应用数学和力学，第18卷 第12期（1997年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

吸引子的逼近

秦文新[1,2]　　刘曾荣[1,2]

（1996年3月11日收到）

摘　　要

本文考虑耦合振子系统及对其按时间离散化（时间长为h）得到的离散动力系统．证明在一定条件下，这两个系统都有一维整体吸引子l和l_h．进一步证明当时间步长$h\to 0$时，$l_h\to l$．

关键词　耦合振子系　吸引子　锥　水平曲线

一、引　　言

考虑耦合振子系统

$$\dot{x}=Ax+f(x) \tag{1.1}$$

其中$x=(x^1, x^2, \cdots, x^m)\in \mathbf{R}^m$，$(m\geqslant 3)$，$A$是$m\times m$矩阵，$f$是$\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$的非线性映射：

$$A=m^2\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad f(x)=\begin{pmatrix} -\sin(x^1)+b \\ -\sin(x^2) \\ \vdots \\ -\sin(x^{m-1}) \\ -\sin(x^m) \end{pmatrix}$$

常数$b>0$。

对(1.1)按时间离散化（即欧拉算法）得到迭代

$$x_{n+1}=x_n+h(Ax_n+f(x_n)) \tag{1.2}$$

其中$h>0$为时间步长。

由(1.2)可得到$\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$的映射$F_h$：

$$F_hx=x+h(Ax+f(x)) \tag{1.3}$$

本文主要讨论连续动力系统(1.1)及离散动力系统$\{F_h^n\}_{n=1}^{+\infty}$在相空间$\mathbf{R}^m$中的整体吸引子以及吸引子的逼近。

1 苏州大学数学系，江苏省苏州 215006

2 中国科学院力学研究所LNM开放实验室，北京 100080

二、耦合振子系的整体吸引子

考虑(1.1)的初值问题

$$\dot{x}=Ax+f(x),\ x(0)=x_0 \tag{2.1}$$

显然，由(2.1)可导出$\mathbf{R}^m$上的半群：$\{S(t)\}_{t\geq0}$:

$$S(t):x_0\mapsto x(t)$$

其中$x(t)$是初值问题(2.1)的解。

记矩阵A的特征值为λ_i $(i=0,1,\cdots,m-1)$:

$$\lambda_i=-4m^2\sin^2(i\pi/2m),\qquad (i=0,1,\cdots,m-1)$$

记对应于特征值$\lambda_0=0$的特征向量$\eta_0=(1,1,\cdots,1)^T\in\mathbf{R}^m$。再记$E_1=\operatorname{span}\{\eta_0\}$，$E_2=E_1^\perp$。$\mathbf{R}^m$到$E_1$和$E_2$的投影算子分别记为$P$，$Q$。注意到这样一个事实：$\lambda_1=-4m^2\sin^2(\pi/2m)<-4$ $(m>3)$。以后记$\mathbf{R}^m$中的欧几里德内积和模分别为$\langle\cdot,\cdot\rangle$和$|\cdot|$。

定义2.1 称集合

$$Z=\{p+q\in\mathbf{R}^m \mid p\in E_1,\ q\in E_2,\ |q|\leqslant|p|\}$$

为$\mathbf{R}^m$中的锥。

引理2.2 $\forall y_0,\ x_0\in\mathbf{R}^m$

i) 如果$y_0-x_0\in Z$，则

$$S(t)y_0-S(t)x_0\in Z,\qquad t\geqslant0 \tag{2.2}$$

ii) 如果对某个$t_0>0$，$S(t_0)y_0-S(t_0)x_0\notin Z$，则

$$|Q(S(t)y_0-S(t)x_0)|\leqslant\exp[\lambda_1t/2]|Q(y_0-x_0)|,\qquad 0\leqslant t\leqslant t_0 \tag{2.3}$$

证明 记$x(t)=S(t)x_0$，$y(t)=S(t)y_0$，$p(t)=P(y(t)-x(t))$，$q(t)=Q(y(t)-x(t))$。于是$p(t)$和$q(t)$分别满足：

$$\dot{p}=P(f(y(t))-f(x(t))),\ p(0)=P(y_0-x_0) \tag{2.4}$$

$$\dot{q}=Aq+Q(f(y(t))-f(x(t))),\ q(0)=Q(y_0-x_0) \tag{2.5}$$

由(2.4)式，再注意到$|f(y)-f(x)|\leqslant|y-x|$，有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|p(t)|^2&=2\langle Pf(y)-Pf(x),\ p\rangle\\&\geqslant-2|f(y(t))-f(x(t))|\cdot|p(t)|\\&\geqslant-2|y(t)-x(t)|\cdot|p(t)|\\&=-2|p(t)+q(t)|\cdot|p(t)|\\&\geqslant-2(|p(t)|^2+|p(t)|\cdot|q(t)|)\end{aligned} \tag{2.6}$$

同样由(2.5)可得

$$\frac{d}{dt}|q(t)|^2\leqslant2\lambda_1|q(t)|^2+2(|q(t)|^2+|p(t)|\cdot|q(t)|) \tag{2.7}$$

从而

$$\frac{d}{dt}(|q|^2-|p|^2)\leqslant2\lambda_1|q|^2+2(|p|^2+|q|^2)+4|p|\cdot|q|$$

当$|q|=|p|$时，

$$\frac{d}{dt}(|q|^2-|p|^2)\leqslant(2\lambda_1+8)|q|^2\leqslant0$$

这表明当$y_0-x_0\in\partial Z$(Z的边界)时,$y(t)-x(t)\in Z$,$\forall t>0$。 i)证毕

ii)假定存在$t_0>0$使$y(t_0)-x(t_0)\notin Z$,则由i)可知当$0\leqslant t\leqslant t_0$时,$y(t)-x(t)\notin Z$,即:

$$|q(t)|>|p(t)|,\qquad 0\leqslant t\leqslant t_0$$

从而由(2.7)

$$\frac{d}{dt}|q(t)|^2\leqslant(2\lambda_1+4)|q(t)|^2\leqslant\lambda_1|q(t)|^2$$

即有 $$|q(t)|^2\leqslant\exp[\lambda_1 t]|q(0)|^2$$

所以 $$|Q(y(t)-x(t))|\leqslant\exp[\lambda_1 t/2]|Q(y_0-x_0)|,\qquad 0\leqslant t\leqslant t_0$$

证毕

定义2.3 设Φ是$E_1\to E_2$的Lipschitz映射,若$|\Phi(p_1)-\Phi(p_2)|\leqslant|p_1-p_2|$,$\forall p_1, p_2\in E_1$,刚称连续曲线$l=\{p+\Phi(p)\mid p\in E_1\}$为水平曲线。若$\Phi$还满足$\Phi(p+2\pi\eta_0)=\Phi(p)$,$\forall p\in E_1$,刚称$l$为限制水平曲线。

推论2.4 设l为$\mathbf{R}^m$中一条水平曲线,则$\forall t>0$,$S(t)l$仍是水平曲线,如l还是限制水平曲线,则$S(t)l$是限制水平曲线.

证明 $\forall y, x\in S(t)l$,必$\exists y_0, x_0\in l$,使$S(t)y_0=y$,$S(t)x_0=x$.因为$x_0, y_0\in l$,所以$y_0-x_0\in Z$.由引理2.2$S(t)y_0-S(t)x_0=y-x\in Z$.从而$S(t)l$是水平曲线.

考虑到$f(x+2\pi\eta_0)=f(x)$,因此,如l为限制水平曲线,则$S(t)l$还是限制水平曲线.

引理2.5 存在常数$c>0$,使$\forall x\in\mathbf{R}^m$,$\exists t_0>0$,当$t>t_0$时,$|QS(t)x|\leqslant c/4$.若$|Qx|\leqslant c/4$,则$|QS(t)x|\leqslant c/4$,$\forall t>0$.

证明 显然f是$\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$的有界映射,即存在常数$c>0$,使$|f(x)|\leqslant c$,$\forall x\in\mathbf{R}^m$.设$x\in\mathbf{R}^m$,则$S(t)x$显然满足下式:

$$S(t)x=e^{At}x+\int_0^t e^{A(t-\tau)}f(S(\tau)x)d\tau \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\qquad |QS(t)x|&\leqslant\|e^{At}Q\||Qx|\\&\quad+\int_0^t\|e^{(At-\tau)}Q\|\cdot|f(S(\tau)x)|d\tau\\&\leqslant\exp[\lambda_1 t]|Qx|+c\int_0^t\exp[\lambda_1(t-\tau)]d\tau\\&=\exp[\lambda_1 t]|Qx|+(c/|\lambda_1|)(1-\exp[\lambda_1 t])\end{aligned}$$

由上式立得引理2.5。

定理2.6 $\forall\tau>0$,映射$S(\tau)$有不变的限制水平曲线l,即$S(\tau)l=l$.

证明 记$H=[0, 2\pi]\cdot\eta_0\subset E_1$,$\mathscr{B}=\{x\in\mathbf{R}^m\mid Px\in H\}$,

$$\mathscr{M}=\{l\mid l\text{是限制水平曲线}\}$$

$$\hat{\mathscr{M}}=\{\hat{l}=l\cap\mathscr{B}\mid l\in\mathscr{M}\}$$

记Π为$\mathscr{M}\to\hat{\mathscr{M}}$的映射:

$$\Pi l=\hat{l}=l\cap\mathscr{B}$$

对任意$\hat{l}\in\hat{\mathscr{M}}$,唯一对应着$H\to E_2$的一个Lipschitz映射。记$M$为所有与$\hat{\mathscr{M}}$中元素对应的Lipschitz映射的全体.$M$中元素的运算照通常定义,其中元素的范数定义如下:

$$\|g\|=\max_{p\in H}|g(p)|,\qquad g\in M$$

从而M成为一个Banach空间。

记 $\tilde{M}=\{g|g\in M, \|g\|\leqslant c/4\}$.

下面我们把M中的元素与$\hat{\mathscr{M}}$中相对应的元素视为同一. 因为$\tilde{M}$是$H\to E_2$的一致有界且等度连续的映射族，由Arzela-Ascoli定理，$\tilde{M}$是M中的紧集。

由$S(\tau)$，可以定义$M\to M$的一个映射F满足：$\Pi\circ S(\tau)=F\circ\Pi$

即 $F=\Pi\circ S(\tau)\circ\Pi^{-1}$. 由引理2.2和2.5，显然有$F\tilde{M}\subset\tilde{M}$. 由 Schander 不动点定理，$F$在$\tilde{M}$中至少存在一个不动点$\hat{l}$. 记$l=\Pi^{-1}\hat{l}$. 于是 $S(\tau)l=S(\tau)\Pi^{-1}\hat{l}=\Pi^{-1}F\hat{l}=\Pi^{-1}\hat{l}=l$。从而$S(\tau)$有一条不变的限制水平曲线$l$.

定理2.7 系统(1.1)有一维的整体吸引子l，l是$\mathbf{R}^m$中一条限制水平曲线.

证明 取定$\tau>0$，由定理2.6，存在$l\in\mathscr{M}$，使$S(\tau)l=l$. 下面证明两点，1°对$\forall t>0$，$S(t)l=l$，即l对半群$\{S(t)\}_{t>0}$是不变的. 2°对任意$x\in\mathbf{R}^m$，$d(S(t)x, l)\to 0$当$t\to+\infty$时. 这样l就是系统的整体吸引子.

1° 的证明 先证对任意$x\in\mathbf{R}^m$，$d(S(n\tau)x, l)\to 0$当$n\to+\infty$. 其中$d(x, l)$表示x与l的距离. 由引理2.5，不妨设$|Qx|\leqslant c/4$. 对任意n，存在$\hat{y}\in l$使$PS(n\tau)x=P\hat{y}$. 因为l关于$S(\tau)$不变，即$S(\tau)l=l$故存在$y\in l$使$S(n\tau)y=\hat{y}$，从而$S(n\tau)y-S(n\tau)x\notin Z$. 由引理2.2

$$
\begin{aligned}
d(S(n\tau)x, l)&\leqslant|Q(S(n\tau)x-S(n\tau)y)|\\
&\leqslant\exp[\lambda_1 n/2]|Qx-Qy|\\
&\leqslant\exp[\lambda_1 n\tau]\cdot(c/2)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad d(S(n\tau)x, l)\to 0 \quad \text{当}n\to+\infty\text{时}$$

设t充分小，使$\Pi S(t)l\in\tilde{M}$.

$$F\circ\Pi S(t)l=\Pi\circ S(\tau)S(t)l=\Pi\circ S(t)S(\tau)l=\Pi\circ S(t)l$$

说明$\Pi S(t)l$是F在$\tilde{M}$中的一个不动点. 从而$S(t)l$是$S(\tau)$的一条不变限制水平曲线. 从上面的讨论可知$S(\tau)$不能有两条不同的不变限制水平曲线. 故$S(t)l=l$(t充分小). 所以对$\forall t>0$，有

$$S(t)l=l, \qquad \forall t>0$$

2°的证明 仿1°证明的前半部份，利用(2.3)式立得 $\forall x\in\mathbf{R}^m$，$d(S(t)x, l)\to 0$，$t\to+\infty$. 所以l是$\{S(t)\}_{t>0}$（即系统(1.1)）的整体吸引子.

三、离散系统的整体吸引子

对映射F_h，$(h<1/4m^2)$离散动力系统$\{F_h^n\}_{n=1}^{+\infty}$亦有一维整体吸引子. 本节所用记号，除非另有声明，含义均与前节一样。

另记

$$F_h x=Bx+hf(x), \qquad x\in\mathbf{R}^m$$

其中$B=I+hA$，I为$\mathbf{R}^m$中的恒等映射. 以下均假定$h<1/4m^2$，使B的特征值$\mu_i=1+h\lambda_i$满足$0\leqslant\mu_i\leqslant 1$，$i=0, 1, \cdots, m-1$.

引理3.1 $\forall y, x\in\mathbf{R}^m$，

i) 如果$y-x\in Z$，则

$$F_h^n y-F_h^n x\in Z, \qquad n=1, 2, \cdots \tag{3.1}$$

ii) 如果$F_h^k y-F_h^k x\notin Z$，则

$$|Q(F_h^k y-F_h^k x)|\leqslant(1-2h)^k|Q(y-x)| \qquad (3.2)$$

证明同引理2.2.

引理3.2 $\forall x\in \mathbf{R}^m$, $\exists N>0$, 当$n>N$时, $|QF_h^n x|\leqslant c/4$（这里的c与引理2.5中的一样）. 且当$|Qx|\leqslant c/4$时, $|QF_h x|\leqslant c/4$.

证明类似于引理2.5的证明.

定理3.3 F_h有一条不变的限制水平曲线l_h, 即$F_h l_h=l_h$.

定理3.4 l_h是F_h的整体吸引子.

定理3.3与3.4的证明与定理2.6, 2.7的证明相似.

四、吸引子的逼近

通过前二节的准备, 我们已经明确, 在相空间$\mathbf{R}^m(m\geqslant3)$中, F_h $(h<1/4m^2)$导出的离散动力系统$\{F_h^n\}_{n=1}^{+\infty}$和(1.1)导出的连续动力系统$\{S(t)\}_{t\geqslant0}$都有一维吸引子$l_h$和$l$, 它们都是$\mathbf{R}^m$中的限制水平曲线. 设它们分别对应于Banach空间M中的元素Φ_h和Φ, $\|\Phi_h\|\leqslant c/4$, $\|\Phi\|\leqslant c/4$.

对(1.1)的初值问题

$$\dot{x}=Ax+f(x),\quad x(0)=x_0$$

的解$x(t)$, 由欧拉算法计算时刻T时的近似值为$F_h^N x_0$, 其中时间步长$h=T/N$, N是自然数. 由欧拉算法的收敛性知当$h\to0$时, $F_h^N x_0\to x(T)$. 这是对具体一条轨道而言. 对整个系统而言, 当$h\to0$时, 离散系统$\{F_h^n\}$和连续系统(1.1)的吸引子l_h和l有什么关系这一问题没有一般性结论. 本节在前面两节准备的基础上要证明当$h\to0$时, $h_h\to l$. 其中收敛的意义是指l_h和l对应的M中的元素$\Phi_h\to\Phi$（在M中）.

定理4.1 $\lim\limits_{h\to0}\|\Phi_h-\Phi\|=0$

证明 注意到对$0<h<1/4m^2$, $\{\Phi_h\}$是$H\to E_2$的等度连续且一致有界的映射族. 故$\{\Phi_h\}$是M中的列紧集. 以下用反证法. 假定$h\to0$时$\Phi_h\nrightarrow\Phi$. 即$\exists\,\varepsilon_0>0$和序列$\{\Phi_{h_i}\}$, 使$\|\Phi_{h_i}-\Phi\|\geqslant2\varepsilon_0$, $\forall i=1,2,\cdots$, 且$h_i\to0$当$i\to+\infty$时, 因为$\{\Phi_h\}$是M中的列紧集, 因此$\{\Phi_{h_i}\}$一定有一子列收敛. 为方便计, 不妨就记$\Phi_{h_i}\to\Psi\in M$且$\|\Psi\|\leqslant c/4$. 此时有$\|\Psi-\Phi\|>\varepsilon_0$. 由$M$中范数的定义知存在$p\in H$使$|\Psi(p)-\Phi(p)|>\varepsilon_0$. 又因为

$$|\Phi_{h_i}(p)-\Psi(p)|\to0,\qquad i\to+\infty$$

因此存在$N_1>0$, 当$i>N_1$时, $|\Phi_{h_i}(p)-\Phi(p)|>\varepsilon_0$. 记$x=p+\Phi(p)$. 于是存在$\varepsilon_1>0$, 使当$i>N_1$时

$$d(x,\ l_{h_i})>2\varepsilon_1 \qquad (4.1)$$

取定$T_i=h_i n_i$使T_i小于某个$T>0$, $T_i>T_0=[-\ln(2\varepsilon_1/c)/2]$, 由于$l$对$S(T_i)$是不变的, 因此存在$l$上的点$x_i'$, 使$S(T_i)x_i'=x$, $i=1,2\cdots$.

在区间$[0,T_i]$上, 由欧拉算法计算初值问题

$$\dot{x}=Ax+f(x),\quad x(0)=x_i'$$

当步长$h_i\to0$时, 误差亦趋于零, 因此

$$F_{h_i}^{n_i}x_i'\to x,\qquad i\to+\infty$$

不妨设$i>N_2$时,

$$|F_{h_i}^{n_i}x_i' - x| < \varepsilon_1 \tag{4.2}$$

又由(3.2)知

$$d(F_{h_i}^{n_i}x_i',\ l_{h_i}) \leqslant (1-2h_i)^{n_i} \cdot (c/2) \leqslant (1-2h_i)^{T_0/h_i} \cdot (c/2)$$

因为
$$\lim_{h_i \to 0}(1-2h_i)^{T_0/h_i} = \exp[-2T_0]$$

所以 $\exists N_3 > 0$，当 $i > N_3$ 时

$$d(F_{h_i}^{n_i}x_i', l_{h_i}) \leqslant \exp[-2T_0](c/2) < \varepsilon_1 \tag{4.3}$$

取 $N = \max\{N_1,\ N_2,\ N_3\}$，当 $i > N$ 时，由(4.2)、(4.3)得，$d(x,\ l_{h_i}) < 2\varepsilon_1$.这与(4.1)矛盾.

证毕

由定理4.1立即可得当 $h \to 0$ 时，$l_h \to l$.

参考文献

[1] J. Lorenz, Numerics of invariant manifolds and attractors, in *Chaotic Numerics, Contemporary Mathematics*, 172 (1994), 185—202.

[2] Y. Kuramoto, Chemical Oscillations, *Waves and Turbulence*, Springer-Verlag, New York (1984).

[3] P. Kloeden and J. Lorenz, Stable attracting sets in dynamical systems and in their one-step discretizations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 23(5) (1986), 986—995.

[4] Qian Min, Shen Wenxian and Zhang Jinyan, Global behavior in the dynamical equation of J-J type, *J. Differential Equations*, 71(2) (1988), 315—333.

Convergence of Attractors

Qin Wenxin Liu Zengrong

(Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou 215006; *LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing* 100080, *P. R. China)*

Abstract

The system of coupled oscillators and its time-discretization(with constant stepsize h) are considered in this paper. Under some conditions, it is showed that the discrete systems have one-dimensional global attractors l_h converging to l which is the global attractor of continuous system.

Key words coupled oscillators system, attractor, cone, horizontal curve