

# 二次系统奇点的分支问题

张 祥<sup>1</sup>

(林宗池推荐, 1996年 9月 6日收到, 1997年 9月 8日收到修改稿)

## 摘 要

本文研究了(Ⅰ)和(Ⅱ)类的二次系统奇点的分支, 并回答了[1]中提出的问题.

**关键词** 二次系统 发散量 奇点

## 一、引 言

我们考虑型(Ⅰ)和(Ⅱ)的二次系统:

$$\dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + mxy + y^2, \quad \dot{y} = x(1+ax) \quad (1.1)$$

$$\dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + mxy + ny^2, \quad \dot{y} = x(1+ax+by) \quad (1.2)$$

作为解决二次系统分支问题的贡献, 本文研究系统(1.1)和(1.2)奇点的分支, 它的极限环分支是在关于鞍点和非鞍点个数的假设下, 借助 Berlinskii 定理和指标定理被[1-6]所研究. Reyn 和 Kooij<sup>[7]</sup>研究了二次系统无穷远奇点, 特别是高阶奇点的性质. 本文将详细地分析(1.1)和(1.2)的奇点, 特别是无穷远奇点的分支和性质, 并给出(1.1)或(1.2)在直线 $1+ax=0$ 或 $1+ax+by=0$ 上细焦点的三个焦点量的公式, 从而解决了[1]中提出的问题. 进一步, 我们可以获得无穷远高阶奇点产生的机理. 假设 $a \neq 0$ , 不失一般性, 令 $a < 0$ .

## 二、二次系统(Ⅱ)奇点的性质

首先考虑系统(1.1).  $O(0, 0)$ 和 $N(0, 1)$ 是 $y$ 轴上的两个奇点. 当 $(a+m)^2 = 4(l-a\delta)$ , (1.1)有一个高阶奇点 $S(-1/a, (a+m)/2a)$ , 它的特征值是

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{m(a+m) + 2(a\delta - 2l)}{2a}$$

当 $(a+m)^2 > 4(l-a\delta)$ , (1.1)在 $1+ax=0$ 上有两个奇点 $S_i(x_i, y_i)$  ( $i=1, 2$ ) ( $y_1 > y_2$ ),  $N$ 和 $S_2$ 是鞍点,  $O$ 和 $S_1$ 是非鞍点,  $S_1$ 点的特征方程是

$$\lambda^2 - (\delta + 2lx_1 + my_1)\lambda - 1 + mx_1 + 2y_1 = 0 \quad (2.1)$$

如果 $\delta + 2lx_1 + my_1 = 0$ ,  $S_1$ 位于 $\text{div} = 0$ 上, 若还有 $1 - mx_1 - 2y_1 < 0$ ,  $S_1$ 是个细焦点或中心. 当 $m=0$ ,  $\text{div} = 0$ 与 $1+ax=0$ 重合, (1.1)没有极限环, 当 $m \neq 0$ ,  $\text{div} = 0$ 与 $1+ax=0$ 在

1 南京师范大学数学系, 南京 210024

$S_1(-1/a, (2l-a\delta)/ma)$ 点相交. 令

$$D = -\frac{ma}{m(a+m)+2(a\delta-2l)} = \frac{-1}{1-mx_1-2y_1} > 0$$

作变换  $x = \bar{x} + x_1, y = \bar{y} + y_1, \bar{x} = \bar{x}, \bar{y} = -\sqrt{D}\bar{y}, d\bar{t} = \sqrt{D}d\bar{t}$ . 为了方便起见, 仍用  $x, y, t$  代替  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}$ , (1.1) 成为

$$\dot{x} = -y + l\sqrt{D}x^2 - mDxy + D\sqrt{D}y^2, \dot{y} = x(1-ax) \tag{2.2}$$

从[5]我们可以获得下列

定理1 系统(1.1)在(细焦点)  $S_1$ 的三个焦点量是

$$W_1 = -mD(l+D) + 2al$$

$$W_2 = ma(-5a+mD)[D^2(l+D)^2 - a^2(2l+D)]$$

$$W_3 = -ma^2[2a^2+D^2(l+2D)][D^2(l+D)^2 - a^2(2l+D)]$$

(1.1)的无穷远奇点  $P(1, y, 0)$ 的  $y$ 坐标和特征值满足

$$f(y) = y^3 + my^2 + ly - a = 0 \tag{2.3}$$

$$\lambda_1 = -a/y, \lambda_2 = -(3y^2 + 2my + l) = -f'(y) \tag{2.4}$$

当  $l < -m/3$  (或  $> -m/3$ ),  $f(y)$  是凸 (或凹) 的, 故当  $l=0$  时, 我们有下列图1.

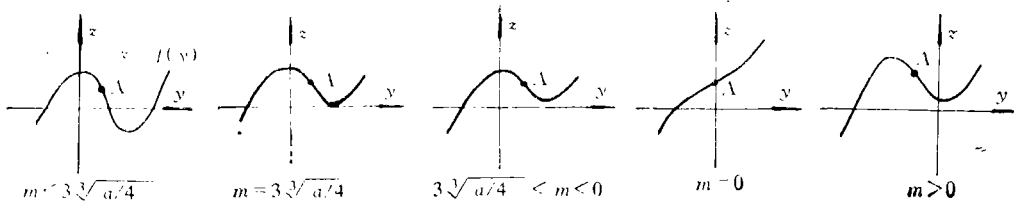


图 1

其中  $A$  是拐点,  $y_A = -m/3$ . 当  $l > 0$ , 如果  $m^2 < 3l$ , (2.3) 无极值点. 由于  $f(0) = -a > 0$ , (2.3) 只有一个负根. 如果  $m^2 > 3l$ , (2.3) 有极值点  $y^* = (-m + \sqrt{m^2 - 3l})/3$  和  $y^{**} = (-m - \sqrt{m^2 - 3l})/3 < y^*$ .

$$f(y^*) = \frac{2m^3 - 9ml - 2(m^2 - 3l)\sqrt{m^2 - 3l} - a}{27} \triangleq g(m) \tag{2.5}$$

由于  $g'(m) = (m - \sqrt{m^2 - 3l})^2/9 > 0, g(-\sqrt{3l}) = l\sqrt{3l}/9 - a > 0, g(-\infty) = -\infty$ , 存在  $m^* < -\sqrt{3l}$  使得 (2.3) 当  $m = m^*$  时有两个根, 当  $m < m^*$  时有三个根 (见图2a). 当  $m \geq \sqrt{3l}$ , 由于  $g(\sqrt{3l}) = -l\sqrt{3l}/9 - a > 0$  (或 =, 或  $< 0$ ) 对于  $l < 0$  (或 =, 或  $> 0$ )  $3\sqrt[3]{a^2}$ , 因此当  $l < 3\sqrt[3]{a^2}$ , 对  $m > \sqrt{3l}, f(y^*) > 0$  (见图2b). 当  $l > 3\sqrt[3]{a^2}$ , 由于

$$f(y^{**}) = \frac{2m^3 - 9ml + 2(m^2 - 3l)\sqrt{m^2 - 3l} - a}{27} \triangleq \bar{g}(m) \tag{2.6}$$

$$\bar{g}' = \frac{(m + \sqrt{m^2 - 3l})^2}{9} > 0, f\left(-\frac{m}{3}\right) = \frac{2m^3 - 9ml}{27} - a \triangleq \bar{g}(m), \bar{g}'(m) = \frac{2m^2 - 3l}{9} > 0$$

(当  $m^2 - 3l \geq 0$ ). 存在  $m_1 > \sqrt{3l}$  使得  $\bar{g}(m_1) = 0, f(-m_1/3) < 0$ , 当  $m > m_1, \bar{g}(m) > 0$ . 由于  $\bar{g}(+\infty) = +\infty$ , 存在  $m_2 > m_1$  使得  $f(-m_2/3) = 0, f(y^*) < 0, f(y^{**}) > 0$ . 从(2.5)我们知道存在  $m_3 > m_2$  使得当  $m = m_3, f(y^*) = 0$ , 当  $m > m_3, f(y^*) > 0$  (见图2d). 当  $l = 3\sqrt[3]{a^2}, m = \sqrt{3l}, y = \sqrt[3]{a}$  是(2.3)的三重根, 类似上述分析, 存在  $\bar{m} > \sqrt{3l}$  使得当  $m \geq \sqrt{3l}$ , 我们有图2c,

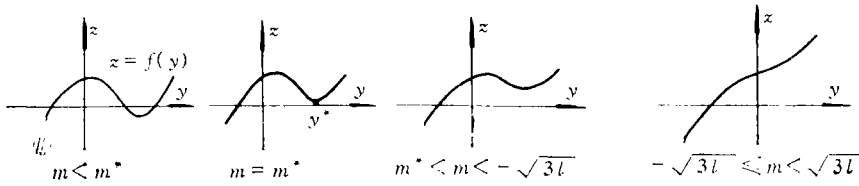


图2a ( $m < \sqrt{3l}$ )

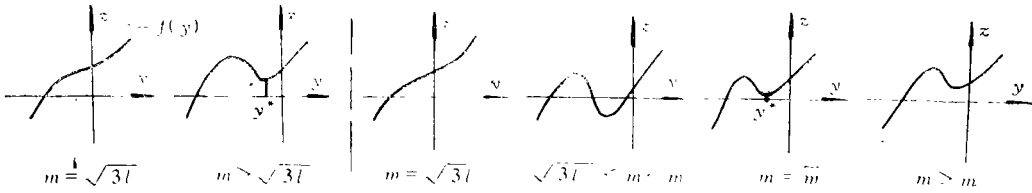


图2b ( $l < 3\sqrt[3]{a^2}$ )

图2c ( $l = 3\sqrt[3]{a^2}$ )

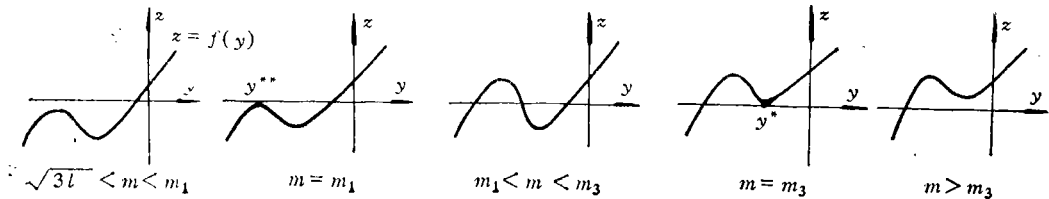


图2d ( $l > 3\sqrt[3]{a^2}$ )

当  $l < 0$ ,  $m = 0$ , 如果  $l =$  (或  $>$ , 或  $<$ )  $-3\sqrt[3]{a^2}/4$ ,  $f(y^*) =$  (或  $<$ , 或  $>$ )  $0$ . 由  $g'(m) > 0$ , 对任意固定的  $l < 0$ , 存在  $m^* =$  (或  $>$ , 或  $<$ )  $0$  使得当  $m = m^*$ ,  $f(y^*) = 0$ , 当  $m > m^*$ ,  $f(y^*) > 0$ . 我们有图3. 结合图1, 2, 3和(2.4), 我们有

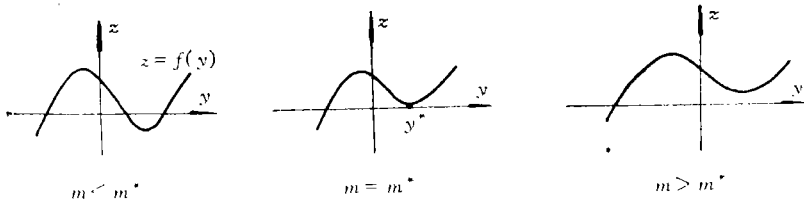


图3 ( $l < 0$ )

**定理2** 系统(1.1)无穷远奇点有下列性质:

(I) 当  $l = 0$ , 系统(1.1)当  $m < 3\sqrt[3]{a^2}/4$  时有一个稳定结点(SN)  $P_1(1, y_1, 0)$ , 一个不稳定结点(UN)  $P_2(1, y_2, 0)$  和一个鞍点(SA)  $P_3(1, y_3, 0)$  ( $y_1 < 0 < y_2 < y_3$ ); 当  $m = 3\sqrt[3]{a^2}/4$  时有一个稳定结点  $P_1$  和一个鞍结点(SAN)  $P_2(y_1 < 0 < y_2)$ ; 当  $m > 3\sqrt[3]{a^2}/4$  时有一个稳定结点  $P_1(y_1 < 0)$ ;

(II) 当  $l > 0$ , 对于  $m < \sqrt{3l}$ , 存在  $m^* < -\sqrt{3l}$  使得 (I) 中的结论当用  $m^*$  代替  $3\sqrt[3]{a^2}/4$  时是正确的. 对于  $m \geq \sqrt{3l}$ , 如果  $l < 3\sqrt[3]{a^2}$ , (1.1) 有一个稳定结点  $P_1(y_1 < 0)$ ; 如果  $l = 3\sqrt[3]{a^2}$ , 存在  $\bar{m} > \sqrt{3l}$  使得 (1.1) 当  $m = \sqrt{3l}$  时有一个三重奇点, 当  $\sqrt{3l} < m < \bar{m}$  时有两个稳定结点  $P_1$

和  $P_3$ , 一个鞍点  $P_2(y_1 < y_2 < y_3 < 0)$ , 当  $m = \bar{m}$  时有一个稳定结点  $P_1$  和一个鞍结点  $P_2(y_1 < y_2 < 0)$ , 当  $m > \bar{m}$  时有一个稳定结点  $P_1(y_1 < 0)$ ; 如果  $l > 3\sqrt[3]{a^2}$ , 存在  $m_1 > m_2 > \sqrt{3l}$  使得 (1.1) 当  $\sqrt{3l} \leq m < m_1$  时有一个稳定结点  $P_1(y_1 < 0)$ ; 当  $m = m_1$  时有一个稳定结点  $P_1$  和一个鞍结点  $P_2(y_2 < y_1 < 0)$ ; 当  $m_1 < m < m_3$  时有两个稳定结点  $P_1$  和  $P_2$ , 一个鞍点  $P_2(y_1 < y_2 < y_1 < 0)$ ; 当  $m = m_3$  时有一个鞍结点  $P_2$  和一个稳定结点  $P_3(y_3 < y_2 < 0)$ ; 当  $m > m_3$  时有一个稳定结点  $P_3$ ;

(Ⅲ) 当  $l < 0$ , 存在  $m^* = (>, 或 <) 0$  对于  $l = (>, 或 <) -3\sqrt[3]{a/4}$  使得 (1.1) 当  $m < m^*$  时有一个稳定结点  $P_1$ , 一个不稳定结点  $P_2$  和一个鞍点  $P_3(y_1 < 0 < y_2 < y_3)$ ; 当  $m = m^*$  时有一个稳定结点  $P_1$  和鞍结点  $P_2(y_1 < 0 < y_2)$ ; 当  $m > m^*$  时有一个稳定结点  $P_1(y_1 < 0)$ .

利用无穷大分界线环<sup>[6]</sup>的性质, 我们有

**推论** 系统 (1.1) 不能有无穷大分界线环.

**注1** 系统 (1.1) 的高阶无穷远奇点至多是指标为 0 的鞍结点, 或者是指标为 1 的三重奇点, 它是由两个稳定结点和一个鞍点重合形成的.

### 三、二次系统(Ⅲ)奇点的性质

我们现在考虑系统 (1.2), (1.2) 在  $1 + ax + by = 0$  上奇点  $S(x_0, y_0)$  的  $x$  坐标满足

$$(na^2 + b^2l - mab)x^2 + (2an + ab - mb + b^2\delta)x + n + b = 0 \quad (3.1)$$

$S$  的特征值  $\lambda$  满足

$$\lambda^2 - [\delta + (2l + b)x_0 + my_0]\lambda + x_0[b(\delta + 2lx_0 + my_0) - a(-1 + mx_0 + 2ny_0)] = 0 \quad (3.2)$$

令  $D^{-1} = x_0[b(\delta + 2lx_0 + my_0) - a(-1 + mx_0 + 2ny_0)]$ . 当  $D < 0$  (或  $D > 0$ , 或  $D = 0$ ),  $S$  是一个鞍点 (结点, 或焦点, 或高阶奇点). 当  $D > 0$ ,  $\delta + (2l + b)x_0 + my_0 = 0$ ,  $S$  位于  $\text{div} = 0$  上, 它是一个细焦点或中心. 当  $ma - b(b + 2l) = 0$ ,  $1 + ax + by = 0$  与  $\text{div} = 0$  重合, (1.2) 无极限环. 当  $ma - b(b + 2l) \neq 0$ ,

$$x_0 = \frac{\delta b - m}{ma - b(b + 2l)}, \quad y_0 = \frac{b + 2l - a\delta}{ma - b(b + 2l)}$$

由于  $S$  是一个细焦点或中心,  $x_0 \neq 0$ . 令  $x = \bar{x} + x_0$ ,  $y = \bar{y} + y_0$ ,  $w = \bar{y}$ ,  $z = a\bar{x} + b\bar{y}$ ,  $z = \bar{x}$ ,  $w = x_0 \sqrt{D} \bar{y}$ ,  $dt = \sqrt{D} d\bar{t}$ , (1.2) 变成

$$\frac{dx}{dt} = -y + a^{-1}(b + l)\sqrt{D}x^2 + a^{-1}Mx_c Dxy + a^{-1}Nx_0^2 D\sqrt{D}y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = x(1 + a^{-1}x_0^{-1}x - a^{-1}b\sqrt{D}y)$$

其中  $M = ma - b^2 - 2bl$ ,  $N = a^2n - mab + b^2l$ . 从 [5, § 12] 我们有

**定理3** 系统 (1.2) 在细焦点  $S_1$  的三个焦点量是

$$W_1 = x_0^{-1}[Mx_0^2 D(b + l + x_0^2 DN) - (b + 2l)],$$

$$W_2 = x_0^{-1}M(5 - N)[x_0^2 D(b + l + N)^2(N - b) - (b + 2l + N)],$$

$$W_3 = x_0^{-1}M[2 + x_0^2 DN(b + l + 2N)][x_0^2 D(b + l + N)^2(N - b) - (b + 2l + N)].$$

最后, 我们考虑 (1.2) 的无穷远奇点. 当  $n \neq 0$ , 不失一般性, 令  $n = 1$ , (1.2) 的无穷远奇点  $P(1, y, 0)$  的  $y$  坐标和特征值满足

$$f(y) = y^3 + my^2 + (l - b)y - a = 0 \quad (3.3)$$

$$\lambda_1 = -a/y - b, \lambda_2 = -(3y^2 + 2my + l - b) = -f'(y) \tag{3.4}$$

当  $m^2 - 3(l - b) > 0$ ,  $f(y) = 0$  有两个极值点

$$y^* = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 3(l - b)}}{3}, y^{**} = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 3(l - b)}}{3}$$

$$f(y^*) = \frac{2m^3 - 9m(l - b) - 2[m^2 - 3(l - b)]\sqrt{m^2 - 3(l - b)}}{27} - a \triangleq g(m)$$

$$f(y^{**}) = \frac{2m^3 - 9m(l - b) + 2[m^2 - 3(l - b)]\sqrt{m^2 - 3(l - b)}}{27} - a \triangleq \bar{g}(m)$$

当  $l - b = 0$ , (3.3) 中  $f(y)$  的位置能够显示在图 1 中。系统 (1.2) 当  $m < 3\sqrt[3]{a/4}$  时有三个奇点  $P_1(1, y_1, 0)$ ,  $P_2(1, y_2, 0)$  和  $P_3(1, y_3, 0)$  ( $y_1 < 0 < y_2 < y_3$ )；当  $m = 3\sqrt[3]{a/4}$  时有两个奇点  $P_1$  和  $P_0(y_1 < 0 < y_0 = -2\sqrt[3]{a/4})$ ；当  $m > 3\sqrt[3]{a/4}$  时有一个奇点  $P_1(y_1 < 0)$ 。

1.  $b > 0$ , 从图 1 和 (3.4) 知,  $P_1$  是稳定结点。当  $m < 3\sqrt[3]{a/4}$ ,  $f(-2\sqrt[3]{a/4}) < 0$ , 从而,  $0 < y_2 < -2\sqrt[3]{a/4} < y_3$ 。由于  $\lambda_1^{(2)} = \sqrt[3]{4a^2/2} - b$  当  $m = 3\sqrt[3]{a/4}$ , 我们有

i) 当  $b = \sqrt[3]{4a}/2$ ,  $m = 3\sqrt[3]{a/4}$ ,  $\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} = 0$ ；当  $m < 3\sqrt[3]{a/4}$ ,  $\lambda_1^{(2)} > 0$ ,  $\lambda_2^{(2)} > 0$ ,  $\lambda_1^{(3)} < 0$ ,  $\lambda_2^{(3)} < 0$ , 即 (1.2) 当  $m < 3\sqrt[3]{a/4}$  时有两个稳定结点  $P_1, P_3$  和一个不稳定结点  $P_2$ ；当  $m = 3\sqrt[3]{a/4}$  时有一个稳定结点  $P_1$  和高阶奇点  $P_0$ , 它是由不稳定结点  $P_2$  和稳定结点  $P_3$  重合形成的 (记为 US)；当  $m > 3\sqrt[3]{a/4}$  时有一个稳定结点  $P_1(y_1 < 0)$ 。相应的结果如图 4。

ii) 当  $b > \sqrt[3]{4a^2}/2$ ,  $m = 3\sqrt[3]{a/4}$ ,  $\lambda_1^{(2)} < 0$ ,  $\lambda_2^{(2)} = 0$ 。由于  $y_2 \rightarrow 0^+$  当  $m \rightarrow -\infty$ , 存在  $m^* < 3\sqrt[3]{a/4}$  使得  $\lambda_1^{(2)} = 0$ 。因此, 我们可以获得图 5。

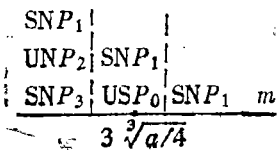


图 4

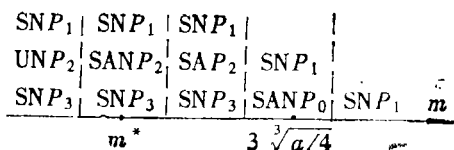


图 5

利用 Berlinskii 定理和指标定理, 相应图 5 我们有图 6。

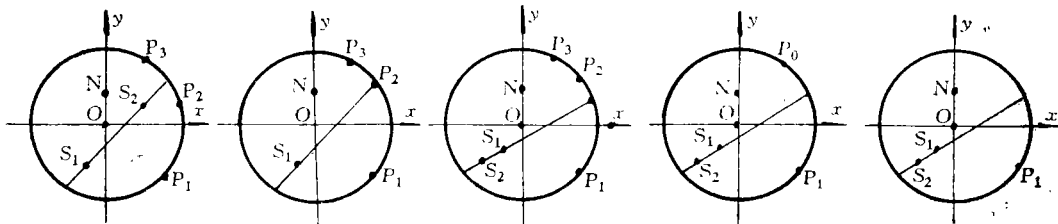


图 6

iii) 当  $0 < b < \sqrt[3]{4a^2}/2$ ,  $m = 3\sqrt[3]{a/4}$ ,  $\lambda_1^{(2)} > 0$ ,  $\lambda_2^{(2)} = 0$ 。当  $m \rightarrow -\infty$ ,  $y_0 \rightarrow +\infty$ , 存在  $m^* < 3\sqrt[3]{a/4}$  使得  $\lambda_1^{(3)} = 0$ 。从 (3.4) 我们有



当  $l-b < 0$ , 由于  $z=f(y)$  的两个极值点 ( $y^{**} < y^*$ ) 位于  $z$  轴的两边,  $g'(m) > 0$ , 故当  $l-b >$  (或  $=$ , 或  $<$ )  $-3\sqrt[3]{a^2/4}$ , 存在  $m^* <$  (或  $=$ , 或  $>$ )  $0$  使得当  $m <$  (或  $=$ , 或  $>$ )  $m^*$ ,  $f(y^*) <$  (或  $=$ , 或  $>$ )  $0$ , 我们有显示  $z=f(y)$  位置的图 11.

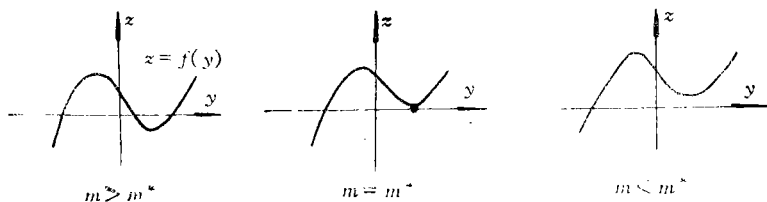


图 11

显然, 当  $m <$  (或  $=$ , 或  $>$ )  $m^*$ , 系统 (1.2) 有三个 (两个, 或一个) 无穷远奇点.

1.  $l-b = -3\sqrt[3]{a^2/4}$

i)  $b > 0$ ,  $P_1$  是稳定结点, 当  $m=0, b = (>, \text{或} <) \sqrt[3]{2a^2}$ ,  $\lambda_2^{(2)} = 0, \lambda_1^{(2)} = -3a/\sqrt{3(b-l)}$   $-b = (<, \text{或} >) 0$ . 由于当  $m < 0, f(\sqrt{3(b-l)}/3) < 0$ , 我们有  $0 < y_2 < \sqrt{3(b-l)}/3 < y_3$ . 因此, 当  $b = \sqrt[3]{2a^2}, m < 0, P_2$  是不稳定结点,  $P_3$  是稳定结点. 相应的结论如图 12.

如果  $b > \sqrt[3]{2a^2}$ , 当  $m < 0, P_3$  是稳定结点, 且存在  $\bar{m} < 0$  使得当  $m = \bar{m}, \lambda_1^{(2)} = 0$ , 或当  $m < \bar{m}, \lambda_1^{(2)} > 0$ , 我们有图 13.

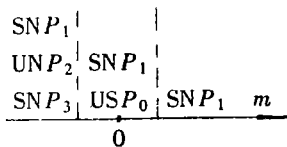


图 12

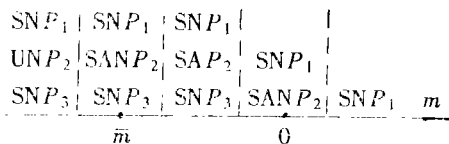


图 13

如果  $0 < b < \sqrt[3]{2a^2}$ ,  $P_2$  是不稳定结点, 且存在  $\bar{m} < 0$  使得当  $m = \bar{m}, \lambda_1^{(3)} = 0$ , 或当  $m < \bar{m}, \lambda_1^{(3)} < 0$ , 即图 14.

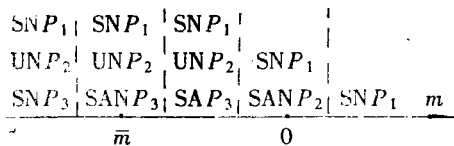


图 14

ii)  $b < 0$ , 当  $m < \bar{m}, P_2$  是不稳定结点,  $P_3$  是鞍点; 当  $m=0, P_2$  是鞍点 ( $\lambda_1^{(2)} > 0, \lambda_2^{(2)} = 0$ ). 由于当  $m \rightarrow +\infty (-\infty), y_1 \rightarrow -\infty (0^-)$ , 类似于  $b-l=0$  的分析, 存在  $\bar{m} = \bar{m}(a, b)$  使得当  $m < \bar{m}, P_1$  是稳定结点, 当  $m = \bar{m}, P_1$  是鞍点 ( $\lambda_1^{(1)} = 0, \lambda_2^{(1)} < 0$ ), 当  $m > \bar{m}, P_1$  是鞍点.

2.  $l-b > -3\sqrt[3]{a^2/4}$

i)  $b > 0$ , 相应于  $y^* < (= \text{或} >) -a/b$  (即当  $m = m^*, \lambda_1^{(2)} > (= \text{或} <) 0$ ), 我们有图 15.

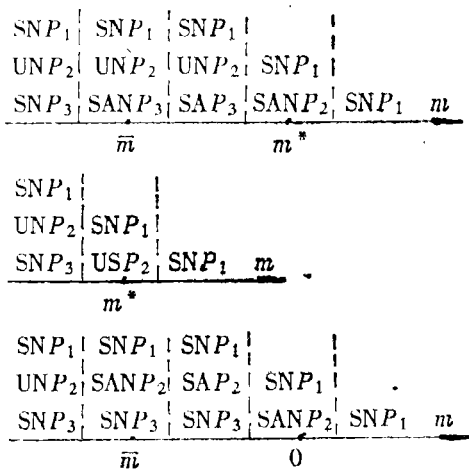


图 15

ii)  $b < 0$ , 当  $m < m^*$ ,  $P_2$  是不稳定结点,  $P_3$  是鞍点, 当  $m = m^*$ ,  $P_2$  是鞍结点 ( $\lambda_1^{(2)} > 0$ ,  $\lambda_2^{(2)} = 0$ ). 由于当  $m \rightarrow +\infty (-\infty)$ ,  $y_1 \rightarrow -\infty (0^-)$ , 存在  $\bar{m} = \bar{m}(a, b, l)$  使得当  $m < \bar{m}$ ,  $P_1$  是稳定结点, 当  $m = \bar{m}$ ,  $P_1$  是鞍结点 ( $\lambda_1^{(1)} = 0, \lambda_2^{(1)} < 0$ ), 当  $m > \bar{m}$ ,  $P_1$  是鞍点.

当  $l - b > 0$ , 由于  $g'(m) > 0$ , 当  $m = -\sqrt{3(l-b)} \triangleq -\tilde{m}$ ,  $f(-m/3) = [3(l-b)]^{3/2}/27 - a > 0$ , 当  $m \rightarrow -\infty$ ,  $f(y_1) \rightarrow -\infty$ , 存在  $m^* < -\tilde{m}$  使得当  $m = m^*$ ,  $f(y_1) = 0$ , 当  $m = \tilde{m}$ ,  $l - b < (=, \text{或} >) 3\sqrt[3]{a^2}$ ,  $f(-m/3) = -[3(l-b)]^{3/2}/3 - a > (=, \text{或} <) 0$ . 对于  $l - b < 3\sqrt[3]{a^2}$ , 当  $m > \tilde{m}$ ,  $f(y^*) > 0$ , 由于  $g'(m) > 0, \bar{g}'(m) > 0$ , 我们有图 16a.

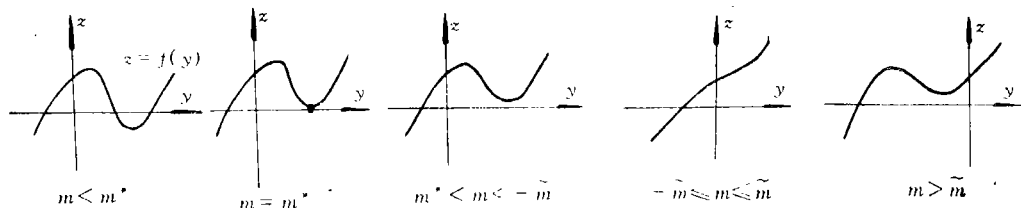


图 16a

对于  $l - b = 3\sqrt[3]{a^2}$ ,  $y = \sqrt[3]{a}$  是 (3.3) 的三重根, 类似于图 2b, 当  $m < \tilde{m}$ ,  $z = f(y)$  的位置如图 16a, 当  $m \geq \tilde{m}$ , 存在  $\bar{m} > \tilde{m}$ , 使得图 16b 成立.

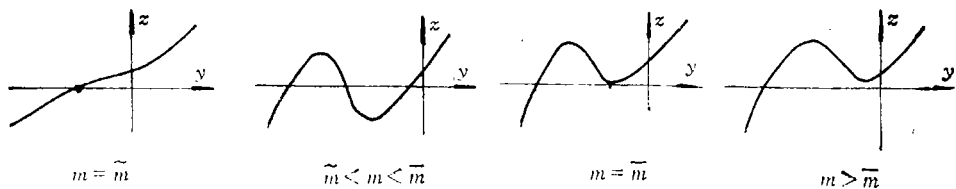


图 16b

i)  $b < 0$ , 当  $l - b < 3\sqrt[3]{a^2}$ ,  $m < m^*$ ,  $P_2$  是不稳定结点,  $P_3$  是鞍点, 当  $m = m^*$ ,  $P_2$  是鞍结点. 由于  $m \rightarrow +\infty (-\infty)$ ,  $y_1 \rightarrow -\infty (0^-)$ , 当  $y^* < (=, \text{或} >) -a/b$ , 即  $\lambda_1^{(1)} > (=, \text{或} <) 0$ ,



存在  $\bar{m}^* < (=, \text{或}) m^*$  使得当  $m < \bar{m}$ ,  $P_1$  是稳定结点, 当  $m = \bar{m}$ ,  $P_1$  是鞍结点, 当  $m > \bar{m}$ ,  $P_1$  是鞍点. 当  $l-b = 3\sqrt[3]{a^2}$ ,  $m = \bar{m}$ ,  $P_1 (y_1 < 0)$  是三重奇点. 当  $m = \bar{m}$ , 如果  $y_2 = -a/b$ , 则当  $\bar{m} < m < \bar{m}$ ,  $P_1$  是鞍点,  $P_2$  是不稳定结点,  $P_3$  是稳定结点; 当  $m = \bar{m}$ ,  $P_1$  是鞍点,  $P_2$  是高阶奇点; 当  $m > \bar{m}$ ,  $P_1$  是鞍结点. 如果当  $m = \bar{m}$ ,  $y_2 < -a/b$ , 即  $\lambda_1^{(2)} > 0$ , 存在  $m' (\bar{m} < m' < \bar{m})$  使得当  $m > \bar{m}$ ,  $P_1$  是鞍点; 当  $\bar{m} < m < \bar{m}$ ,  $P_2$  是不稳定结点,  $m = \bar{m}$ ,  $P_2$  是高级奇点; 当  $m < m'$ ,  $P_3$  是鞍点,  $m = m'$ ,  $P_3$  是鞍结点,  $m' < m < \bar{m}$ ,  $P_3$  是稳定结点. 当  $m = \bar{m}$ , 如果  $y_2 > -a/b$ , 即  $\lambda_1^{(2)} < 0$ , 当  $\bar{m} < m < \bar{m}$ ,  $P_3$  是SN; 如果当  $\bar{m} < m < \bar{m}$ ,  $\lambda_1^{(2)} \neq 0$ ,  $P_2$  是SA, 当  $m = \bar{m}$ ,  $P_2$  是SAN;  $P_1$  的性质可以类似  $l-b < 3\sqrt[3]{a^2}$  的情况讨论, 如果存在  $m'' (\bar{m} < m'' < m)$  使得  $\lambda_1^{(2)} = 0$ , 则当  $m > \bar{m}$ ,  $P_1$  是SA; 当  $\bar{m} < m < m''$ ,  $P_2$  是UN,  $m = m''$ ,  $P_2$  是SAN,  $m'' < m < \bar{m}$ ,  $P_2$  是SA,  $m = \bar{m}$ ,  $P_2$  是SAN; 当  $\bar{m} < m < \bar{m}$ ,  $P_3$  是SN.

ii)  $b < 0$ , 当  $l-b < 3\sqrt[3]{a^2}$ ,  $P_1$  是SN; 如果当  $m = m^*$ ,  $y^* < -a/b$ , 则当  $m < m^*$ ,  $P_2$  是UN, 且存在  $\bar{m} < m^*$  使得当  $m < \bar{m}$ ,  $P_3$  是SN; 当  $m = \bar{m}$ ,  $P_3$  是SAN; 当  $m > \bar{m}$ ,  $P_3$  是SA. 类似地, 对于  $y^* = -a/b$  (或  $> -a/b$ ), 我们有相应的结果. 因此, 对于  $y^* < (=, \text{或}) -a/b$ , 相应的分支图如图15. 当  $l-b = 3\sqrt[3]{a^2}$ ,  $P_1$  是三重奇点 (当  $m = \bar{m}$ ); 当  $\bar{m} < m < \bar{m}$ ,  $P_1$  是SN,  $P_2$  是SA,  $P_3$  是SN; 当  $m = \bar{m}$ ,  $P_1$  是SN,  $P_2$  是SAN; 当  $m > \bar{m}$ ,  $P_1$  是SN.

对于  $l-b > 3\sqrt[3]{a^2}$ , 令  $m' = \sqrt{3(l-b)}$ , 类似图2, 我们有图17.

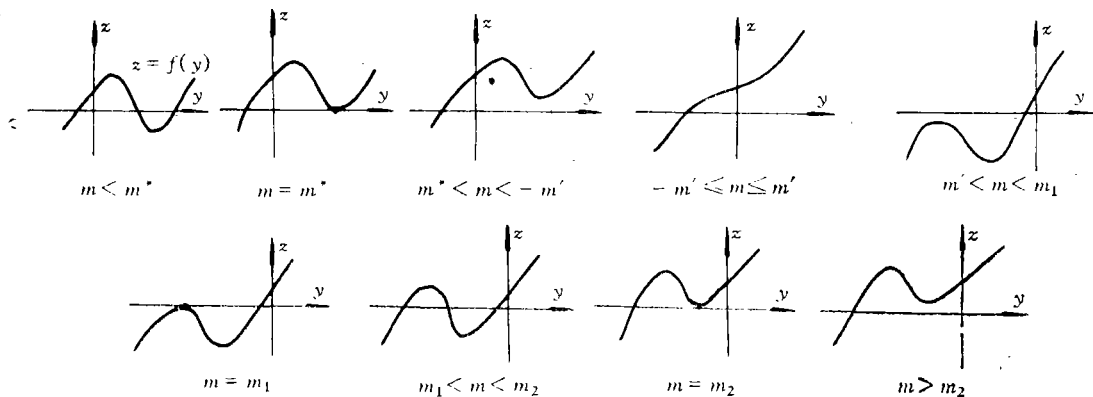


图 17

当  $l-b > 3\sqrt[3]{a^2}$ , 如果  $b > 0$ ,  $m > m^*$ , 我们有图18.

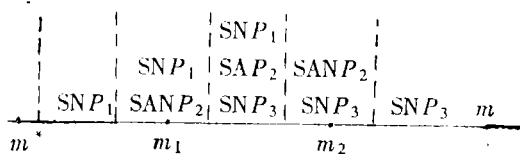


图 18

其中  $m_2 > m_1 > \sqrt{3(l-b)}$ ,  $y_3 \leq y_2 \leq y_1$ . 对于  $m \leq m^*$ , 相应的结论如  $l-b < 3\sqrt[3]{a^2}$  的情况 (ii).

如果  $b < 0$ , 当  $m < m^*$ ,  $P_2$  是UN,  $P_3$  是SA ( $0 < y_2 < y_3$ ); 当  $m = m^*$ ,  $P_2$  是鞍结点. 由于

$$(y_i)'_m = -\frac{y_i^2}{3y_i^2 + 2my_i + (l-b)} \quad (i=1, 2, 3)$$

当  $m < m_2$ ,  $y_1$  单调减, 当  $m = m_2$  (或  $m_1$ ),  $y_1$  (或  $y_3$ ) 与  $y_2$  重合, 当  $m_1 < m < m_2$ ,  $y_2$  单调增加, 当

$m > m_2$ ,  $y$  单调减.

当  $m = m_2$ , 如果  $\lambda_1^{(1)} = 0$ , 即  $y_1 = -a/b$ ,  $m_2 = 3a/2b + b(l-b)/2a$ , 由于当  $m < m_2$ ,  $y_1 > -a/b$ ,  $y_2, y_3 < -a/b$ . 我们有  $\lambda_1^{(1)} < 0$ ,  $\lambda_1^{(2)} > 0$ ,  $\lambda_1^{(3)} > 0$ , 即图 19.

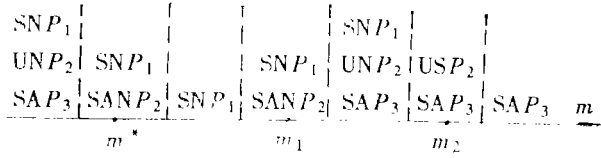


图 19

当  $m = m_2$ , 如果  $\lambda_1^{(1)} > 0$ , 令  $y_2 = \bar{y}$ , 由于当  $m_1 < m < m_2$ ,  $y_3 < y_2 < \bar{y}$ , 当  $m = m_1$ ,  $y^{**} \triangleq \bar{y} < \bar{y}$ , 当  $m > m_2$ ,  $y_3 > \bar{y}$ . 由于当  $m \rightarrow -\infty$ ,  $y_1 \rightarrow 0^-$ , 存在  $\bar{m}$  使得当  $m < \bar{m}$ ,  $P_1$  是 SN; 当  $m = \bar{m}$ ,  $P_1$  是 SAN, 当  $\bar{m} < m < m_2$ ,  $P_1$  是鞍点, 关于  $P_2, P_3$  有图 20.

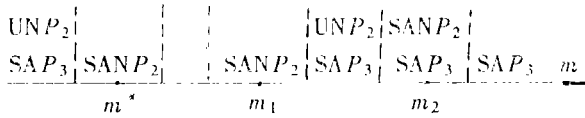


图 20

当  $m = m_2$ , 如果  $\lambda_1^{(1)} < 0$ , 当  $m < m_2$ ,  $P_1$  是 SN. 如果当  $m = m_1$ ,  $m_1 = 3a/2b + b(l-b)/2a$ ,  $\lambda_1^{(2)} = 0$ , 我们有图 21.

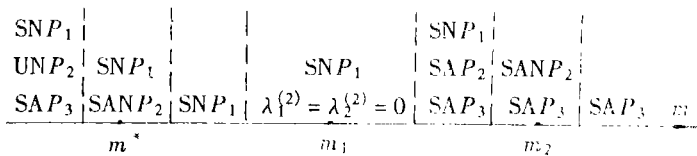


图 21

当  $m = m_1$ ,  $\lambda_1^{(2)} > 0$ , 存在  $\bar{m} (m_1 < \bar{m} < m_2)$  使得  $\lambda_1^{(2)} = 0$  (当  $m = \bar{m}$ ), 类似地, 我们有图 22.

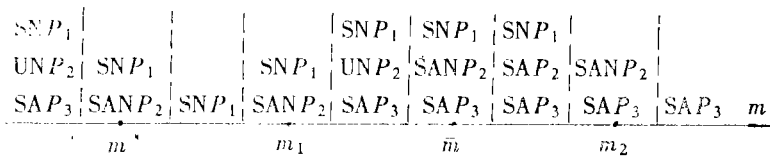


图 22

当  $m = m_1$ ,  $\lambda_1^{(2)} < 0$ , 由于当  $m \rightarrow +\infty$ ,  $y_3 \rightarrow -\infty$ , 存在  $\bar{m} > m_1$  使得当  $m_1 < m < \bar{m}$ ,  $P_3$  是稳定结点; 当  $m = \bar{m}$ ,  $P_3$  是鞍结点; 当  $m > \bar{m}$ ,  $P_3$  是鞍点. 其中  $\bar{m} < m_2$  (或  $\bar{m} = m_2$ , 或  $\bar{m} > m_2$ ) 都是可能的. 图 23 给出  $\bar{m} < m_2$  的结论.

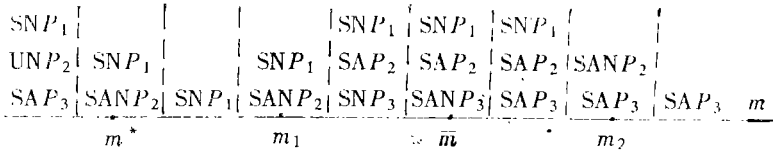


图 23

注2 类似于图6, 7, 9, 相应于无穷远奇点分支, 我们可以获得所有奇点的位置图。这在研究 LC 分支是极其有用的。

系统(1.2)当 $n=0$ 的无穷远奇点 $P(x, 1, 0)$ 的 $x$ 坐标和特征值满足

$$f(x) = ax^3 - (b+l)x^2 - mx = 0 \tag{3.5}$$

$$\lambda_1 = -3ax^2 + 2(b+l)x + m = -f'(x), \lambda_2 = -ax^2 - bx \tag{3.6}$$

当 $b+l(>, \text{或} <)0$ ,  $(x, z)$ 平面上 $z=f(x)$ 的位置如图24.

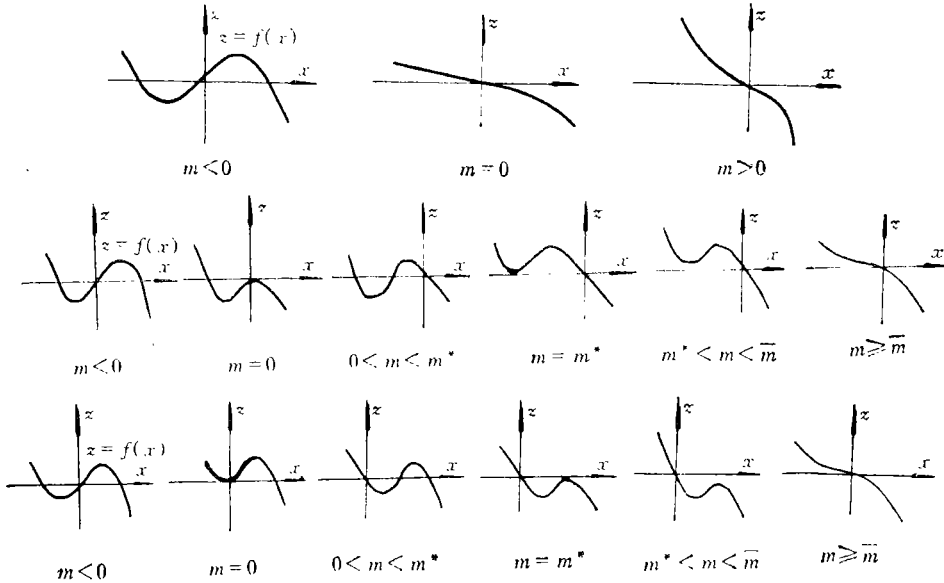


图 24

其中 $m^* = -(b+l)^2/4a$ ,  $\bar{m} (> m^*)$ 是某个常数.

1.  $b+l=0$

i)  $b>0$ ,  $P_1(x_1, 1, 0)$  ( $x_1 < 0$ )是不稳定结点, 当 $m < 0$ ,  $P_2(0, 1, 0)$ 点有 $\lambda_1^{(2)} < 0$ ,  $\lambda_2^{(2)} = 0$ , 当 $m < b^2/a$ ,  $P_3(x, 1, 0)$  ( $x > 0$ )是不稳定结点; 当 $m = b^2/a$ , 是鞍结点, 当 $b^2/a < m < 0$ ,  $P_3$ 是鞍点. 当 $m=0$ (或 $m > 0$ ),  $\lambda_1^{(2)} = 0$ (或 $\lambda_1^{(2)} > 0$ ),  $\lambda_2^{(2)} = 0$ .

ii)  $b < 0$ ,  $P_2$ 是不稳定结点, 当 $m < 0$ ,  $\lambda_1^{(2)} < 0$ ,  $\lambda_2^{(2)} = 0$ , 当 $m < b^2/a$ (或 $m = b^2/a$ ),  $P_1$ 是不稳定结点(或鞍结点), 当 $b^2/a < m < 0$ ,  $P_1$ 是鞍点, 当 $m=0$ (或 $m > 0$ ),  $\lambda_1^{(2)} = 0$ (或 $\lambda_1^{(2)} > 0$ ),  $\lambda_2^{(2)} = 0$ .

2.  $b+l > 0$

i)  $b > 0$ , 存在 $m^* > 0$ 使得分支图25成立.



对于  $b < -1/2$ , 当  $m=0$ ,  $\lambda_2^{(1)} < 0$ , 由于当  $m \rightarrow -\infty$ ,  $x_1 \rightarrow -\infty$ , 当  $m > 0$ ,  $[(b+l)/a] < x_1 < x_3 < 0$ , 我们有图30.

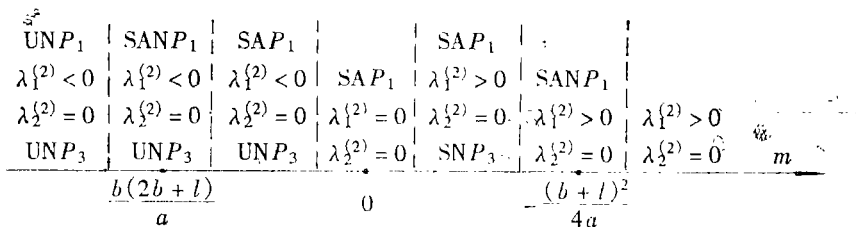


图 30

3.  $b+l < 0$ , 当  $m < 0$ , (1.2) 有三个无穷远奇点(ICPs)  $P_1(x_1, 1, 0)$ ,  $P_2(0, 1, 0)$ ,  $P_3(x_3, 1, 0)$  ( $x_1 > 0 > x_3$ ), 当  $m=0$ ,  $m^*$ , (1.2) 有两个ICPs  $P_1, P_2$  ( $x_1 > 0$ ), 当  $0 < m < m^*$ , (1.2) 有三个ICPs  $P_1, P_2$  和  $P_3$  ( $x_1 > x_3 > 0$ ).

i)  $b < 0$ , 对于  $x_i > 0$ ,  $\lambda_2^{(1)} > 0$ . 则有图31.

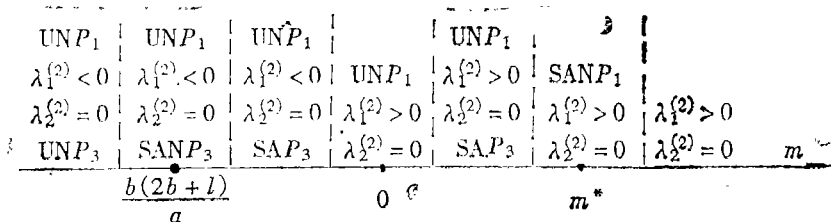


图 31

ii)  $b > 0$ , 当  $m < 0$ ,  $P_1$  是不稳定结点. 由于当  $m=0$  (或  $m < 0$ ),  $x_1 = (b+l)/a$  (或  $x_1 > (b+l)/a$ ), 当  $m \rightarrow -\infty$ ,  $x_1 \rightarrow +\infty$ , 当  $m > 0$ ,  $(b+l)/a > x_1 > x_3 > 0$ . 当  $b > -1/2$ ,  $\lambda_2^{(1)} < 0$ ,  $\lambda_2^{(3)} < 0$ , 相应的结论如图30.

当  $b = -1/2$ ,  $m=0$ ,  $\lambda_2^{(1)} = 0$ , 相应的结论如图28.

当  $b < -1/2$ ,  $m=0$ ,  $\lambda_2^{(1)} > 0$ , 由于当  $m < 0$ ,  $x_1 > (b+l)/a$ , 从(3.6)知, 当  $m \leq 0$ ,  $P_1$  是不稳定结点. 当  $b = -1/3$ ,  $m = -b^2/a$ , 由于  $b(2b+l)/a = -(b+l)^2/4a$ ,  $\lambda_2^{(1)} = 0$ , 相应的结论如图26.

当  $b \neq -1/3$ ,  $b(2b+l)/a < -(b+l)^2/4a$ , 对于  $-1/3 < b < -1/2$ , 当  $m = b(2b+l)/a$ ,  $x_1 = 0$ , 我们有图32.

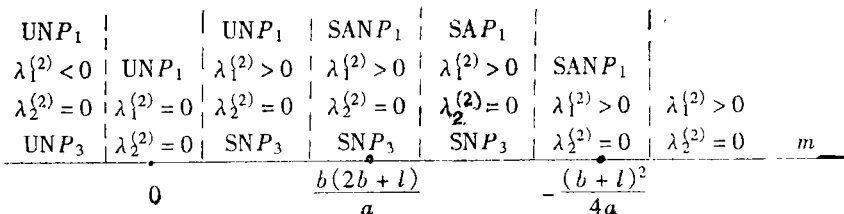


图 32

对于  $b < -1/3$ , 当  $m = b(2b+1)/a$ ,  $x_3 > 0$ , 我们有图 33.

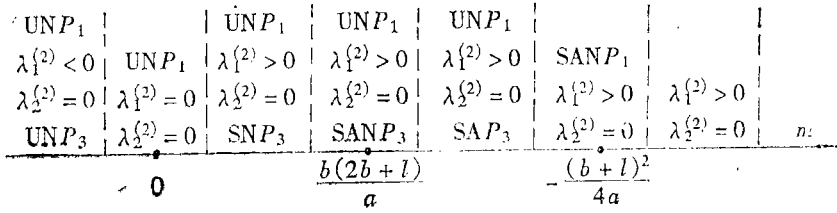


图 33

参 考 文 献

- [ 1 ] Ye Yanqian, Qualitative theory of the quadratic differential systems ( I ), *Chin. Ann. Math.* ( to appear )
- [ 2 ] Ye Yanqian, Limit cycles and bifurcation phenomena for the quadratic differential system ( II )<sub>m=0</sub> having three anti-saddle ( I ), *Chin. Ann. Math.*, **17B** ( 2 ) ( 1996 ), 167—174.
- [ 3 ] A. Zegeling, Separatrix cycles and multiple limit cycles in a class of quadratic systems, *J. Diff. Eqns.*, **113**( 2 ) ( 1994 ), 355—380.
- [ 4 ] F. Dumortier, R. Roussarie and C. Rousseau, Hilbert's 16th problem for quadratic vector fields, *J. Diff. Eqns.*, **110**( 1 ) ( 1994 ), 86—133.
- [ 5 ] Ye Yanqian and others, Theory of limit cycles, *Trans. Math. Monographs*, Amer. Math. Soc., **66** ( 1986 ).
- [ 6 ] Ye Yanqian, *Qualitative Theory of Polynomial Differential Systems*, Shanghai Science Technical Publisher, Shanghai ( 1995 ).
- [ 7 ] J. W. Reyn and R. E. Kooij, Infinite singular points of quadratic systems in the plane, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, **24**( 6 ) ( 1995 ), 895—927.

## Bifurcation Problem of Critical Points for Quadratic Differential Systems

Zhang Xiang

( Department of Mathematics, Nanjing Normal University, Nanjing  
21002A, P. R. China )

Abstract

In this paper the bifurcation of critical points for the quadratic systems of type ( I ) and ( II ) are investigated, and an answer to the problem given in [ 1 ] is given.

Key words quadratic system, divergence, critical point