

带复数核的第一类 Fredholm 积分方程 的正则化方法及其应用*

尤云祥^① 缪国平^①

(戴世强推荐, 1996 年 6 月 24 日收到, 1997 年 6 月 8 日收到修改稿)

摘 要

本文推广了 Tikhonov 正则化方法, 导出了带复数核的第一类 Fredholm 积分方程的正则解应满足的正则积分微分方程, 并讨论了正则解的收敛性. 作为这一方法的应用, 数值求解了与二维摇板造波问题相应的一类逆问题, 并给出了选择最佳正则参数的一个实用的方法.

关键词 逆问题 第一类 Fredholm 积分方程 复数核 正则化方法

§ 1. 引 言

最近几十年来, 数学物理和应用数学中的逆问题已引起人们越来越大的兴趣, 其中很多逆问题, 如遥感遥测、间接测量、参数识别等, 经常可归结为第一类 Fredholm 积分方程的求解^[1,2,3].

$$\int_a^b K(y, x)f(x)dx = g(y) \quad (c \leq y \leq d) \quad (1.1)$$

式中, 积分核 K 为一表述物理现象的已知模型, g 是已知的数据函数, 而 f 是待求函数. 上式还可更一般地表示为

$$Af = g \quad (1.2)$$

其中, $A: X \rightarrow Y$ 是一个线性算子(X, Y 通常是 Hilbert 空间). 由逆问题导出的算子 A 通常是一个作用在无穷维空间上的紧算子. 因此, 方程(1.2)通常是不适定的, 即使方程的解存在且唯一, 但它并不连续依赖于数据 $g^{[4]}$. 有许多恢复解的稳定性的方法, 其中 Tikhonov 正则化方法可能是最常用的. 带实数核的第一类 Fredholm 积分方程的正则解已有过广泛的研究. 然而, 从许多实际问题中抽象出来的这类积方程含有复数形式的积分核, 有时还可能以一个无穷级数的形式出现. 迄今为止, 带复数核的第一类 Fredholm 积分方程的求解方法尚未见诸文献.

本文则研究了带复数核的第一类 Fredholm 积分方程(包括核是个无穷级数的情况)的正则化解法及其数值处理. 我们在第二节中将 Tikhonov 正则化方法加以推广, 导出了这类积分方程的正则解应满足的正则积分微分方程. 进而在第三节中研究了近似正则解的收敛性问题. 最后, 作为这一方法的应用, 在第四节中数值求解了与二维摇板造波问题相应的一类逆问题, 并给出了选择最佳正则参数的一个实用的方法.

* 国家自然科学基金资助课题

① 上海交通大学, 上海 200030

§ 2. Tikhonov 正则化方法的推广

设积分核 K 是在 $[c, d] \times [a, b]$ 上的连续的复数函数, X 和 Y 分别取为 $H^1[a, b]$ 和 $L_2[c, d]$, 其中, $L_2[c, d]$ 和 $H^1[a, b]$ 分别是复 Hilbert 空间和复 Sobolev 空间, 记 $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_Z$ 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_Z$ 分别为空间 Z 的模和内积. Tikhonov 泛函取为 $M^\alpha(f, g) = \|Af - g\|_{L_2}^2 + \alpha \Omega(f)$, 其中 $\Omega(f) = \int_a^b \left\{ q_0(s) \left| \frac{df}{ds} \right|^2 + q_1(s) |f(s)|^2 \right\} ds$ 为稳定泛函, 而 q_0, q_1 是已知的正函数, q_0 有连续的一阶导数, $\alpha (> 0)$ 是一个适当选择的常数, 称为正则参数. 方程(1.2)的正则解 f_α 即使泛函 $M^\alpha(f, g)$ 最小的函数.

Tikhonov^[5]最初采用的是 $q_0 = 1, q_1 = 1$; 而 Phillips^[6]采用 $q_0 = 1, q_1 = 0$ 他们都成功地给出了一个恢复第一类积分方程解的稳定性的数值算例. 在 Tikhonov 的方法中, 为了恢复第一类积分方程解的连续依赖性, 解的先验信息的利用起着重要的作用. 之后, 许多研究者对 $q_0 = 0, q_1 = 1$ 的情况, 作了大量研究. 为简便计, 本文仅考虑 $q_0 = 1, q_1 = 1$ 的情形, 这时 $\Omega(f) = \|f\|_{H^1}^2$.

定理 2.1 设 $A: H^1[a, b] \rightarrow L_2[c, d]$ 是一个有界线性算子, 则对任意 $g \in L_2[c, d]$ 存在唯一的 $f_\alpha \in H^1[a, b]$ 使

$$M^\alpha(f_\alpha, g) = \inf_{f \in H^1[f, g]} M^\alpha[f, g] \quad (2.1)$$

而且 f_α 满足正则方程

$$\alpha f_\alpha + A^* A f_\alpha = A^* g \quad (2.2)$$

其中, A^* 为 A 的伴随算子.

证明 对任意 $f \in H^1[a, b]$, 有

$$\begin{aligned} \|Af - g\|_{L_2}^2 + \alpha \|f\|_{H^1}^2 &= \|Af_\alpha - g\|_{L_2}^2 + \alpha \|f_\alpha\|_{H^1}^2 + \|A(f - f_\alpha)\|_{L_2}^2 \\ &\quad + \alpha \|f - f_\alpha\|_{H^1}^2 + 2\operatorname{Re}\langle f - f_\alpha, \alpha f_\alpha + A^*(Af_\alpha - g) \rangle_{H^1} \end{aligned}$$

从上面方程易知, 条件(2.2)是 f_α 极小化泛函 $M^\alpha(f, g)$ 的充分必要条件.

定义算子 $T: H^1[a, b] \rightarrow H^1[a, b]$ 为 $T = \alpha I + A^* A$ (I 为单位算子). 则对任意 $f \in H^1[a, b]$, 有

$$\alpha \|f\|_{H^1}^2 \leq \alpha \|f\|_{H^1}^2 + \|Af\|_{L_2}^2 = \operatorname{Re}\langle Tf, f \rangle_{H^1}$$

从而, T 是一个严格强制算子, 由 Lax-Milgram 定理知, T 有一个有界逆算子 $T^{-1}: H^1[a, b] \rightarrow$

$H^1[a, b]$ Q. E. D

注记 1 在本文对核 K 的假定下, 方程(1.2)中的算子 A 是一个有界线性算子^[4].

注记 2 记 A^+ 是 A 的广义 Moore-Penrose 逆算子, 则对每一个 $g \in D(A^+) = R(A) + R(A)^\perp$, 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, $f_\alpha \rightarrow f = A^+ g$, 而且, 如果 $f \in R(A^* A)$, 则 $\|f - f_\alpha\|_{H^1} = o(\alpha)$; 如果测量数据 g^δ 满足 $\|g - g^\delta\|_{L_2} \leq \delta$, 并记 f_α^δ 为方程(2.2)中用 g^δ 替代 g 时的相应的解, 则存在 $\alpha = \alpha(\delta) \rightarrow 0$ (当 $\delta \rightarrow 0$ 时), 使 $\|f - f_\alpha^\delta\|_{H^1} = o(\delta^{2/3})$ ^[7] 前者说明, 用正则解 f_α 来作为原方程的近似解是可行的, 后者说明正则解 f_α 是连续依赖于初始数据 g 的.

正则方程(2.2)在正则解的数值求解中是不方便的, 为此, 我们给出它的显式方程. 任取 $v(s) \in H^1[a, b]$ 及 $\lambda \geq 0$, 作 λ 的二次函数

$$G(\lambda) = M^\alpha(f + \lambda v, g) = M^\alpha(f, g) + \mathcal{H}(f, g) + \lambda^2 M^\alpha(v, g)$$

其中

$$\begin{aligned}
 c \quad H(f, g) &= \int_c^d \left\{ \left[\int_a^b K(y, x) f(x) dx - g(y) \int_a^b \overline{K(y, s) v(s)} ds \right] dy \right. \\
 &+ \int_c^d \left\{ \left[\int_a^b K(y, x) f(x) dx - g(y) \int_a^b \overline{K(y, s) v(s)} ds \right] dy \right. \\
 \alpha &+ \alpha \int_a^b \left\{ \left[\frac{df}{ds} \left(\frac{dv}{ds} \right) + f(s) \overline{v(s)} \right] ds + \alpha \int_a^b \left\{ \left[\frac{df}{ds} \right] \left[\frac{dv}{ds} \right] + f(s) \overline{v(s)} \right\} ds \right. \\
 &= \int_a^b \left\{ \int_a^b K^*(s, x) f(x) dx - \alpha \left[\frac{d^2 f(s)}{ds^2} - f(s) \right] \right\} \overline{v(s)} ds \\
 &+ \int_a^b \left\{ \int_a^b K^*(s, x) f(x) dx - b(s) - \alpha \left[\frac{d^2 f(s)}{ds^2} - f(s) \right] \right\} \overline{v(s)} ds \\
 &+ \alpha f'(s) \overline{v(s)} \Big|_a^b + \alpha \overline{f'(s) v(s)} \Big|_a^b
 \end{aligned}$$

其中, $K^*(s, x) = \int_c^d \overline{K(y, s)} K(y, x) dy$, $b(s) = \int_c^d \overline{K(y, s)} g(y) dy$, 其中上面的横线表示取共轭.

因为 $M^\alpha(f, g)$ 在 f_a 处取极小值等价于 $G(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 处取极小, 即 $dG(\lambda)/d\lambda|_{\lambda=0} = 0$, 从而, $H(f, g) = 0$. 于是由 v 的任意性, 我们可得如下的正则方程

$$\int_a^b K^*(s, x) f(x) dx - \alpha \left\{ \frac{d^2 f(s)}{ds^2} - f(s) \right\} = b(s) \tag{2.3}$$

及边界条件

$$f'(s) \overline{v(s)} \Big|_a^b = 0 \tag{2.4}$$

如果已知方程 (1.2) 的解 $f(x)$ 的区间 $[a, b]$ 端点的值, 例如 $f(a) = 0, f(b) = 0$, 则我们取 X 为 $H^1[a, b]$ (由在区间 $[a, b]$ 端点取同样值的复数函数组成的一个复 Sobolev 空间), 从而必有 $v(a) = 0, v(b) = 0$, 于是条件 (2.4) 自动满足. 这样, 寻找正则解 $f_\alpha(x)$ 的问题可归结为求解如下的边值问题

P1:

$$\begin{cases} \int_a^b K^*(s, x) f_\alpha(x) dx - \alpha \left\{ \frac{d^2 f_\alpha(s)}{ds^2} - f_\alpha(s) \right\} = b(s) & (2.5) \\ f_\alpha(a) = 0, f_\alpha(b) = 0 & (2.6) \end{cases}$$

如果所求的解不满足齐次边界条件 (2.6), 比如 $f(a) = \eta_1, f(b) = \eta_2$, 则我们可令 $f(x) = f^*(x) + q(x)$, 其中 $q(x) = \frac{1}{b-a} ((b-x)\eta_1 + (x-a)\eta_2)$, 这时 $f^*(a) = 0, f^*(b) = 0$. 于是我们可以先计算对应于 $f^*(x)$ 的满足如下边值问题的正则解 f_α^*

$$\begin{cases} \int_a^b K^*(s, x) f_\alpha^*(x) dx - \alpha \left\{ \frac{d^2 f_\alpha^*(s)}{ds^2} - f_\alpha^*(s) \right\} = b^*(s) & f \\ f_\alpha^*(a) = 0, f_\alpha^*(b) = 0 \end{cases}$$

其中, $b^*(s) = \int_c^d \overline{K(y, s)} \left[g(y) - \int_a^b K(y, x) q(x) dx \right] dy$, 然后取原问题的正则解为 $f_\alpha^*(x) + q(x)$.

如果我们对方程 (1.2) 的解 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 端点的值一无所知, 则条件 (2.4) 等价于 $f'(a) = 0, f'(b) = 0$. 这时, 边界条件 (2.6) 则变为

$$f_\alpha'(a) = 0, f_\alpha'(b) = 0 \tag{2.7}$$

如果所求的解不满足条件(2.7), 则可对其上用的方法处理.

§ 3. 收敛性分析

不失一般性, 我们可仅考虑边值问题 P1 的情况. 用权因子 $w_j = \frac{1}{h}$, 将 P1 离散即得

$$\sum_{i=1}^n hK^*(s_j, x_i) f_{\alpha}^i \alpha \left\{ \frac{f_{\alpha}^{j-1} - 2f_{\alpha}^j + f_{\alpha}^{j+1}}{h^2} - f_{\alpha}^j = b(s_j) \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

其中, $h = \frac{b-a}{n+1}$, $x_j = s_j = h \times j (j = 1, \dots, n)$, 而 $f_{\alpha}^0 = f_{\alpha}(a) = 0, f_{\alpha}^{n+1} = f_{\alpha}(b) = 0$,

线性代数方程组(3.1)可简记为

$$\left\{ A_n + \alpha \left\{ C_n/h^2 + I_n \right\} f_{\alpha}^n = B_n \right. \quad (3.2)$$

其中, $f_{\alpha}^n = (f_{\alpha}^i)_n^T$, 即为边值问题 P1 的近似解, I_n 为 n 阶单位矩阵.

现在我们来考虑差分格式(3.1)的收敛性. 记 $F_{\alpha}^i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为边值问题 P1 的解在 $x = x_i$ 处的精确值. 则我们有

定理 3.1 假设 $f_{\alpha} \in C^4[a, b]$, 核 $K^*(s, x)$ 关于 x 有二阶连续偏导数, 则 $f_{\alpha}^n \rightarrow F_{\alpha}^n = (F_{\alpha}^i)_n^T (n \rightarrow \infty)$.

证明 由数学分析的知识可知,

$$\begin{aligned} \text{为} \quad \sum_{i=1}^n hK^*(s_j, x_i) F_{\alpha}^i & \alpha \left\{ \frac{F_{\alpha}^{j-1} - 2F_{\alpha}^j + F_{\alpha}^{j+1}}{h^2} - F_{\alpha}^j \right. \\ & \left. = b(s_j) + \frac{(n+1)h^3}{12} \frac{\partial^2 (f_{\alpha}(x) K^*(s_j, x))}{\partial x^2} \right\} \Bigg|_{x=\xi} - \frac{h^2}{12} f_{\alpha}^{(4)}(\eta) \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中, $\xi \in (a, b)$, $\eta \in (x_{j-1}, x_{j+1}) (j = 1, 2, \dots, n)$.

将(3.1)和(3.3)相减, 即得

$$\left\{ A_n + \alpha \left\{ C_n/h^2 + I_n \right\} \right\} P_n = G_n \quad \text{如} \quad a \quad ($$

其中

$$G_n = (g_i)_n^T, g_i = \frac{(n+1)h^3}{12} \frac{\partial^2 (f_{\alpha}(x) K^*(s_j, x))}{\partial x^2} \Bigg|_{x=\xi} - \alpha \frac{h^2}{12} f_{\alpha}^{(4)}(\eta) \quad (i = 1, 2, \dots,$$

$n)$

于是, $P_n = (A_n + \alpha \{ C_n/h^2 + I_n \})^{-1} G_n$, 其中 $P_n = (F_{\alpha}^i - f_{\alpha}^i)_n^T$. 由于 $n \rightarrow \infty$ 时, $G_n \rightarrow 0$, 从而, $P_n \rightarrow 0$. Q. E. D.

在实际问题中, 核往往是个无穷级数. 设 $K_m^*(s, x)$, $b_m(s)$ 分别是 $K^*(s, x)$ 和 $b(s)$ 的前 m 项和. 则一个好的近似正则解可以通过下列方程解得

$$(A_n^m + \alpha \{ C_n/h^2 + I_n \}) f_{\alpha n}^m = B_n^m \quad (3.4)$$

其中, $A_n^m = (hK_m^*(s_j, x_i))_{n \times n}$, $B_n^m = (b_m(s_i))_n^T$, $f_{\alpha n}^m = (f_{\alpha n}^i)_n^T$.

定理 3.2 如果 $K_m^*(s, x) \rightarrow K^*(s, x)$, $b_m(s) \rightarrow b(s)$ 对任意 $x, s \in [a, b]$ 一致成立 (当 $m \rightarrow \infty$ 时), 则 $f_{\alpha n}^m \rightarrow f_{\alpha}^n$ (当 $m \rightarrow \infty$ 时).

证明 将(3.2)与(3.4)相减, 可得

$$(A_n + \alpha \{ C_n/h^2 + I_n \}) (f_{\alpha}^n - f_{\alpha n}^m) = (A_n^m - A_n) f_{\alpha n}^m + (B_n - B_n^m)$$

于是, $f_{\alpha}^n - f_{\alpha n}^m = (A_n + \alpha \{ C_n/h^2 + I_n \})^{-1} \{ (A_n - A_n^m) f_{\alpha n}^m + (B_n - B_n^m) \}$

由条件知, $A_n - A_n^m \rightarrow 0, B_n^m \rightarrow B_n$ (当 $m \rightarrow \infty$ 时), 从而 $f_{am}^n - f_a^n \rightarrow 0$ (当 $m \rightarrow \infty$ 时) • Q. E. D

§ 4. 算 例

作为这一方法的应用, 在这一节中我们考虑二维半无限长水槽摇板造波问题及其相应的一类逆问题•

二维半无限长水槽摇板造波正问题的提法如下: 如图 1 所示, 水槽中 $x = a$ 处有一摇板, 以圆频率 ω 在微幅振荡下造波, 这时摇板在水槽中产生一右传波•

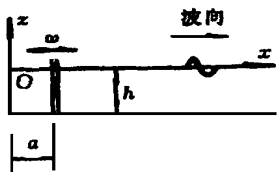


图 1 摇板造波

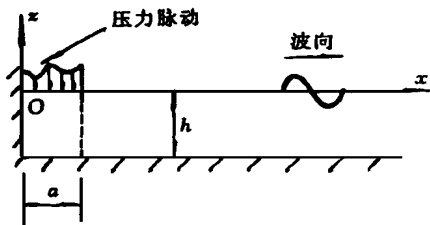


图 2 压力造波

在线性势流理论范围内, 水槽中的流场可以用速度势 $\phi_d(z, x) \exp[-i\omega t]$ 描述, 它可表示为^[8]

$$\phi_d(z, x) = A_0^* \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \exp[ik_0(x-a)] + \sum_{j=1}^{\infty} A_j^* \cos k_j(z+h) \exp[-k_j(x-a)]$$

式中, k_0 和 k_j ($j = 1, 2, \dots$) 分别由色散关系 $\omega^2/g^* = k_0 \tanh k_0 h$ 和 $\omega^2/g^* = -k_j \tan k_j h$ 确定, g^* 为重力加速度, 系数 A_0^* 和 A_j^* 由摇板上的边界条件确定, 即 $\partial \phi_d(z, x) / \partial x |_{x=a} = f(z)$, 其中, $f(z)$ 为摇板的法向速度, 这样

$$A_0^* = -\frac{i}{k_0 \rho} \int_{-h}^0 f(z) \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} dz, \quad A_j^* = -\frac{1}{k_j \rho} \int_{-h}^0 f(z) \cos k_j(z+h) dz$$

而

$$p_0 = \int_{-h}^0 \frac{\cosh^2 k_0(z+h)}{\cosh^2 k_0 h} dz, \quad p_j = \int_{-h}^0 \cos^2 k_j(z+h) dz \quad (j = 1, 2, \dots)$$

速度势 $\phi_d(z, x)$ 就是正问题的解•

现在, 来考虑这样一个逆问题: 即在自由面 $[0, a]$ 上寻求一压力脉动 $\text{Re}\{\hat{p}(x) \exp[-i\omega t]\}$, 使其产生的速度势 ϕ 可在 $x \geq a$ 的流场中模拟摇板产生的势 ϕ_d , 其中 Re 表示取物理量的实部, \hat{p} 为脉动压力幅值的分布形态, ω 为压力脉动频率, 如图 2 所示•

在这一压力作用下, 场中的速度势可记为 $\phi_i(z, x)$, 它由二维 Laplace 方程, 池底条件, x

$$= +\infty \text{ 处的辐射条件, 自由面条件 } \frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g^*} \phi_i = \begin{cases} \frac{i\omega}{\rho g^*} \hat{p}, & (0 \leq x \leq a) \\ 0, & (a \leq x) \end{cases} \quad (\rho \text{ 为水密度), \text{ 及池壁}$$

条件 $\partial \phi_i / \partial x |_{x=0} = 0$ 确定• 我们还要求在原先的摇板位置上速度势 $\phi(z, x)$ 满足原物面的边界条件

$$\partial \phi_i / \partial x \Big|_{x=a} = f(z) \quad (4.1)$$

为方便计, 记 $p(x) = (i\omega \rho g^*) \hat{p}(x)$, 并称之为压力分布。

为满足池壁条件, 我们对 ϕ_i 关于 $x=0$ 作偶延拓, 并让压力分布在 $[-a, a]$ 上。易知, 当 $p(x)$ 为偶函数时, 池壁条件自动满足。

自由面上 $\delta(x-\xi)$ 型的压力脉动产生的速度势为^[9]

$$\begin{aligned} \phi_i(z, x) = & B_0 \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \exp[ik_0|x-\xi|] \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \cos k_j(z+h) \exp[-k_j|x-\xi|] \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\text{其中} \quad B_0 = \frac{i}{\tanh k_0 h + k_0 h \operatorname{sech}^2 k_0 h}, \quad B_j = \frac{1}{\sin k_j h + (k_j h / \cos k_j h)} \quad (j=1, 2, \dots)$$

于是, 当在 $[-a, a]$ 上有 $p(x)$ 型压力分布时, 有

$$\begin{aligned} \phi_i(z, x) = & \int_{-a}^a \left[B_0 \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \exp[ik_0|x-\xi|] \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \cos k_j(z+h) \exp[-k_j|x-\xi|] \right] p(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (4.3)$$

在 $x=a$ 上, 由条件(4.1)可得

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a \left[ik_0 B_0 \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \exp[ik_0(a-\xi)] \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^{\infty} k_j B_j \cos k_j(z+h) \exp[-k_j(a-\xi)] \right] p(\xi) d\xi = f(z) \end{aligned}$$

当 $p(x)$ 是偶函数时, 上式还可记为

$$\begin{aligned} & \int_0^a \left[2ik_0 B_0 \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \exp[ik_0 a] \cos k_0 \xi \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^{\infty} 2k_j B_j \cos k_j(z+h) \exp[-k_j a] \cosh k_j \xi \right] p(\xi) d\xi = f(z) \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \int_0^a K(z, \xi) p(\xi) d\xi = f(z) \quad (4.4)$$

这是一个带复数核的第一类 Fredholm 积分方程, 其中

$$\begin{aligned} K(z, \xi) = & 2ik_0 B_0 \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \exp[ik_0 a] \cos k_0 \xi \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} 2k_j B_j \cos k_j(z+h) \exp[-k_j a] \cosh k_j \xi \end{aligned}$$

而 $p(x)$ 即为逆问题的解。

作为一个算例, 我们取 $f(z) = 1$, $a = 1$, 并对 $h = 1$, $\omega = 4.5$ 计算 f_a^n 。计算 f_a^n 的关键是如何选择一个最佳的正则参数 α 。我们的方法如下: 首先选择一个序列 $\alpha_j = \alpha_0 \times 10^{-j}$ ($j = 1$,

2, ...), 其中 α_0 是一个适当选择的常数, 并取若干个 j 的值求解方程(3.2)• 我们发现, 一定存在一个 j_0 (在我们的例子中, $j_0 = 12$), 当 $j = j_0$ 时, 得到的解是不稳定的, 而当 $j = j_0 - 1$ 时解开始趋于稳定, 然后对取定的 $j = j_0 - 1$, (1) 取若干个 n 的值(例如, $n = 55, 111$), 检查所得解是否稳定和收敛; (2) 取若干个 x 的值, 检查 $\phi_i(z, x)$ 和 $\phi_d(z, x)$ 是否一致• 如果结果不满意, 可修改 α_0 的值, 或取 $j = j_0 - 2$, 重复步骤(1)和(2), 直到得到满意的结果为止• 图3和图4表明了正则参数对正则解的收敛性和稳定性的影响, 而图5示出的是在 $x = 3.0$ (米)时相应的正逆问题的速度势 $\phi_i(z, x)$ 和 $\phi_d(z, x)$ 之比较• 由图可知, 所得正则解是稳定和收敛的, 而且, 此时正逆问题的速度势是吻合的•

本文的结果表明, 推广后的 Tikhonov 正则化方法对恢复带复数核的第一类 Fredholm 积分方程解的稳定性是十分有效的•

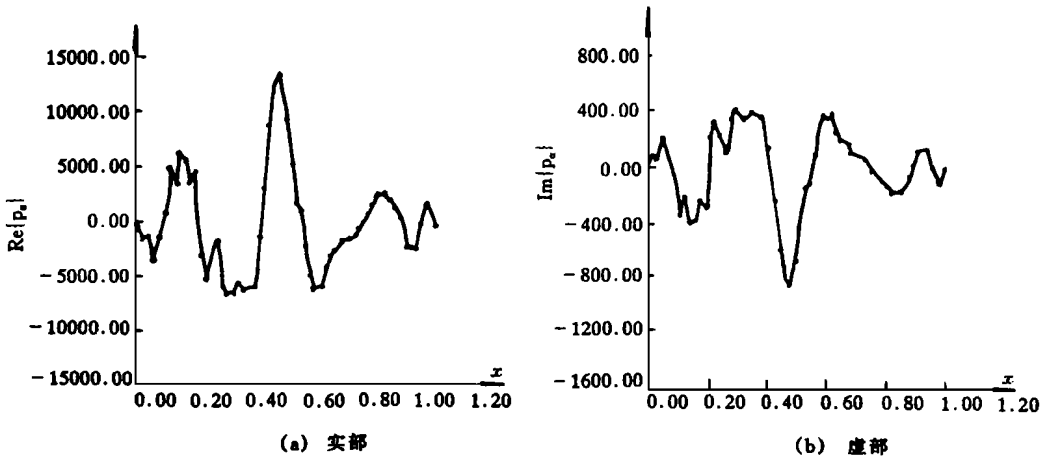


图3 当 $\alpha = 5.725 \times 10^{-12}$ 时, 方程(4.4)的解

此图表明, 积分方程(4.4)的解是不稳定的

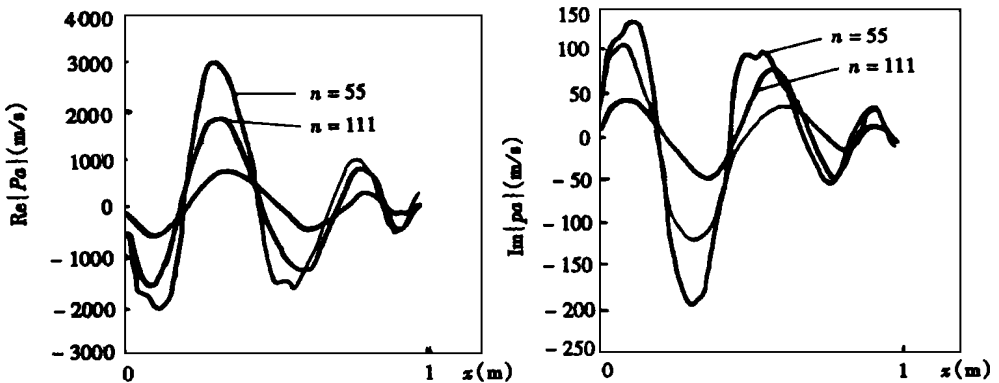


图4 正则参数对正则解的稳定性和收敛性的影响

(实线表示当 $\alpha = 2.92 \times 10^{-10}$ 时, 在 $n = 55, 111$ 二种情况下的正则解, 虚线示出的是当 $\alpha = 2.92 \times 10^{-11}$ 时, 在 $n = 55, 111$ 二种情况下的正则解)

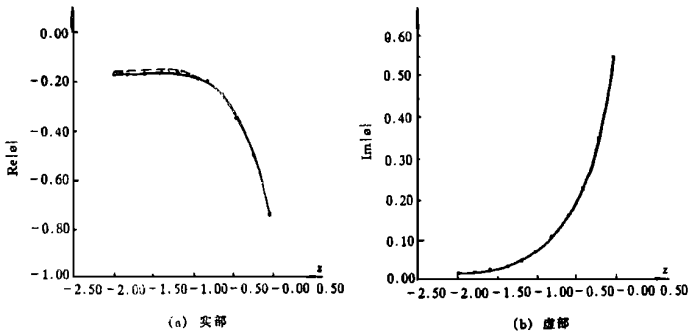


图 5 当 $\alpha = 2.92 \times 10^{-10}$, $x = 3.0$ (米) 时, 正逆问题速度势之比较
(—: ϕ_d ; ...: ϕ_1)

参 考 文 献

- 1 J. Baumeister, Stable Solution of Inverse Problem, Vieweg & Ohn, Braunschweig/Wiesbaden (1987).
- 2 P. C. Sabatier(ed), Inverse Problems: An Interdisciplinary Study, Academic Press Boston (1987).
- 3 A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, Solution of Ill-posed Problems, Wiley, New York (1977).
- 4 R. Kress, Linear Integral Equations, Springer-Verlag, Berlin (1989).
- 5 A. N. Tikhonov, On solution of incorrectly formulated problems and the regularization method, Soviet Math. Doklady, **4** (1963), 1035—1038. (English version)
- 6 D. L. Phillips, A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, J. Ass. Com p. Math., **9** (1962), 84—97.
- 7 E. Schock, On the asymptotic order of accuracy of Tikhonov regularization, J. Optim. Theroy Appl., **44**(1984), 95—104.
- 8 缪国平、刘应中编,《海洋工程水动力学基础》,海洋出版社,北京(1991).
- 9 缪国平、刘应中,有限水深表面压力脉动产生的速度势与二阶绕射问题的辐射条件,中国造船,总107期(1989),1—13.
- 10 李世雄、刘家绮编,《小波变换和反演数学基础》,地质出版社,北京(1994).

On the Regularization Method of the First Kind Fredholm Integral Equation With a Complex Kernel and its Application

You Yunxiang Miao Guoping

(Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, P. R. China)

Abstract

The regularized integrodifferential equation for the first kind Fredholm integral equation with a complex kernel is derived by generalizing the Tikhonov regularization method and the convergence of approximate regularized solutions is discussed. As an application of the method, an inverse problem in the two-dimensional wave-making problem of a flat plate is solved numerically, and a practical approach of choosing optimal regularization parameter is given.

Key words Inverse problem, Fredholm integral equation of the first kind, complex kernel, regularization method