alpha} + G_\alpha\right]\delta q_\alpha = 0 \tag{3.7}$$

容易证明

$$\frac{\partial\ddot{\theta}_i}{\partial\ddot{q}_\alpha} = \frac{\partial\dot{\theta}_i}{\partial\dot{q}_\alpha} = \frac{\partial\theta_i}{\partial q_\alpha},\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\theta_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial\dot{\theta}_i}{\partial q_\alpha} \tag{3.8}$$

利用(3.8)式,(3.7) 可写为

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\dot{\theta}_i\cdot\frac{\partial\dot{\theta}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}\right) + \sum_{i=1}^{n} I_i\dot{\theta}_i\cdot\frac{\partial\dot{\theta}_i}{\partial q_\alpha} + G_\alpha\right]\delta q_\alpha = 0 \tag{3.9}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{n} I_i\dot{\theta}_i\cdot\frac{\partial\dot{\theta}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^{n}\frac{I_{oi}\Gamma_i^2\cdot\dot{\theta}_i/\Gamma_i^2}{\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}}\cdot\frac{\partial\dot{\theta}_i}{\partial q_\alpha}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left[\sum_{i=1}^{n} I_{oi}\Gamma_i^2\left(1-\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}\right)\right] = \frac{\partial T_r^*}{\partial q_\alpha} \tag{3.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} I_i\dot{\theta}_i \cdot \frac{\partial \dot{\theta}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial T_r^*}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{3.11}$$

由(3.9)得到转动系统相对论性 D′Alembert 原理的 Lagrange 形式

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left[-\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r^*}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial T_r^*}{\partial q_\alpha} + G_\alpha\right]\delta q_\alpha = 0 \tag{3.12}$$

3. 转动系统相对论性 D′Alembert 原理的 Nielsen 形式

容易证明

$$\frac{\partial \ddot{\theta}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2\frac{\partial \dot{\theta}_i}{\partial q_\alpha} \tag{3.13}$$

又

$$\dot{T}_r^* = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} I_{oi}\Gamma_i^2\left(1-\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} I_i\dot{\theta}_i \cdot \ddot{\theta}_i \tag{3.14}$$

注意到(3.8)、(3.13)和(3.14),(3.7)式中

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(I_i\dot{\theta}_i)\cdot\frac{\partial\theta_i}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^{n}(\dot{I}_i\dot{\theta}_i + I_i\ddot{\theta}_i)\cdot\frac{\partial\theta_i}{\partial q_\alpha}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{I_i}{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}\cdot\frac{\dot{\theta}_i\cdot\ddot{\theta}_i}{\Gamma_i^2}\dot{\theta}_i\cdot\frac{\partial\ddot{\theta}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} + \sum_{i=1}^{n} I_i\dot{\theta}_i\cdot\frac{\partial\ddot{\theta}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\dot{\theta}_i\cdot\ddot{\theta}_i\right) - \sum_{i=1}^{n} I_i\ddot{\theta}_i\cdot\frac{\partial\dot{\theta}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\dot{\theta}_i\cdot\ddot{\theta}_i\right) - 2\sum_{i=1}^{n} I_i\dot{\theta}_i\cdot\frac{\partial\dot{\theta}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \dot{T}_r^*}{\partial \dot{q}_\alpha} - 2\frac{\partial T_r^*}{\partial q_\alpha}$$

代入(3.7),得到转动系统相对论性 D′Alembert 原理的 Nielsen 形式

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(-\frac{\partial \dot{T}_r^*}{\partial \dot{q}_\alpha} + 2\frac{\partial T_r^*}{\partial q_\alpha} + G_\alpha\right)\delta q_\alpha = 0 \tag{3.15}$$

4. 转动系统相对论性 D′Alembert 原理的 Appell 形式

利用(3.8)式,(3.7)式中

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(I_i\dot{\theta}_i)\cdot\frac{\partial\theta_i}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^{n}(\dot{I}_i\dot{\theta}_i + I_i\ddot{\theta}_i)\cdot\frac{\partial\ddot{\theta}_i}{\partial \ddot{q}_\alpha}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[I_{oi}(1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2)^{-3/2}\frac{\dot{\theta}_i\cdot\ddot{\theta}_i}{\Gamma_i^2}\dot{\theta}_i\cdot\frac{\partial\ddot{\theta}_i}{\partial \ddot{q}_\alpha} + I_{oi}(1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2)^{-1/2}\ddot{\theta}_i\cdot\frac{\partial\ddot{\theta}_i}{\partial \ddot{q}_\alpha}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_\alpha}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_{oi}(1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2)^{-3/2}\frac{(\dot{\theta}_i\cdot\ddot{\theta}_i)^2}{\Gamma_i^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_{oi}(1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2)^{-1/2}\ddot{\theta}_i^2\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_\alpha}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i\left[\frac{(\dot{\theta}_i\cdot\ddot{\theta}_i)^2}{\Gamma_i^2-\dot{\theta}_i^2} + \ddot{\theta}_i^2\right]\right\} = \frac{\partial S_r^*}{\partial \ddot{q}_\alpha}$$

代入(3.7)式,得到转动系统相对论性 D′Alembert 原理的 Appell 形式

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(-\frac{\partial S_r^*}{\partial \ddot{q}_\alpha} + G_\alpha\right)\delta q_\alpha = 0,\quad S_r^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i\left[\frac{(\dot{\theta}_i\cdot\ddot{\theta}_i)^2}{\Gamma_i^2-\dot{\theta}_i^2} + \ddot{\theta}_i^2\right] \tag{3.16}$$

S_r^* 是我们构造的又一新型动力学函数,称为转动系统相对论性广义加速度能,也即转动系统

相对论性的 Gibbs 函数•

转动系统的相对论性变分原理(3. 1)、(3. 5)、(3. 12)、(3. 15) 和(3. 16) 都是在位形空间中建立的, 在速度空间或加速度空间中, 上述微分变分原理(3. 1)、(3. 12)、(3. 15) 和(3. 16) 可分别写为 Jourdain 原理形式或 Gauss 原理形式•

§4. 转动系统的相对论性分析力学方程

1. 完整约束条件下转动系统的相对论性动力学方程

对于只受 k 个完整约束的力学系统, 选取 $s=3n-k$ 个广义坐标后, 各 $\delta q_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,s)$ 彼此独立, 由(3. 12)、(3. 15)、(3. 16) 分别得到转动系统的相对论性 Lagrange 方程、Nielsen 方程和 Appell 方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r^*}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T_r^*}{\partial q_\alpha}=G_\alpha \qquad (\alpha=1,2,\cdots,s) \tag{4. 1}$$

$$\frac{\partial \dot{T}_r^*}{\partial \dot{q}_\alpha}-2\frac{\partial T_r^*}{\partial q_\alpha}=G_\alpha \qquad (\alpha=1,2,\cdots,s) \tag{4. 2}$$

$$\frac{\partial S_r^*}{\partial \ddot{q}_\alpha}=G_\alpha \qquad (\alpha=1,2,\cdots,s) \tag{4. 3}$$

对于保守系, (4. 1) 式可写为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L_r}{\partial q_\alpha}=0, \quad L_r=T_r^*-V \qquad (\alpha=1,\cdots,s) \tag{4. 4}$$

构造转动系统相对论性的 Hamilton 函数

$$H_r=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-L_r=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-T_r^*+V \tag{4. 5}$$

用推导正则方程的通常方法, 由(4. 4) 可得转动系统相对论性 Hamilton 正则方程

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H_r}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H_r}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha=1,2,\cdots,s) \tag{4. 6}$$

注意到

$$p_\alpha=\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_\alpha}=\frac{\partial T_r^*}{\partial \dot{q}_\alpha}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\Big[\sum_{i=1}^{n}I_{oi}\Gamma_i^2\Big(1-\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}I_{oi}\Gamma_i^2\frac{\dot{\theta}_i/\Gamma_i^2}{\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}}\frac{\partial\dot{\theta}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}=\sum_{i=1}^{n}I_i\dot{\theta}_i\cdot\frac{\partial\dot{\theta}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

则有

$$H_r=\sum_{i=1}^{n}I_i\dot{\theta}_i\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\dot{\theta}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-T_r^*+V$$

在稳定约束条件下, 有

$$\dot{\theta}_i=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial \theta_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\dot{\theta}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha$$

故

$$H_r=\sum_{i=1}^{n}I_i\dot{\theta}_i^2-T_r^*+V=T_r+V \tag{4. 7}$$

其中

$$T_r = \sum_{i=1}^{n} I_i \dot{\theta}_i^2 - T_r^* = \sum_{i=1}^{n} I_{oi} \Gamma_i^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\theta}_i^2 / \Gamma_i^2}} - 1 \right) \qquad (4.8)$$

为转动系统的相对论性动能与广义动能 T_r^* 之间的关系• 由(4.7)、(4.8)可见, 转动系统的相对论性 Hamilton 函数等于其总机械能, 但这时转动惯量非常数、且 T_r 也不是广义速度的二次齐次函数•

2. 非完整约束条件下转动系统的相对论性 Routh 方程

若系统除受 k 个完整约束外, 还受有 r 个一阶非线性非完整约束

$$f_\rho(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \cdots, r;\ \alpha = 1, 2, \cdots, s) \qquad (4.9)$$

设约束条件满足 ¶Ä±Þ 定义

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \cdots, r) \qquad (4.10)$$

引入 Lagrange 乘子 λ_ρ, 将(4.10)乘以 λ_ρ 并对 ρ 求和, 再分别与(3.12)、(3.15)、(3.16)式相加, 得

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial T_r^*}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial T_r^*}{\partial q_\alpha} + G_\alpha + \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0 \qquad (4.11)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \left(-\frac{\partial \dot{T}_r^*}{\partial \dot{q}_\alpha} + 2 \frac{\partial T_r^*}{\partial q_\alpha} + G_\alpha + \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0 \qquad (4.12)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \left(-\frac{\partial S_r^*}{\partial \ddot{q}_\alpha} + G_\alpha + \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0 \qquad (4.13)$$

适当选取 λ_ρ 的值, 使得(4.11)~(4.13)中不独立的变分 $\delta q_{\varepsilon+\rho}$($\rho = 1, 2, \cdots, r;\ \varepsilon = s - r$)前的括号中的表达式为零, 则余下的独立变分 δq_σ($\sigma = 1, 2, \cdots, \varepsilon$)前的括号中的表达式也为零, 从而可分别得到转动系统相对论性 Lagrange 形式、Nielsen 形式和 Appell 形式的 Routh 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_r^*}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T_r^*}{\partial q_\alpha} = G_\alpha + \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, s) \qquad (4.14)$$

$$\frac{\partial \dot{T}_r^*}{\partial \dot{q}_\alpha} - 2 \frac{\partial T_r^*}{\partial q_\alpha} = G_\alpha + \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, s) \qquad (4.15)$$

$$\frac{\partial S_r^*}{\partial \ddot{q}_\alpha} = G_\alpha + \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, s) \cdot \qquad (4.16)$$

3. 非完整约束条件下转动系统的相对论性 ±Á½Í´º¿ 方程、Nielsen 方程和 Appell 方程

系统的运动受到(4.9)的限制, s 个 $\dot{q}_\alpha$ 中只有 $\varepsilon = s - r$ 个是独立的, 取 ε 个准速度 $\dot{\pi}_\sigma$ 作为独立变量, 且

$$\dot{\pi}_\sigma = \dot{\pi}_\sigma(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, \varepsilon;\ \alpha = 1, 2, \cdots, s) \qquad (4.17)$$

与 $\dot{\pi}_\sigma$ 对应的坐标 π_σ 称为准坐标• 从(4.17)式可反解出

$$\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(q_\alpha, \dot{\pi}_\sigma, t) \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, s;\ \sigma = 1, 2, \cdots, \varepsilon) \qquad (4.18)$$

利用上式消去 T_r^* 中的 $\dot{q}_\alpha$, 得到用 $\dot{\pi}_\sigma$ 表示的转动系统的相对论性简化广义动能

$$T_r^*(q_\alpha, \dot{\pi}_\sigma, t) = T_r^*(q_\alpha, \dot{q}_\alpha(q_\beta, \dot{\pi}_\sigma, t), t)$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, s;\ \sigma = 1, 2, \cdots, \varepsilon) \qquad (4.19)$$

利用(4.18)式还可以消去 S_r^* 中的 $\dot{q}_\alpha$, $\ddot{q}_\alpha$, 得到用 $\dot{\pi}_\sigma$, $\ddot{\pi}_\sigma$ 表示的转动系统的相对论性简化广义加速度能

$$S_r^*(q_\alpha, \dot{\pi}_\sigma, \ddot{\pi}_\sigma, t) = S_r^*\left[q_\alpha, \dot{q}_\alpha(q_\beta, \dot{\pi}_\sigma, t), \ddot{q}_\alpha(q_\beta, \dot{\pi}_\sigma, \ddot{\pi}_\sigma, t), t\right]$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, s;\ \sigma = 1, 2, \cdots \varepsilon) \tag{4.20}$$

从转动系统相对论性变分原理(3.12)、(3.15)、(3.16)出发, 结合(4.19)、(4.20)式, 利用推导非完整系统的 ±Ã½Í´º¿ 方程、Nielsen 方程和 Appell 方程的通常方法[12]• 我们可以建立一阶非线性非完整约束条件下转动系统的相对论性 ±Ã½Í´º¿ 方程、Nielsen 方程和 Appell 方程•

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r^*}{\partial \dot{\pi}_\sigma} - \frac{\partial T_r^*}{\partial \pi_\sigma} - \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T_r^*}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{\pi}} - \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \pi_\sigma}\right) = P_\sigma^* \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial \dot{T}_r^*}{\partial \dot{\pi}_\sigma} - 2\frac{\partial T_r^*}{\partial \pi_\sigma} - \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T_r^*}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\frac{\partial \ddot{q}_\alpha}{\partial \dot{\pi}_\sigma} - \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \pi_\sigma}\right) = P_\sigma^* \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial S_r^*}{\partial \ddot{\pi}_\sigma} = P_\sigma^* \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, \varepsilon) \tag{4.23}$$

其中, $P_\sigma^* = \sum_{\alpha=1}^{s} G_\alpha \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{\pi}_\sigma}$ 为准坐标 π_σ 对应的广义力•

若取独立的广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 作为 $\dot{\pi}_\sigma$, 则(4.21)~(4.23)化为广义坐标形式• 对于只受线性非完整约束的力学系统或保守系统, 方程(4.21)~(4.23)均适用, 可以蜕化为相应的表达形式, 这里不再逐一列出• 对于完整系, 方程(4.21)~(4.23)蜕化为方程(4.1)~(4.3)•

§5. 转动系统的相对论性 Noether 守恒律

在速度空间中, 引入 Jourdain 变分 δ_1, Δ_1, 转动系统的相对论性 Jourdain 原理可以写为

$$\sum_{i=1}^{n}\left[-M_i + \frac{d}{dt}(I_i\dot{\theta}_i)\right]\delta_1\dot{\theta}_i = 0, \qquad \delta_1 t = 0,$$

$$\delta_1\theta = 0, \qquad \delta_1\dot{\theta} \neq 0, \qquad I_i = \frac{I_{oi}}{\sqrt{1 - \dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}} \tag{5.1}$$

或

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r^*}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial T_r^*}{\partial q_\alpha} + G_\alpha\right)\delta_1\dot{q}_\alpha = 0 \tag{5.1$'$}$$

把 G_α 分为有势和非势的两部分, 则(5.1)′写为

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial L_r}{\partial q_\alpha} + G_\alpha'\right)\delta_1\dot{q}_\alpha = 0, \quad L_r = T_r^* - V \tag{5.2}$$

其中, G_α' 为非势广义力• 利用速度空间中虚位移的牛青萍定义[13]

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta_1\dot{q}_\alpha = 0 \tag{5.3}$$

引入 Lagrange 乘子 λ_ρ, (5.2)可写为

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial L_r}{\partial q_\alpha} + G_\alpha' + \sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta_1\dot{q}_\alpha = 0 \tag{5.4}$$

对于非等时变分关系[14]

$$\Delta_1 \dot{q} = \delta_1 \dot{q},\ (\Delta_1 q)^{\bullet} = \delta_1 \dot{q} - \dot{q}\,(\Delta_1 t)^{\bullet},\ \Delta_1 \dot{q} = (\Delta_1 q)^{\bullet} - \dot{q}\,(\Delta t) \tag{5.5}$$

引进无穷小变换的空间和时间生成函数

$$\left.\begin{aligned} (\Delta_1 q_\alpha)^{\bullet} &= \varepsilon H^{\alpha}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \\ (\Delta_1 t)^{\bullet} &= \varepsilon h(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, s) \end{aligned}\right\} \quad 1 \tag{5.6}$$

可以得到

$$\delta_1 \dot{q}_\alpha = \varepsilon (H^{\alpha} - \dot{q}_\alpha h) \tag{5.7}$$

其中, ε 为无穷小量• 由(5. 4)、(5. 7)知, 生成函数必须满足

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_\alpha}(H^{\alpha} - \dot{q}_\alpha h) = 0 \tag{5.8}$$

把(5. 8)代入(5. 4), 加上并减去一个规范函数 P, 整理得

$$\varepsilon\left\{\sum_{\alpha=1}^{s}\left[G_\alpha'(H^{\alpha} - \dot{q}_\alpha h) + \frac{\partial L_r}{\partial q_\alpha}H^{\alpha} + \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{H}^{\alpha}\right] + \left(L_r - \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)\dot{h} + \frac{\partial L_r}{\partial t}h - \dot{P}\right\}$$

$$\pi\,\frac{d}{dt}\left[\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_\alpha}H^{\alpha} + \left(L_r - \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)h - P\right\} = 0 \tag{5.9}$$

由(5. 8)、(5. 9), 我们得到转动系统相对论性的 Noether **定理**:

只要无穷小变换下的空间和时间生成函数 H^{α}, h 及规范函数 P 满足

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_\alpha}(H^{\alpha} - \dot{q}_\alpha h) = 0 \tag{5.10}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left[G_\alpha'(H^{\alpha} - \dot{q}_\alpha h) + \frac{\partial L_r}{\partial q_\alpha}H^{\alpha} + \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{H}^{\alpha} + \left(L_r - \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)\dot{h} + \frac{\partial L_r}{\partial t}h - \dot{P}\right] = 0 \tag{5.11}$$

则一阶非线性非完整约束条件下的转动系统存在相对论性广义守恒量

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_\alpha}H^{\alpha} + \left(L_r - \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)h - P = \text{const} \tag{5.12}$$

若取 $H^{\alpha} = 0$, $h = 1$, $P = 0$, 则(5. 10)、(5. 11)化为

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha = 0, \qquad \frac{\partial L_r}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s}G_\alpha'\dot{q}_\alpha = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \cdots, r) \tag{5.13}$$

守恒方程(5. 12)化为

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L_r = \text{const} \tag{5.14}$$

显然, 若有

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha = kf_\rho, \qquad \sum_{\alpha=1}^{s}G_\alpha'\dot{q}_\alpha = 0, \qquad \frac{\partial L_r}{\partial t} = 0 \tag{5.15}$$

则存在守恒量(5. 14), 这便是转动系统的相对论性广义能量积分•

若取 $H^{1} = 1$, $H^{\alpha} = 0$ $(\alpha \neq 1)$, $h = 0$, $P = 0$, 则(5. 10)、(5. 11)化为

$$\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_1} = 0, \qquad \frac{\partial L_r}{\partial q_1} = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \cdots, r) \tag{5.16}$$

守恒方程(5. 12)成为

$$\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_1} = \text{const} \tag{5.17}$$

这便是对应于循环坐标 q_1 的转动系统的相对论性广义循环积分, 也即转动系统的相对论性广义动量守恒量•

§6. 讨　论

关于转动系统相对论性分析力学的变分原理, 我们主要在位形空间中给出了(3.1)、(3.5)、(3.12)、(3.15)和(3.16)式, 其微分变分原理为 D′Alembert 原理形式• 在速度空间、加速度空间和 m 阶速度空间中, 我们还可以给出各种形式的转动系统相对论性的 Jourbain 原理、Gauss 原理和万有 D′Alembert 原理•

在非完整约束条件下, 我们给出了转动系统相对论性的 Routh 方程、 ±Á½Í´º¿ 方程、Nielsen 方程和 Appell 方程• 我们还可以进一步的建立转动系统相对论性的 Mac_Millan 方程、Volterra 方程、Boltzmann_Hamel 方程、 ¶¿À³ 方程、Micevic D son_Rouor Lazav 方程、Vacco 动力学方程以及 Kane 方程•

关于转动系统相对论性动力学方程的积分方法, 本文仅给出其 Noether 守恒律• 我们还可以把经典非完整动力学方程的各种积分方法[12, 15, 16], 如第一积分、Routh 降阶法、Whittaker 降阶法、利用第一积分构造积分不变量、Poincar _Cartan 积分不变量、Lagrange 力学逆问题、时间积分定理、Hamilton_Jacboi 方法、单分量法、梯度法、场方法等, 全部推广应用于积分转动系统的相对论性动力学方程•

在 $\dot{\theta}_i \ll \Gamma_i$ 的经典近似下, 转动惯量

$$I_i = \frac{I_{oi}}{\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}} \simeq I_{oi}$$

取 $\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}$ 关于 $\dot{\theta}_i/\Gamma_i$ 幂级数展开式的前两项, 转动系统的相对论性广义动能函数

$$T_r^* \simeq \sum_{i=1}^{n} I_{oi}\Gamma_i^2 - \sum_{i=1}^{n} I_{oi}\Gamma_i^2\left(1-\frac{\dot{\theta}_i^2}{2\Gamma_i^2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_{oi}\dot{\theta}_i^2 = T_r$$

化为经典转动系统的动能函数, 转动系统的相对论性广义加速度能函数

$$S_r^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i\left[\frac{(\dot{\theta}_i \cdot \ddot{\theta}_i)^2}{\Gamma_i^2-\dot{\theta}_i^2} + \ddot{\theta}_i^2\right] \simeq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_{oi}\ddot{\theta}_i^2 = S_r$$

化为经典转动系统的加速度能函数, 转动系统的相对论性 Lagrange 函数、Hamilton 函数也随之化为经典形式, 本文的理论蜕化为经典转动系统动力学•

参 考 文 献

1　R. Bengtsson and S. Frauendorf, Quasiparticle spectra near the yrast line, Nucler Physics, **A327** (1979), 139—171.

2　M. Carmeli, Field theory on R × S 3topology(Ⅰ ~ Ⅱ), Foundations of Physics, **15**(2) (1985), 175—185.

3　M. Carmeli, The dynamics of rapidly rotating bodies, Foundations of Physics, **15**(8) (1985), 889—903.

4　M. Carmeli, Field theory on R × S 3topology(Ⅲ), Foundations of Physics, **15**(10) (1985), 1019—1029.

5 M. Carmeli, Rotational relativity theory, International Journal of Theoretical Physics, **25**(1)(1986), 89—94.
6 罗绍凯, 相对论性分析力学理论, 教材通讯, (5)(1987), 31—34.
7 罗绍凯, 广义事件空间中的相对论性 Hamilton 原理和 Lagrange 方程, 大学物理, **11**(10) (1992), 14—16.
8 罗绍凯, 相对论非线性非完整系统动力学理论, 上海力学, **12**(1) (1991), 67—70.
9 Luo Shaokai, Relativistic Variational principles and equations of motion of high_order nonlinear nonholonomic system, Proc. ICDVC, Peking University Press (1990), 645—652.
10 罗绍凯, 变质量任意阶非线性非完整系统的相对论性广义 Volterra 方程, 数学物理学报, **12**(增刊)(1992), 27—29.
11 罗绍凯, 变质量可控力学系统的相对论性变分原理与运动方程, 应用数学和力学, **17**(7) (1996), 645—654.
12 梅凤翔,《非完整系统力学基础》, 北京工业学院出版社 (1985), 81—311, 316—357.
13 牛青萍, 经典力学基本微分原理与不完整力学组的运动方程, 力学学报, **7**(2) (1964), 139—148.
14 罗绍凯, 非完整非有势系统相对于非惯性系的广义 Noether 定理, 应用数学和力学, **12**(9), (1991), 863—872.
15 梅凤翔,《非完整动力学研究》, 北京工业学院出版社 (1987), 181—275.
16 梅凤翔,《高等分析力学》, 北京理工大学出版社 (1991), 392—529.

The Theory of Relativistic Analytical Mechanics of the Rotational Systems

Luo Shaokai
(Shangqiu Teachers College, Shangqiu Henan 476000, P. R. China)

Abstract

The theory of rotational relativistic mechanics is discussed and the theory of relativistic analytical mechanics of the rotational systems is constructed. The relativistic generalized kinetic energy function for the rotational systems $T_r^* = \sum_{i=1}^{n} I_{oi}\Gamma_i^2\left(1-\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}\right)$ and the generalized acceleration energy function $S_r^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i\left[\frac{(\dot{\theta}_i\cdot\ddot{\theta}_i)^2}{\Gamma_i^2-\dot{\theta}_i^2}+\ddot{\theta}_i^2\right]$ are constructed and further, the Hamilton principle and three kinds of D′Alembert principles are given. For the systems with holonomic constraints, the relativistic Lagrange equation, Nielsen equation, Appell equation and Hamilton canonical equation of the rotational systems are constructed; For the systems with nonholonomic constraints, the relativistic Routh equation, Chaplygin equation, Nielsen equation and Appell equation of the rotational systems are constructed; and the relativistic Noether conservation law of the rotational systems are given too.

Key words rotational systems, relativity, analytical mechanics, nonholonomic constraints, variation principle, equation of motion, conservation law