应用数学和力学，第18卷 第12期（1997年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

粘弹性与弹性平面问题间的某些恒等关系*

杨 骁[1] 程昌钧[2]

（1996年3月8日收到）

摘 要

本文以应力函数 $F(x_\alpha, t)$为基本未知量，首先建立了各向同性、线性粘弹性平面问题（开孔与不开孔）的基本边值问题；其次，详细讨论了粘弹性与弹性平面问题之间位移和应力的某些恒等关系，得到了若干重要和有意义的结论。作为应用，研究了具有中心微孔的粘弹性平板在单向拉伸时微孔的变形响应。

关键词 粘弹性力学 平面问题 应力函数 恒等关系 积分型本构关系

一、引 言

粘弹性力学平面问题在地学、建筑开挖等工程中具有重要的应用。以往对粘弹性力学问题的研究大都基于粘弹性—弹性相应原理[1,2]，即首先借助于 Laplace 变换将问题化成 Laplace平面上的相应问题并进行求解，然后，再采用 Laplace 逆变换或数值逆变换得到原问题的解。这种做法在理论上虽然是可行的，但在进行 Laplace 逆变换或数值逆变换时往往是比较困难的。本文试图直接建立粘弹性力学平面问题的基本边值问题，并在较深层次上讨论粘弹性与弹性平面问题之间解的若干恒等关系，从而为直接求解粘弹性平面问题奠定理论基础，并可避免繁琐的Laplace逆变换或数值逆变换。首先，基于等温各向同性线性粘弹性理论，讨论了平面应力与平面应变问题。我们看到，当材料的Poisson比ν=const时，两类平面问题在数学上是等价的。并以应力函数$F(x_\alpha, t)$为未知量，建立了粘弹性平面问题（开孔或无孔）的三类基本边值问题。其次，我们详细地讨论了粘弹性和弹性平面问题之间解的某些恒等关系，并在 ν=const 时，得到了一些重要而有意义的结论。根据这些恒等关系和结论，粘弹性平面问题的解可以直接由相应弹性力学问题的解得到，而并不需要进行Laplace逆变换或数值逆变换。

二、粘弹性力学的基本边值问题

设有一均匀等温、各向同性线性粘弹性体，并设其变形是微小的。取笛卡尔坐标系

* 国家和甘肃省自然科学基金资助项目

1 兰州大学力学系，兰州 730000

2 上海大学，上海市应用数学和力学研究所，上海 200072

$Ox_1x_2x_3$，并记位移、应变和应力分别为$u_i(x_m, t)$，$\epsilon_{ij}(x_m, t)$，$\sigma_{ij}(x_m, t)(i, j, m=1, 2, 3)$．若不计体力，则在拟静态情形下，制约粘弹性体变形响应的基本方程为[1]

平衡方程：$\sigma_{ij,j}(x_m, t)=0$ (2.1)

几何方程：$2\epsilon_{ij}(x_m, t)=u_{i,j}(x_m, t)+u_{j,i}(x_m, t)$ (2.2)

本构方程：
$$\begin{cases} e_{ij}(x_m, t)=\int_{-\infty}^{t} J_1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau} s_{ij}(x_m, \tau)d\tau \\ \epsilon_{kk}(x_m, t)=\int_{-\infty}^{t} J_2(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma_{kk}(x_m, \tau)d\tau \end{cases} \tag{2.3}$$

其中，e_{ij}和s_{ij}为应变偏量和应力偏量，$J_1(t)$和$J_2(t)$为蠕变函数．对线性弹性体，若E为弹性模量，ν为Poisson比，则

$$J_1(t)=(1+\nu)/E,\ J_2(t)=(1-2\nu)/E \tag{2.4}$$

设粘弹性物体初始时$(t<0)$处于自然状态，且在$t\geqslant 0$时在边界B_u上给定位移$\bar{u}_i(x_m, t)$，而在边界$B_\sigma=B-B_u$上给定外力$\bar{X}_i(x_m, t)$，则有初始条件和边界条件

$$u_i(x_m, t)=\epsilon_{ij}(x_m, t)=\sigma_{ij}(x_m, t)=0,\qquad -\infty<t<0 \tag{2.5}$$

$$\sigma_{ij}(x_m, t)n_j(x_m, t)=\bar{X}_i(x_m, t),\qquad x_m\in B_\sigma,\ t>0 \tag{2.6a}$$

$$u_i(x_m, t)=\bar{u}_i(x_m, t),\qquad x_m\in B_u,\ t>0 \tag{2.6b}$$

其中，$n_j(x_m, t)$为边界B_σ的单位外法线矢量．

三、平面问题的基本方程和边界条件

为方便起见，下面将隐含未知量对x_m的依赖关系，而只将它们对时间t的关系显式地表出．

1．平面应力问题：考察初始时$(t<0)$处于自然状态且厚度为h的薄板．取Ox_1x_2平面与板的中平面重合，Ox_3垂直于中面并建立坐标系$Ox_1x_2x_3$．设中面所占区域为Ω，边界为Γ，则在通常关于平面应力问题的假设下，有$\sigma_{33}=\sigma_{\alpha 3}=0$，并且

$$\sigma_{\alpha\beta}\equiv\sigma_{\alpha\beta}(x_\gamma, t),\qquad x_\gamma\in\Omega,\ t>0 \tag{3.1}$$

这里和今后，凡下标为希腊字母α，β等取值为1和2．因此，由本构关系(2.3)可得

$$\left.\begin{aligned} &\epsilon_{\alpha\beta}=\int_{0^-}^{t}\left[J_1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma_{\alpha\beta}(\tau)+\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}(J_2(t-\tau)-J_1(t-\tau))\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma_{\gamma\gamma}(\tau)\right]d\tau \\ &\epsilon_{33}=\int_{0^-}^{t}\frac{1}{3}\ [J_2(t-\tau)-J_1(t-\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma_{\gamma\gamma}(\tau)d\tau,\ \epsilon_{\alpha 3}=0 \\ &\qquad\qquad x_\gamma\in\Omega,\ t>0 \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

设中面位移为$u_\alpha(x_\gamma, t)$，则有几何方程

$$\epsilon_{\alpha\beta}(x_\gamma, t)=\frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}(x_\gamma, t)+u_{\beta,\alpha}(x_\gamma, t)),\qquad x_\gamma\in\Omega,\ t>0 \tag{3.3}$$

注意到$\sigma_{33}=\sigma_{\alpha 3}=0$，故平衡方程(2.1)化为

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}(x_\gamma, t)=0,\qquad x_\gamma\in\Omega,\ t>0 \tag{3.4}$$

因此，平面应力问题的基本未知量为u_α，$\epsilon_{\alpha\beta}$和$\sigma_{\alpha\beta}$，基本方程为(3.2)～(3.4)．

2．平面应变问题：考察初始时处于自然状态的无限长等截面柱体．取Ox_1x_2平面与柱体的某一横截面重合，Ox_3轴沿柱体的轴线建立坐标系$Ox_1x_2x_3$．设横截面的区域为Ω，边界

为Γ，则在平面应变问题的通常假设下，有$u_3(x_\gamma,\ t)=0$，$u_\alpha=u_\alpha(x_\gamma,\ t)$。因此，由(2.2)有$\epsilon_{33}=\epsilon_{\alpha 3}=0$，而

$$\epsilon_{\alpha\beta}(x_\gamma,\ t)=\frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}(x_\gamma,\ t)+u_{\beta,\alpha}(x_\gamma,\ t)),\qquad x_\gamma\in\Omega,\ t>0 \tag{3.5}$$

设$\nu=\text{const}$，于是由(2.4)可知，$J_2(t)/J_1(t)=(1-2\nu)/(1+\nu)$。从而可得$\sigma_{\alpha 3}=0$，$\sigma_{33}=\nu\sigma_{\gamma\gamma}$，且

$$\epsilon_{\alpha\beta}=\int_{0^-}^{t}\left[J_1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma_{\alpha\beta}(\tau)-\nu\delta_{\alpha\beta}J_1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma_{\gamma\gamma}(\tau)\right]d\tau \tag{3.6}$$

而平衡方程为

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}(x_\gamma,\ t)=0,\qquad x_\gamma\in\Omega,\ t>0 \tag{3.7}$$

因此，平面应变的基本未知量仍为u_α，$\epsilon_{\alpha\beta}$和$\sigma_{\alpha\beta}$，基本方程为(3.5)～(3.7)。不难看到，若将(3.6)中的$-\nu J_1(t-\tau)$换为$[J_2(t-\tau)-J_1(t-\tau)]/3$，则平面应变问题具有与平面应力问题相同的方程式。同时，在所取坐标系$Ox_1x_2x_3$下，两类平面问题都具有如下边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{\alpha\beta}(x_\gamma,\ t)n_\beta(x_\gamma,\ t)=\bar{X}_\alpha(x_\gamma,\ t),\qquad x_\gamma\in\Gamma_\sigma,\ t>0\\&u_\alpha(x_\gamma,\ t)=\bar{u}_\alpha(x_\gamma,\ t),\qquad x_\gamma\in\Gamma_u=\Gamma-\Gamma_\sigma,\ t>0\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

式中：Γ_σ和Γ_u分别为已知外力$(\bar{X}_\alpha,\ 0)$和已知位移$(\bar{u}_\alpha,\ 0)$的边界部份，n_β为边界外法线，并记τ_α为边界切线矢量。

因此看到，两类平面问题在数学上是等价的，今后我们只讨论平面应力问题。

四、基本边值问题的应力函数表示

1．无孔平板的情况：这时由于Ω是单连通区域，故由平衡方程(3.4)可知，存在应力函数$F(x_\gamma,\ t)$，使得

$$\sigma_{\alpha\beta}(x_\gamma,\ t)=e_{\alpha\gamma}e_{\beta\delta}F_{,\gamma\delta}(x_\gamma,\ t)\qquad x_\gamma\in\Omega,\ t>0 \tag{4.1}$$

其中，$e_{\alpha\beta}$为二维置换张量。由几何方程(3.3)，本构方程(3.2)和(4.1)可得 $F(x_\gamma,\ t)$表示的协调方程

$$\int_{0^-}^{t}[J_2(t-\tau)+2J_1(t-\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}F_{,\alpha\alpha\beta\beta}(x_\gamma,\ \tau)d\tau=0,\qquad x_\gamma\in\Omega,\ t>0 \tag{4.2}$$

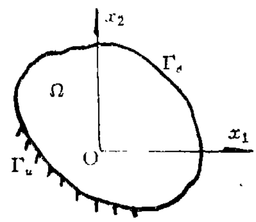

图1　无孔板

利用Titchmarsh定理[1]，有

$$F_{,\alpha\alpha\beta\beta}(x_\gamma,\ t)=0,\qquad x_\gamma\in\Omega,\ t>0 \tag{4.3}$$

可见，与无体力作用时的弹性平面问题相同，应力函数F满足重调和方程。下面考察边界条件，若边界上给定外力，则容易得到

$$\frac{\partial}{\partial s}F_{,\alpha}(x_\gamma,\ t)=e_{\beta\alpha}\bar{X}_\beta(x_\gamma,\ t),\qquad x_\gamma\in\Gamma,\ t>0 \tag{4.4}$$

其中，$\partial/\partial s$表示对沿边界弧长s的导数。若取定边界上的A点(图1)使$F_{,\alpha}(x_\gamma^A,\ t)=F(x_\gamma^A,\ t)=0$，则$\Gamma_\sigma$上的边界条件可表为

$$F(x_\gamma,\ t)=f_0(x_\gamma,\ t),\ \frac{\partial}{\partial n}F(x_\gamma,\ t)=g_0(x_\gamma,\ t),\qquad x_\gamma\in\Gamma_\sigma,\ t>0 \tag{4.5}$$

其中，

$$f_0=e_{\beta\alpha}\int_{x_\gamma^A}^{x_\gamma}\bar{X}_\beta(s,\ t)[x_\gamma-x_\gamma(s)]ds,\quad g_0=-\tau_\beta(x_\gamma,\ t)\int_{x_\gamma^A}^{x_\gamma}\bar{X}_\beta(s,\ t)ds \tag{4.6}$$

为了用应力函数F来表示位移边界条件，必须首先给出位移u_α的积分表达式．记x_γ处线元绕Ox_3轴的转动为$\gamma(x_\gamma,\ t)$，则$\gamma(x_\gamma,\ t)=e_{\alpha\beta}u_{\beta,\alpha}(x_\gamma,\ t)$．于是由(3.4)、(3.2)和(4.1)容易得到

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\gamma}_\alpha(x_\gamma,\ t)\equiv\gamma_{,\alpha}(x_\gamma,\ t)=\int_{0^-}^{t}\frac{2}{3}e_{\gamma\alpha}[2J_1(t-\tau)+J_2(t-\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}F_{,\delta\delta\gamma}(x_\gamma,\tau)d\tau\\&\gamma(x_\gamma,t)=\gamma(x_\gamma^B,t)+\int_{0^-}^{t}\left\{\frac{2}{3}[2J_1(t-\tau)+J_2(t-\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{x_\gamma^B}^{x_\gamma}\omega_\alpha(x_\gamma,\tau)dx_\alpha\right\}d\tau\end{aligned}\right\}\quad(4.7)$$

其中，

$$\omega_\alpha=e_{\delta\alpha}F_{,\eta\eta\delta}(x_\gamma,\ t)\quad(4.8)$$

注意到，$u_{\alpha,\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta}+e_{\beta\alpha}\gamma/2$，则有位移表达式

$$\begin{aligned}u_\alpha(x_\gamma,\ t)=&u_\alpha(x_\gamma^B,\ t)-e_{\alpha\beta}\gamma(x_\gamma^B,\ t)(x_\beta-x_\beta^B)/2\\&-\frac{1}{2}e_{\alpha\beta}x_\beta\int_{x_\gamma^B}^{x_\gamma}\tilde{\gamma}_\eta(x_\gamma,\ t)dx_\eta\\&+\int_{0^-}^{t}\left\{\frac{1}{3}[2J_1(t-\tau)+J_2(t-\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{x_\gamma^B}^{x_\gamma}U_{\alpha\beta}(x_\eta,\ \tau)dx_\beta\right\}d\tau\\&-\int_{0^-}^{t}\left\{J_1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{x_\gamma^B}^{x_\gamma}F_{,\alpha\beta}(x_\eta,\ \tau)dx_\beta\right\}d\tau\end{aligned}\quad(4.9)$$

其中，x_γ^B为边界Γ上B点的坐标（图1），而

$$U_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}F_{,\gamma\gamma}(x_\alpha,\ \tau)+e_{\alpha\theta}x_\theta\omega_\beta(x_\alpha,\ \tau)\quad(4.10)$$

因此，若在边界Γ_u上给定位移，则有边界条件

$$u_\alpha(x_\gamma,\ t)=\bar{u}_\alpha(x_\gamma,\ t),\qquad x_\gamma\in\Gamma_u,\ t>0\quad(4.11)$$

这样，无孔粘弹性平面问题的基本边值问题是求应力函数$F(x_\gamma,\ t)$，使其满足微分方程(4.3)和边界条件(4.5)、(4.11)．

2． 开孔平板的情况：设板所占区域Ω为m连通域，其边界

$$\Gamma=\Gamma^0\ (\text{外边界})+\sum_{i=1}^{m}\Gamma^i\ (\text{内边界})$$

并规定Γ^i的正方向如图2所示．这时，由平衡方程(3.4)确定的应力函数$F(x_\gamma,\ t)$一般是多值的．[4]中证明了一般情况下，$F(x_\gamma,\ t)$有表达式

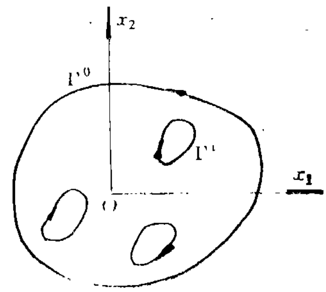

图2 开孔平板

$$F(x_\gamma,\ t)=F^*(x_\gamma,\ t)+\hat{F}(x_\gamma,\ t)\quad(4.12a)$$

其中，F^*为单值函数，而$\hat{F}$为

$$\hat{F}(x_\gamma,\ t)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}(M^i+e_{\alpha\beta}x_\beta T_\alpha^i)\arctan\frac{x_2-x_2^i}{x_1-x_1^i}\quad(4.12b)$$

x_γ^i为边界Γ^i所围区域内的任意一点，并且T_α^i和M^i定义为

$$T_\alpha^i(t)=\oint_{\Gamma^i}X_\alpha^i(x_\gamma,\ t)ds,\quad M^i(t)=\oint_{\Gamma^i}e_{\alpha\gamma}x_\alpha X_\gamma^i(x_\gamma,\ t)ds\quad(4.13)$$

式中，X_α^i为作用在边界Γ^i上的应力矢量，当Γ^i上给定外力$\bar{X}_\alpha^i$时，$X_\alpha^i=\bar{X}_\alpha^i$是已知的．特别若$\bar{X}_\alpha^i$是自身平衡力系时，则$T_\alpha^i=M^i=0$，这时$\hat{F}=0$，因而应力函数$F$是单值的，即$F=F^*$．

同时，对于多连通域Ω，保证单值位移场存在的必要充分条件除协调方程(4.2)外，还有位移单值性条件

$$\oint_{\Gamma^i}\tilde{\nu}_\alpha dx_\alpha=\oint_{\Gamma^i}u_{\alpha,\beta}dx_\beta=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

用应力函数F来表示，这些条件可写成

$$\left.\begin{aligned}&\int_{0^-}^t[2J_1(t-\tau)+J_2(t-\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}\oint_{\Gamma^i}\omega_\alpha(x_\gamma,\ \tau)dx_\alpha d\tau=0\\&\int_{0^-}^t\left\{\frac{1}{3}[2J_1(t-\tau)+J_2(t-\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}\oint_{\Gamma^i}U_{\alpha\beta}(x_\gamma,\ \tau)dx_\beta\right\}d\tau\\&\qquad-\int_{0^-}^t\left\{J_1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\oint_{\Gamma^i}F_{,\alpha\beta}(x_\gamma,\ \tau)dx_\beta\right\}d\tau=0\end{aligned}\right\}\tag{4.14}$$

当(4.14)成立时，位移u_α仍有表达式(4.9)．另外，虽然在给定外力的边界上，应力函数F及其导数$\partial F/\partial n$仍有表达式(4.5)，但由于F可以相差一个任意的线性项$a_\alpha^i(t)x_\alpha+b^i(t)$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$，我们只可以在一个边界上（例如Γ^0上的A^0点）取定$a_\alpha^0(t)$和$b^0(t)$的值，在其它边界Γ^i上的$a_\alpha^i(t)$和$b^i(t)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$要由边值问题的解一併给出．于是我们有如下边界条件：若在整个Γ上给定外力$\bar{X}_\alpha^i$，则有

$$F(x_\gamma,\ t)=f^0(x_\gamma,\ t),\quad \frac{\partial F}{\partial n}=g^0(x_\gamma,\ t),\qquad x_\gamma\in\Gamma^0,\ t>0\tag{4.15a}$$

$$\left.\begin{aligned}&F(x_\gamma,\ t)=f^i(x_\gamma,\ t)+a_\gamma^i(t)x_\gamma+b^i(t),\\&\frac{\partial F}{\partial n}=g^i(x_\gamma,\ t)+a_\alpha^i(t)n_\alpha(x_\gamma,\ t),\end{aligned}\qquad x_\gamma\in\Gamma^i,\ t>0\right\}\tag{4.15b}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned}&f^i(x_\gamma,\ t)=\int_{x_\gamma^i,\Gamma^i}^{x_\gamma}e_{\beta\alpha}\bar{X}_\beta^i(s,\ t)(x_\alpha-x_\alpha(s))ds,\\&g^i(x_\gamma,\ t)=-\tau_\beta\int_{x_\gamma^i,\Gamma^i}^{x_\gamma}\bar{X}_\beta^i(s,\ t)ds,\end{aligned}\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\right\}\tag{4.15c}$$

这时在Γ^i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$上的T_α^i和M^i都是已知的．特别需要指出此时$\hat{F}$完全是确定的．

另外，若在整个边界Γ上给定位移$\bar{u}_\alpha^i$，则有

$$u_\alpha(x_\gamma,\ t)=\bar{u}_\alpha^i(x_\gamma,\ t),\qquad x_\gamma\in\Gamma^i,\ t>0,\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ m)\tag{4.16}$$

式中，$u_\alpha(x_\gamma,\ t)$由(4.9)给定．此时，$\Gamma^i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$上的$T_\alpha^i$和$M^i$都是未知的．

基本边值问题Ⅰ：对于整个边界上给定外力的粘弹性平面问题是求满足微分方程(4.3)、边界条件(4.15)、位移单值性条件(4.14)的应力函数$F^*(x_\gamma,\ t)$以及$3m$个只与时间t有关的函数$a_\alpha^i(t)$和$b^i(t)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$．

基本边值问题Ⅱ：对于整个边界上给定位移的粘弹性平面问题是求满足微分方程(4.3)、边界条件(4.16)的函数$F^*(x_\gamma,\ t)$以及$3m$个只与时间t有关的函数$T_\alpha^i(t)$和$M^i(t)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$。

类似地可以建立混合边值问题——基本边值问题Ⅲ．

五、粘弹性—弹性平面问题间的关系

众所周知，通过 Laplace 变换，线性粘弹性问题与线性弹性问题之间存在对应关系，

这是一种普适的同构关系，称为粘弹性—弹性相应原理[1,2]．这里，我们一般地研究平面问题间的一些特殊恒等关系．

对于无孔平面问题，若边界Γ上给定外力，则边值问题为

$$\left.\begin{aligned}&F_{,\alpha\alpha\beta\beta}(x_\gamma,\ t)=0, \qquad x_\gamma\in\Omega,\ t>0\\&F(x_\gamma,\ t)=f_0(x_\gamma,\ t),\ \frac{\partial F}{\partial n}=g_0(x_\gamma,\ t), \qquad x_\gamma\in\Gamma,\ t>0\end{aligned}\right\}\tag{5.1}$$

此边值问题与相应弹性力学边值问题相同[4]．因此，在给定边界外力的情况下，粘弹性和弹性平面问题有相同的应力函数，因而，对应的应力分量亦相同，但由(4.9)稳定的位移与弹性位移是不同的．

若边界Γ上给定位移，并设Poisson比$\nu=\text{const}$，则此时位移的表达式(4.9)可化为

$$\begin{aligned}u_\alpha(x_\gamma,\ t)&=u_\alpha(x_\gamma^B,\ t)-\frac{1}{2}e_{\beta\alpha}\gamma(x_\gamma^B,\ t)(x_\beta-x_\beta^B)\\&-\frac{1}{2}e_{\alpha\beta}x_\beta\int_{x_\gamma^B}^{x_\gamma}\left\{\int_{0^-}^{t}\frac{2}{1+\nu}J_1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\omega_\eta(x_\gamma,\ \tau)d\tau\right\}dx_\eta\\&+\int_{x_\gamma^B}^{x_\gamma}\left\{\int_{0^-}^{t}\frac{1}{1+\nu}J_1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}[U_{\alpha\beta}(x_\gamma,\ \tau)-(1+\nu)F_{,\alpha\beta}(x_\gamma,\ \tau)]d\tau\right\}dx_\beta\end{aligned}\tag{5.2}$$

令

$$F^e(x_\gamma,\ t)=\int_{0^-}^{t}\frac{E}{1+\nu}J_1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}F(x_\gamma,\ \tau)d\tau\tag{5.3}$$

则由$F(x_\gamma,\ t)$的边值问题不难得到$F^e(x_\gamma,\ t)$的边值问题：

$$\left.\begin{aligned}&F^e_{;\alpha\alpha\beta\beta}(x_\gamma,\ t)=0, \qquad x_\gamma\in\Omega,\ t>0\\&u^e_\alpha(x_\gamma,\ t)=\bar{u}_\alpha(x_\gamma,\ t), \qquad x_\gamma\in\Gamma,\ t>0\end{aligned}\right\}\tag{5.4}$$

其中，$u^e_\alpha(x_\gamma,\ t)$由下式确定

$$\begin{aligned}u^e_\alpha(x_\gamma,\ t)&=u^e_\alpha(x_\gamma^B,\ t)-\frac{1}{2}e_{\alpha\beta}\gamma(x_\gamma^B,\ t)(x_\beta-x_\beta^B)\\&-\frac{1}{E}e_{\alpha\beta}x_\beta\int_{x_\gamma^B}^{x_\gamma}e_{\delta\theta}F^e_{;\eta\eta\delta}(x_\gamma,\ t)dx_\theta\\&+\frac{1}{E}\int_{x_\gamma^B}^{x_\gamma}[\delta_{\alpha\beta}F^e_{;\gamma\gamma}-(1+\nu)F^e_{;\alpha\beta}+e_{\alpha\theta}x_\theta e_{\gamma\beta}F^e_{;\eta\eta\gamma}]dx_\beta\end{aligned}$$

此边值问题与相应弹性平面问题的边值问题相同[4]．因此，给定边界位移$\bar{u}_\alpha$时，粘弹性与弹性平面问题的应力函数间存在关系(5.3)，它们具有相同的边值问题，由此得到的位移相同，但应力是不同的．

对于开孔平面问题，当$\nu=\text{const}$时，由位移单值性条件(4.14)可知，上述结论亦成立．

因此，我们有关于粘弹性和弹性平面问题之间的重要结论：当已知边界外力时，它们有相同的应力函数，应力亦相同，但位移不同；当已知边界位移时，两者的应力函数满足(5.3)，$\nu=\text{const}$，且位移相同，但应力不同；对混合边值问题，若Γ_u上位移边界条件是齐次的，两者应力相同，位移不同，若Γ_σ上应力边界条件是齐次的，两者位移相同，但应力不同．当$\nu\neq\text{const}$时，上述结论一般不成立．因而，可由弹性平面问题的解立即得相应粘弹性问题的解．

六、例

考察初始时处于自然状态的粘弹性平板，在 x(即x_1)方向承受均匀拉力 $p(t)$的作用，在板中心处有一半径为a的小圆孔，圆孔周界不受力(图3)．设$\nu=\text{const}$，则由前述分析可知，此粘弹性板中的应力与弹性应力相同．在极坐标系$(r,\ \theta)$中，有[4]

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{rr}&=\frac{1}{2}p(t)\left[\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\left(1+\frac{3a^4}{r^4}-\frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right]\\ \sigma_{\theta\theta}&=\frac{1}{2}p(t)\left[\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\right]\\ \sigma_{r\theta}&=-\frac{1}{2}p(t)\left[1+\frac{2a^2}{r^2}-\frac{3a^4}{r^4}\right]\sin 2\theta\end{aligned}\right\}\tag{6.1}$$

应力函数为

$$F(r,\ \theta,\ t)=\frac{1}{4}p(t)a^2\left[\left(\frac{r^2}{a^2}-2\ln\frac{r}{a}-1\right)+\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{a^2}{r^2}-2\right)\cos 2\theta\right]\tag{6.2}$$

如果略去刚性位移，则由(5.2)及(6.2)可得板中任意点$(r,\ \theta)$沿Ox和Oy方向的位移

$$\left.\begin{aligned}u(r,\ \theta,\ t)&=a\phi(t)\left[\left(\frac{r}{a}+\frac{2a}{r}\right)\cos\theta+\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{a}{r}-\frac{a^3}{r^3}\right)\cos 3\theta\right]\\ v(r,\ \theta,\ t)&=a\phi(t)\left[-\left(\nu\frac{r}{a}+(1-\nu)\frac{a}{r}\right)\sin\theta+\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{a}{r}-\frac{a^3}{r^3}\right)\sin 3\theta\right]\end{aligned}\right\}\tag{6.3}$$

其中

$$\phi(t)=\int_{0^-}^{t}\frac{1}{1+\nu}J_1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}p(\tau)d\tau\tag{6.4}$$

圆孔$r=a$边上的点$(x,\ y)=(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$变形后的位置为

$$\left.\begin{aligned}x'&=x+u(a,\ \theta,\ t)=a(1+3\phi(t))\cos\theta\\ y'&=y+v(a,\ \theta,\ t)=a(1-\phi(t))\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{6.5}$$

因此，圆孔变形后为一椭圆，其方程为

$$\frac{x'^2}{a^2(1+3\phi(t))^2}+\frac{y'^2}{a^2(1-\phi(t))^2}=1\tag{6.6}$$

可见，当给定材料的蠕变函数$J_1(t)$后，可根据不同的受载过程$p(t)$，利用(6.4)得到 $\phi(t)$，从而得到微孔的形状变化(图3)

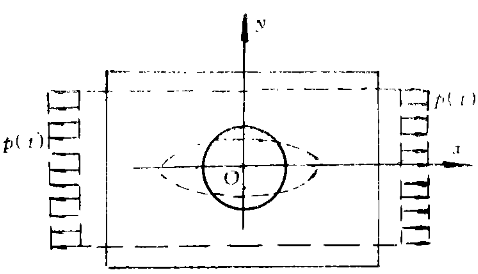

图3 圆孔的变形

参 考 文 献

[1] R. M. Christensen, *Theory of Viscoelasticity*, Academic Press, New York (1982). 《粘弹性力学引论》, 科学出版社, 北京, (中译本) (1990).

[2] 杨挺青, 《粘弹性力学》, 华中理工大学出版社 (1990).

[3] 董克智、薛明德、陆明万, 《张量分析》北京, 清华大学出版社 (1986).

[4] 程昌钧, 《弹性力学》, 兰州, 兰州大学出版社 (1995).

[5] Yang Tingqing, Stress analysis of viscoelastic thick-walled combinatory cylinder, ASME 1984 PVP Conference (1984).

[6] M. K. Miller and W. T. Guy, Jr., Numerical inversion of the Laplace transform by use of Jacobi polynimals, *SIAM J. Nnmer. Anal.*, 3(4) (1966), 624—635.

Some Identity Relations between Plane Problems for Visco- and Elasticity

Yang Xiao

(*Department of Mechanics, Lanzhou Univercity, Lanzhou* 730000, *P. R. China*)

Cheng Changjun

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai* 200072, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, the boundary value problems of plane problems with a simply- or multiply-connected domain for isotropic linear visco-elasticity are first established by terms of Airy stress function $F(x_a,t)$. Secondly, some identity relations between displacements and stresses for plane problems of visco- and elasticity are discussed in detail and some meaningful conclusions are obtained. As an example, the deformation response for viscoelastic plate with a small circular hole at the center is analyzed under a uniaxial uniform extension.

Key words viscoelasticity, plane problem, Airy stress function, identity relation, integral constitutive relation