

# 用精确线性化控制 Lorenz 混沌\*

陈立群<sup>①</sup> 刘延柱<sup>①</sup>

(刘曾荣推荐, 1996 年 5 月 13 日收到, 1997 年 5 月 21 日收到修改稿)

## 摘 要

本文采用状态空间精确线性化方法研究 Rayleigh 数可控的 Lorenz 系统中混沌的控制问题。在证明系统可以精确线性化的基础上, 借助非线性反馈构造出变换关系使原系统转化为线性可控系统而实现控制, 并给出了控制算例。

关键词 Rayleigh 数 Lorenz 系统 混沌

## § 1. 引 言

近年来控制混沌问题引起物理、力学和工程界的重视<sup>[1~6]</sup>。大多数控制方案都是由实验或理论物理学家及数学家首先提出而没有采用控制工程中的常用方法。这里以一个典型的呈现混沌性态的动力学系统——Lorenz 系统<sup>[7]</sup>为例, 采用非线性控制系统设计中的状态空间精确线性化方法<sup>[8]</sup>控制混沌。本文首先总结控制 Lorenz 系统中混沌的进展, 其次为方便计概述状态空间精确线性化方法, 然后利用该方法设计控制 Lorenz 混沌的非线性反馈控制律, 最后给出数值算例。

## § 2. Lorenz 系统中的混沌及其控制

Lorenz 系统是数值实验中最早发现的呈现混沌运动的耗散系统<sup>[7]</sup>, 其状态方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= P(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= Rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= bx_1x_2 - bx_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

系统(2.1)的一个简单物理实现是流体在下方加热上方冷却的热对流管中的环流, 此时,  $x_1$  是流体速度,  $x_2$  和  $x_3$  分别为水平和铅垂的温度差,  $P$  与流体的 Prandtl 数成比例,  $b$  是与空间相关的常数,  $R$  与流体的 Rayleigh 数成比例。系统(2.1)的混沌行为已有系统研究<sup>[9]</sup>, 随着控制混沌问题引起人们注意, 控制系统(2.1)中的混沌也有一系列工作。

就控制机制而言, 最简单的是开环的输送控制, 可以根据目标动力学行为设计外激励型控

\* 本文工作受国家教委博士点科研基金和冶金工业部应用基础科学研究基金资助

① 上海交通大学工程力学系, 上海 200030

制  $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$  使得

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= P(x_2 - x_1) + u_1(t) \\ \dot{x}_2 &= Rx_1 - x_2 - x_1x_3 + u_2(t) \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3 + u_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

的动力学行为渐近于目标行为<sup>[10-12]</sup>。控制也可设计成为参数激励的形式<sup>[13]</sup>而成为参数输送控制

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= (P + u_1(t))(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= (R + u_2(t))x_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - (b + u_3(t))x_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

(参数) 输送控制对于控制目标及初值都有严格的限制。在受控系统(2.2)中控制  $u_i(t)$  ( $i=1, 2, 3$ ) 加上闭环部分便得到应用于 Lorenz 系统的开闭环控制<sup>[14]</sup>, 类似地参数开闭环控制<sup>[15]</sup> 可以应用于受控系统(2.3)。

反馈的引入提高控制效果, 也可减少相应的控制参数, 研究较多的情形是

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= P(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= Rx_1 - x_2 - x_1x_3 + u(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

分别采用线性反馈控制和有界棒—棒控制<sup>[16]</sup>、常规线性反馈控制<sup>[17]</sup>、基于反馈线性化的非线性控制<sup>[18]</sup>和全局镇定的非线性反馈控制<sup>[19]</sup>等方案。

从物理实现看, Rayleigh 数较为容易控制。例如, 可以由加于环流管底端的热量来调节。故受控系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= P(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= (R + u(x_1, x_2, x_3))x_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

比系统(2.4)更容易实现。系统(2.5)可以用参数变更结合控制持续<sup>[20]</sup>控制, 也可用相应 Poincaré 映射的迭代序列和内插技巧<sup>[21]</sup>控制。然而从控制工程角度看, 系统(2.5)研究很少, 仅有用基于线性化系统传递函数的比例控制及比例积分控制<sup>[22]</sup>。这里我们将设计非线性反馈控制律控制系统(2.5)。

控制 Lorenz 系统中混沌还有其它工作。例如, 可以用基于 Kalman 滤波状态估计的随机最优控制<sup>[23]</sup>, 还可以用基于一类 3 层前馈神经网络的最优控制<sup>[24]</sup>。

### § 3. 状态空间精确线性化

考虑单输入非线性控制系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.1)$$

其中,  $x \in R^n$  和  $u \in R^1$  分别是状态变量和控制参数,  $f: R^n \rightarrow R^n$  和  $g: R^n \rightarrow R^n$  均足够光滑, 则  $f$  和  $g$  为  $R^n$  中的光滑向量场。记

$$ad_f^k g(x) = [f, ad_d^{k-1} g(x)] \quad (k \geq 1), \quad ad_f^0 g(x) = g(x) \in \quad (3.2)$$

其中,  $[X, Y]$  表示向量场  $X$  和  $Y$  的 Lie 括号。可以证明<sup>[8]</sup> 当且仅当条件:

1. 矩阵

$$C = [g(x_0), \text{ad}_f g(x_0), \text{ad}_f^2 g(x_0), \dots, \text{ad}_f^{n-2} g(x_0), \text{ad}_f^{n-1} g(x_0)] \quad (3.3)$$

有秩  $n$ , 和

2. 在  $x_0$  附近分布

$$D = \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-2} g\} \quad (3.4)$$

对合, 成立时, 存在定义于  $x_0$  邻域  $U(x_0)$  的实值函数  $\lambda(x)$  满足

$$L_g \lambda(x) = L_{\text{ad}_f g} \lambda(x) = \dots = L_{\text{ad}_f^{n-2} g} \lambda(x) = 0 \quad (x \in U(x_0)) \quad (3.5)$$

且

$$L_{\text{ad}_f^{n-1} g} \lambda(x_0) \neq 0 \quad (3.6)$$

其中,  $L_X \lambda$  为实值函数  $\lambda$  对向量场  $X$  的 Lie 导数. 进而在  $U(x_0)$  中存在变换

$$\begin{aligned} z &= [z_1, z_2, \dots, z_n]^T = \Phi(x) = [\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)]^T \\ &= [\lambda(x), L_f \lambda(x), \dots, L_f^{n-1} \lambda(x)]^T \end{aligned} \quad (3.7)$$

及

$$v = b(x) + a(x)u \quad (3.8)$$

其中

$$a(x) = L_g L_f^{n-1} \lambda(x), \quad b(x) = L_f^n \lambda(x) \quad (3.9)$$

使得系统(3.1)在变换(3.7)和(3.8)下化为线性可控系统

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_{n-1} = z_n, \quad \dot{z}_n = v \quad (3.10)$$

## § 4. Rayleigh 数可控 Lorenz 系统的非线性反馈控制

现研究 Rayleigh 数可控的 Lorenz 系统(2.5), 将(2.5)与(3.1)式比较知  $n=3$  且

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} -Px_1 - Px_2 \\ -x_1x_3 + Rx_1 - x_2 \\ x_1x_2 - bx_3 \end{bmatrix}, \quad g(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

制律 还可

我们先证明当  $x_1 \neq 0$  且  $P(2P-b) \neq 0$  时, 系统(2.5)可化为线性可控系统(3.10), 为此只须验证条件 1 和 2. 事实上, 由(4.1)和(4.2)式知

$$\begin{aligned} \text{ad}_f g &= \begin{bmatrix} -Px_1 \\ (1-P)x_1 + Px_2 \\ -x_1^2 \end{bmatrix} \\ \text{ad}_f^2 g &= \begin{bmatrix} P(P-1)x_1 - 2P^2x_2 \\ -x_1^3 - 2Px_1x_2 + (2PR + P^2 - 2P + 1)x_1 + P(1-P)x_2 \\ (3P-b-1)x_1^2 - 2Px_1x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \det C &= \begin{vmatrix} 0 & -Px_1 & P(P-1)x_1 - 2P^2x_2 \\ x_1 & (1-P)x_1 + Px_2 & -x_1^3 - 2Px_1x_2 + (2PR + P^2 - 2P + 1)x_1 + P(1-P)x_2 \\ 0 & -x_1^2 & (3P-b-1)x_1^2 - 2Px_1x_2 \end{vmatrix} \\ &= P(2P-b)x_1^4 \end{aligned} \quad (4.3)$$

从而知当  $x_1 \neq 0$  且  $P(2P-b) \neq 0$  时  $\det C \neq 0$ , 故  $C$  的秩为 3. 又由(4.1)和(4.2)式

$$[\text{ad}_f^2 g] = \emptyset \quad (4.4)$$

仍在  $D = \text{span}\{g, \text{ad}_f g\}$  中, 故  $D$  是对合的. 由上节知识知(2.5)式可化成(3.10)式的形式

为构造变换(3.7), 须先求出  $\lambda(x)$ , 由(3.5)式知

$$L_g \lambda(x) = x_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = 0 \quad (4.5)$$

$$L_{ad_f g} \lambda(x) = -Px_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + ((1-P)x_1 + Px_2) \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} - x_1^2 \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} = 0 \quad (4.6)$$

当  $x_1 \neq 0$  时, 由(4.5)式知

$$\partial \lambda / \partial x_2 = 0 \quad (4.7)$$

故  $\lambda$  不显含  $x_2$ . (4.7)式代入(4.6)式并注意到  $x_1 \neq 0$  有

$$P \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} = 0 \quad (4.8)$$

由(4.8)式可解出

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{P} x_1^2 - 2x_3 + \mu \quad (4.9)$$

其中,  $\mu$  是由控制目标确定的待定常数. 注意到

$$\begin{aligned} L_f \lambda(x) &= -2x_1^2 + 2bx_3 \\ L_f^2 \lambda(x) &= 4Px_1^2 + 2(b-2P)x_1x_2 - 2b^2x_3 \end{aligned} \quad (4.10)$$

(4.9)和(4.10)式代入(3.7)式得坐标变换式

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} \Phi_1(x_1, x_2, x_3) \\ \Phi_2(x_1, x_2, x_3) \\ \Phi_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{P}x_1^2 - 2x_3 + \mu \\ -2x_1^2 + 2bx_3 \\ 4P^2x_1^2 + 2(b-2P)x_1x_2 - 2b^2x_3 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

当  $x_1 \neq 0$  且  $P(2P-b) \neq 0$  时从(4.11)式可反解出

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x = \Phi^{-1}(z) = \begin{bmatrix} \Phi_1^{-1}(z_1, z_2, z_3) \\ \Phi_2^{-1}(z_1, z_2, z_3) \\ \Phi_3^{-1}(z_1, z_2, z_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{P}{2b-P}(bz_1 + z_2 - b\mu)} \\ \frac{2bPz_1 + 2(P+1)z_2 + z_3 + 2Pb\mu}{2\sqrt{P(b-2P)}(bz_1 + z_2 - b\mu)} \\ \frac{2Pz_1 + z_2 - 2P\mu}{2(b-2P)} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

(4.10)式代入(3.9)式有

$$\begin{aligned} a(x_1, x_2, x_3) &= L_g L_f^2 \lambda(x) = 2(b-2P)x_1^2 \\ b(x_1, x_2, x_3) &= L_f^3 \lambda(x) = -2(b-2P)x_1^2 x_3 + 2(Rb-2RP-4P^2)x_1^2 \\ &\quad - 2(b-2P)(b+3P+1)x_1x_2 + 2P(b-2P)x_2^2 + 2b^3x_3 \end{aligned} \quad (4.13)$$

故由(3.8)式知

$$\begin{aligned} u &= \frac{v}{2(b-2P)x_1^2} + x_3 - R + \frac{4P^2}{b-2P} + (b+3P+1) \frac{x_2}{x_1} \\ &\quad - P \frac{x_2^2}{x_1} - \frac{b^3 x_3}{(b-2P)x_1^2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

(4.12)和(4.14)式代入(2.5)式便将(2.5)式化为线性可控系统

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = v \quad (4.15)$$

通过控制系统(4.15)到原点, 变更待定常数  $\mu$  便可控制  $x$  到目标值  $x^g$ . 为此引入线性反馈控

制律

$$v = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 \quad (4.16)$$

可任意配置系统(4.15)的极点• 将(4.11)和(4.16)式代入(4.14)式便得到控制系统(2.5)的非线性反馈控制律

$$u = x_3 + \frac{\alpha_1 - 2\alpha_2 P + 4P^2 \alpha_3 - 8P^3}{2P(b - 2P)} - R + (b + 3P + 1 + \alpha_3) \frac{x_2}{x_1} - P \frac{x_2^2}{x_1^2} - \frac{(\alpha_1 - b\alpha_2 + b^2 \alpha_3 + b^3)x_3}{(b - 2P)x_1^2} + \frac{\alpha_1 \mu}{2(b - 2P)x_1^2} \quad (4.17)$$

## § 5. 控制算例

与大多数研究一样, 我们取

$$P = 10, \quad R = 28, \quad b = \frac{8}{3} \quad (5.1)$$

未加控制( $u = 0$ )时, 系统(2.5)有3个不稳定平衡点• 这里不考虑平衡点(0, 0, 0)邻域中的控制, 另两个平衡点为

$$(\pm \sqrt{b(R - 1)}, \pm \sqrt{b(R - 1)}, R - 1) = (\pm 8.485, \pm 8.485, 27) \quad (5.2)$$

$x_1$  的混沌时间历程如图1示•

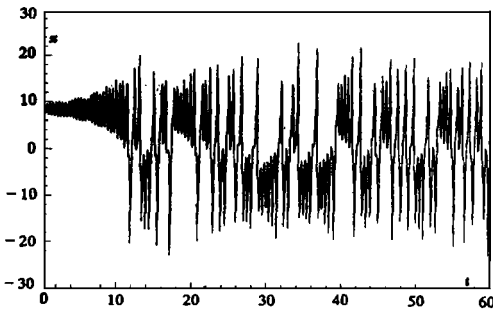


图1 未受控系统中  $x_1$  的时间历程

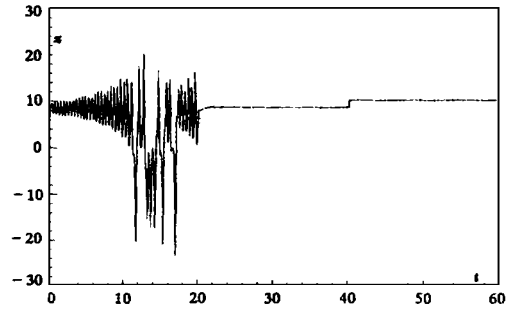


图2 受控和未受控系统中  $x_1$  的时间历程

$t = 20$ 时开始施加控制•  $t = 40$ 时控制目标由  $x_1^g = 8.5$  变为  $x_1^g = 10.0$  由于线性反馈控制律(4.16)镇定系统(4.15)的平衡点, 由(4.12)式知  $\mu$  为

$$\mu = \frac{2P - b}{bP} x_1^g{}^2 \quad (5.3)$$

故  $\mu_1 = 46.9625$  且  $\mu_2 = 65.0$ • 为配置系统(4.15)的极点为

$$(r_1, r_2, r_3) = (-0.5, -1.0, -1.5) \quad (5.4)$$

应选取<sup>[25]</sup>

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-1.5, -4.25, -4.0) \quad (5.5)$$

(5.3)和(5.5)式代入控制律(4.17)作用于系统(2.5)得控制结果如图2所示, 其中实线和虚线分别对应于受控和未受控系统中  $x_1$  的时间历程•

## § 6. 结 论

我们用状态空间精确线性化方法控制 Rayleigh 数可控 Lorenz 系统(2.5)中的混沌运动,验证了系统(2.5)满足精确线性化条件,基于变换关系(4.11)和(4.12)建立了非线性反馈控制律(4.17),最后讨论一个控制算例。

### 参 考 文 献

- 1 T. Shinbrot, C. Grebogi, E. Ott and J. A. Yorke, Using small perturbation to control chaos, *Nature*, **363** (1993), 411—474.
- 2 G. Chen and X. Dong, From chaos to order: perspectives and methodologies in controlling chaotic nonlinear dynamical systems, *Int. J. Bifur. Chaos*, **3** (1993), 1363—1490.
- 3 M. J. Ogorzalek, Taming chaos: control, *IEEE Tran. Circ. Syst. I.*, **40** (1993), 700—706.
- 4 B. Blazejczyk, T. Kapitaniak, J. Wojewoda and J. Brindly, Controlling chaos in mechanical systems, *Appl. Mech. Rev.*, **46** (1993), 385—395.
- 5 张辉、吴淇泰,混沌运动的控制, *力学进展*, **25** (1995), 392—399.
- 6 陈立群、刘延柱,控制混沌的原理和应用, *物理*, **25** (1996), 278—282.
- 7 E. N. Lorenz, Deterministic non-periodic flow, *J. Atmos. Sci.*, **20** (1963), 130—141.
- 8 A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag (1989), 156—172.
- 9 C. Sparrow, *The Lorenz Equation Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Springer-Verlag (1982).
- 10 J. L. Breeden and A. Hubler, Reconstructing equations of motion from experimental data with unobserved variables, *Phys. Rev. A*, **42** (1990), 5817—5826.
- 11 E. A. Jackson, Control of dynamic flows with attractors, *Phys. Rev. A*, **44** (1991), 4839—4853.
- 12 D. Gligorski, D. Dimovski and V. Urumov, Control in multidimensional chaotic systems by small perturbations, *Phys. Rev. E*, **51**(1995), 1690—1694.
- 13 R. Mettin, A. Hubler and A. Scheeline, parametric entrainment control of chaotic systems, *Phys. Rev. E*, **51** (1995), 4065—4075.
- 14 E. A. Jackson and I. Grosu, An open\_plus\_closed\_loop(OPLC) control of complex dynamic systems, *Phys. D*, **85** (1995), 1—9.
- 15 Chen Liqun and Liu Yanzhu, Parametric open\_plus\_closed\_loop control of chaos in continuous dynamical systems, *Acta, Mechanics Solida Sinica*, **10** (4) (1997).
- 16 T. L. Vincent, J. Yu, Control of a chaotic system, *Dyn. Contr.*, **1** (1991), 35—52.
- 17 Z. Qu, G. Hu and B. Ma, Controlling chaos via continuous feedback, *Phys. Lett. A*, **178** (1993), 265—270.
- 18 J. Alvarez Gallegos, Nonlinear regulation of a Lorenz system by feedback linearization techniques, *Dyn. Contr.*, **4** (1994), 277—289.
- 19 C. J. Wan and D. Bernstein, Nonlinear feedback control with global stabilization, *Dyn. Contr.*, **5** (1995), 321—346.
- 20 T. W. Carr and I. B. Schwartz, Controlling unstable steady states using system parameter variation and control duration, *Phys. Rev. E*, **50** (1994), 3410—3415.
- 21 M. Stampfle, controlling chaos through iteration sequences and interpolation techniques, *Int. J. Bifur. Chaos*, **4** (1994), 1697—1701.

- 22 T. T. Martley and F. Mossayebi, A classical approach to controlling the Lorenz equations, *Int. J. Bifur. Chaos*, **2** (1992), 881—887.
- 23 T. B. Fowler, Application of stochastic control techniques to chaotic nonlinear systems, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **34** (1989), 201—205.
- 24 T. H. Yeap and N. U. Ahmed, Feedback control of chaotic systems, *Dyn. Contr.*, **4** (1994), 97—110.
- 25 K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice\_Hall, (1990), 776—795.

## Control of the Lorenz Chaos by the Exact Linearization

Chen Liqun     Lin Yanzhu

(Department of Engineering Mechanics Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P. R. China)

### Abstract

Controlling chaos in the Lorenz system with a controllable Rayleigh number is investigated by the state space exact linearization method. Based on proving the exact linearizability, the nonlinear feedback is utilized to design the transformation changing the original chaotic system into a linear controllable one so that the control is realized. A numerical example of control is presented.

**Key words** Rayleigh number, Lorenz system, chaos