

弹塑性有限变形力学的反逆渐近解法*

陈 至 达¹

(1996年3月25日收到, 1997年5月20日收到修改稿)

摘 要

最近几十年中, 近代力学的非线性有限变形理论在概念与方法上有许多重要的进展([1],[2],[3]等)。本文旨在说明自然拖带系描述法与Stokes-陈分解定理如何结合反逆渐近解法于有效解答弹塑性有限变形力学问题应用至工程设计目的。文中举半平面冲压大变形为典型数值解例。

关键词 有限变形 弹塑性力学 计算方法 反逆渐近法

一、引 言

采用计算机方法于解答工程问题, 其准确性首先依赖所用理论的可靠性。虽然有限元法在工程应用中已取得很大成功, 然而由于可变形体力学经典理论的局限性, 当位移大的时候, 计算结果出现了不能允许的误差。在本文中, 我们将引入有限变形的数学准确理论的概念与方法, 并应用于解答弹塑性力学问题。在本文中的理论表述是基本的, 使之易为工程师接受。

二、理论, 实验, 和计算机模拟

力学理论的基本假设总是基于事实与实验归纳建立的。但数学理论并不在所有情况真实表达所有事实, 假设是常有的。在这方面, 各种线性和非线性连续体力学理论常赋以应用上的限制。首先, 我们比较在现有文献中各种应变定义的可行性。这里给出一个数例, 便于直观比较 (见图1)。

设有一自然单元物质, 由 $abcd$ 移至 $\underline{a}\underline{b}\underline{c}\underline{d}$, 沿 (x, y) 方向位移为 u, v :

	a	b	c	d
u	0	-2.53	1.11	1.05
v	10.0	4.50	3.20	8.95

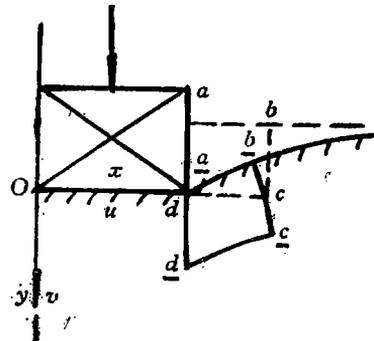


图 1

* 本文主要部份曾在第一届工程计算与计算机仿真国际会议上报告, 湖南长沙, 1995, 11月27~29日

¹ 中国矿业大学北京研究生部, 北京 100083

应用差分算法, 结果示于表1.

表 1

类 型	应 变 度 量	平均整旋角
Green有限应变 (SS)	$G_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]$ $G_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]$ $G_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u \partial u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v \partial v}{\partial x \partial y} \right]$ $\begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{yx} & G_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0423 & -0.145 \\ -0.146 & -0.0831 \end{bmatrix}$	无共轭的转动定义
极分解定理定义的 有限应变和有限转动 (RS-SR) F=RU	$\operatorname{tg} \theta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) / \left(2 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ $\varepsilon_{xx} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial x} \sin \theta - 1$ $\varepsilon_{yy} = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta - 1$ $\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sin \theta$ $\varepsilon_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \theta = \varepsilon_{xy}$ $U^{-1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0303 & -0.152 \\ -0.152 & -0.246 \end{bmatrix}$	$\theta = -24.3^\circ$
(RS-SR) F=VR	$\operatorname{tg} \theta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) / \left(2 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ $\varepsilon_{xx}' = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos \theta - \frac{\partial v}{\partial x} \sin \theta - 1$ $\varepsilon_{yy}' = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta - 1$ $\varepsilon_{xy}' = \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \theta$ $\varepsilon_{yx}' = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \sin \theta = \varepsilon_{xy}'$ $(V^{-1}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}' & \varepsilon_{xy}' \\ \varepsilon_{yx}' & \varepsilon_{yy}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.105 & -0.1495 \\ -0.1495 & -0.0358 \end{bmatrix}$ <p>应变度量的非唯一性 $V \neq U$</p>	$\theta = -24.3^\circ$
Stokes-陈分解定理 定义的有限应变与 有限转动 (S-R) F=S+R	$\sin \Theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial s_1} - \frac{\partial u}{\partial s_2} \right)$ $S_1^1 = \frac{\partial u}{\partial s_1} + (1 - \cos \Theta)$ $S_2^2 = \frac{\partial v}{\partial s_2} + (1 - \cos \Theta)$ $S_2^1 = S_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial s_1} + \frac{\partial u}{\partial s_2} \right)$ $ds_1 = \sqrt{g_{11}} dx^1, \quad ds_2 = \sqrt{g_{22}} dx^2$ <p>g_{11}, g_{22}: 尺规张量. x^1, x^2: 拖带坐标. s_1, s_2: 沿 x^1, x^2 方向弧长.</p> $\begin{bmatrix} S_1^1 & S_2^1 \\ S_1^2 & S_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.101 & -0.164 \\ -0.164 & -0.0347 \end{bmatrix}$	$\Theta = -23.5^\circ$

续表

类型	应变度量	平均整旋角
Cauchy 定义的微小应变与平均整旋角 (古典) $F=S+R$	$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ $S_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad S_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $S_{xy} = S_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ $\begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.124 & -0.121 \\ -0.121 & -0.118 \end{bmatrix}$ S-R分解的线性化公式, 当形变与转动大时引起大的误差	$\theta = -20.3^\circ$

在表1中可见由极分解定理定义的有限应变 e , e' 是非唯一的。

我们可以证明

$$U=V$$

存在只当变换为各向同性扩张和转动的情况。应变与平均转动角根据Stokes 和陈分解定理所定义者是唯一的, 它合理地描述变形的几何图象, 可以很好地用于有限变形的工程问题分析。

依据新理论可以建立一个称为〈非线性尺规方法〉(nonlinear gauge method), 这是所谓剩余法中的反逆渐近解法借助计算机实现。计算方案安排如下:

- (1) 先给出以数学参数形式的位移试函数(根据实验数据, 满足几何条件等)。
- (2) 计算机模拟, 寻找最优位形。
- (3) 理论实证与修正。由平衡条件校核其剩余值。
- (4) 回归至(1), 直到结果满足允许的条件。

三、自然拖带单元, 非线性尺规

今选择二重参考系:

- (1) 空间固定系 $\{X^1, X^2, X^3\}$ 。
- (2) 嵌含在变形体中的自然拖带系 $\{x^1, x^2, x^3\}$ 。

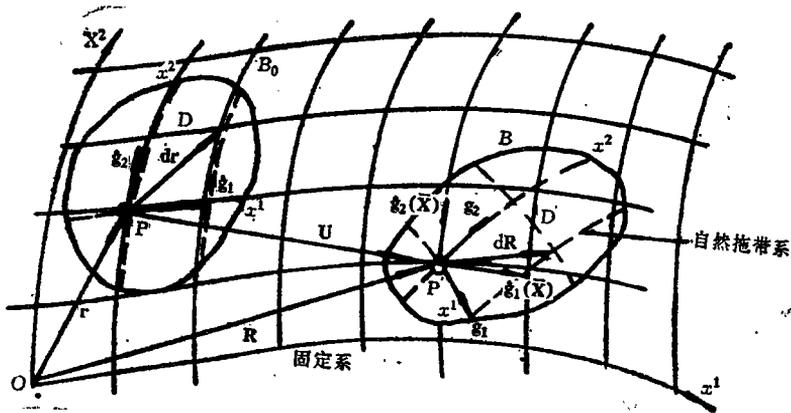


图 2

假设一个物体 B_0 在时间 t_0 变换至 B 在时间 t 。令 $\{x^i\}$ 系在初始时刻和 $\{X^i\}$ 同胚，即当 $t=t_0$ 时， $x^i=X^i$ ， x^i 称为 Lagrange 坐标或拖带坐标。一点 $P(r)$ 移至 $P'(R)$ ， $u(r)$ 为位移，

$$R=r+u \quad (3.1)$$

在一个自然单元 D 内一点 P 的邻域 (图2)

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x^i} dx^i = \hat{g}_i dx^i, \quad ds_0^2 = \hat{g}_i \cdot \hat{g}_j dx^i dx^j = \hat{g}_{ij} dx^i dx^j \quad (3.2)$$

ds_0 为 dr 的长度。在本文中采用了张量记法。

设存在一个变换： $P(X^i) \rightarrow P'(\bar{X}^i)$

$$\bar{X}^i = \bar{X}^i(x^1, x^2, x^3; t) \quad (3.3)$$

于是 D 中的 dr 变为 D' 中的 dR ，

$$dR = \frac{\partial R}{\partial x^i} dx^i = g_i dx^i, \quad ds^2 = g_i \cdot g_j dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j \quad (3.4)$$

\hat{g}_i 与 g_i 为变形前后在变形体中一点的基标矢量。

同时 dR 矢量可以在当地固定参考系分解，

$$dR = \hat{g}_{ij}(\bar{X}) d\bar{X}^j, \quad ds^2 = \hat{g}_{ij}(\bar{X}) d\bar{X}^i d\bar{X}^j \quad (3.5)$$

上式中 $\hat{g}(\bar{X})$ 指形变状态在一点 \bar{X} 的基标矢量。

$$ds^2 = \hat{g}_{ij}(\bar{X}) \frac{\partial \bar{X}^i}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{X}^j}{\partial x^q} dx^p dx^q \quad (3.6)$$

由方程式(3.4)与(3.6)，我们有

$$g_{pq} = \hat{g}_{ij}(\bar{X}) \frac{\partial \bar{X}^i}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{X}^j}{\partial x^q} \quad (3.7)$$

如果 $\{X^i\}$ 系是卡氏坐标系， g_{pq} 的计算可以简化，因

$$\hat{g}_{ij}(\bar{X}) = \hat{g}_{ij}(X) = \delta_{ij}, \quad g_{pq} = \frac{\partial X^i}{\partial x^p} \frac{\partial X^j}{\partial x^q} \quad (3.8)$$

$$\bar{X}^i = x^i + u^i \quad (3.9)$$

$$g_{pq} = \left(\delta_p^i + \frac{\partial u^i}{\partial x^p} \right) \left(\delta_i^j + \frac{\partial u^j}{\partial x^q} \right) \quad (3.10)$$

由方程式(3.10)，如位移函数已知，有限单元的尺规可求出，于是应用 S-R 分解定理，所有的几何信息：应变 S_j^i ，平均整旋角 Θ ，转轴方位参数 L_j^i 容易直接准确求得。

四、非线性尺规方法的计算编程 (平面形变)

求解问题的计算程序列出如下 (平面形变)：

(1) 采用自然拖带元方法设立物体在形变状态的位移试函数。函数的优化选择可以根据在某一基准载荷下的实验或真实情况确定。一般而言，为计算简单化，常取固定空间标架为卡氏标架。位移函数包含几个适当的参数：

$$u^i = u^i(x^1, x^2, C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_n) \quad (i=1, 2) \quad (4.1)$$

一般而言， C_i 为时间的函数， x^i 为拖带坐标。

(2) 在设立 u^i 函数时，有关的几何对称、反对称，和位移限制在某些定点与定平面的条件应在数学式中表现出来。

(3) 应用计算机模拟，调整参数使得形变状态最佳接近真实状态。数值和计算机技巧

应充分考虑。

(4) 计算 \mathbf{u} 在自然拖带系的导数

$$[\partial u^i(x^1, x^2, \hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots, \hat{C}_i, \dots, \hat{C}_n) / \partial x^j] \quad (4.2)$$

\hat{C}_i 指选取的优化值。

(5) 计算场尺规函数 (尺规张量的分量)

$$[g_{ij}(x^1, x^2, \hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots, \hat{C}_i, \dots, \hat{C}_n)] \quad (4.3)$$

(6) 计算有限应变分量和平均整旋角, 在二维情况, 转轴垂直于平面。其物理分量为

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}_1^1 &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + (1 - \cos\Theta), & \hat{S}_2^2 &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + (1 - \cos\Theta) \\ \hat{S}_2^1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \right) \\ \sin\Theta &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u^2}{\partial x^1} - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

(7) 如应变场之值不合理, 返至(3)或(1)。

(8) 计算应变强度 k , k 定义为

$$k^2 = \hat{\nu}^i \hat{\nu}^i, \quad \hat{\nu}^i = \hat{S}^i - \frac{1}{3} \delta^i S^a \quad (4.5)$$

(9) 计算塑性状态参数 β 。

应力偏量 τ 和应变偏量 γ 定义为 (均为物理分量):

$$\tau^i = \sigma^i - \frac{1}{3} \delta^i \sigma^k, \quad \gamma^i = S^i - \frac{1}{3} \delta^i S^k \quad (4.6)$$

又定义 τ 和 γ 增量的强度:

$$(dq)^2 = d\tau^i d\tau^i, \quad (de)^2 = d\gamma^i d\gamma^i \quad (4.7)$$

引用增量弹塑性定律⁽¹⁾, 我们有

$$\tau^i = 2\mu(1-\beta)\dot{\gamma}^i \quad (\beta < 1) \quad (4.8)$$

μ 是弹性常数, β 是塑性状态参数, (\cdot) 指对时间的变化率, (∇) 指在实时位形的真实应力增量。根据方程式(4.7)与(4.8), 我们得到

$$2\mu(1-\beta) = \frac{dq}{de}, \quad \beta = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dq}{de} \right) - 1 \quad (4.9)$$

利用以上关系, 由 (dq/de) 的实验数值 (单轴拉伸或压缩试验) 可以求出 β 值。 $\beta-k$ 关系示于图3。

(10) 应用下列公式计算自然拖带单元的应力增量,

$$d\sigma^i = 2\mu(1-\beta) \left[ds^i + \left(\frac{1}{2B(1-\beta)} - \frac{1}{3} \right) ds_k^k \delta^i \right] \quad (4.10)$$

上式中 B 系材料体积变化的模量。对于岩石材料, B 可能独立于弹性模量。

(11) 藉助于数值方法, 调整在边界上不能满足应力条件的自然单元的尺规。

(12) 在接触区的外负荷应用反逆法求出。

(13) 回到(1), 继续加载 (形变)。

平衡方程的剩余值被用来评估通过计算机模拟所得渐近的准确度。在通常的 FEM, 平

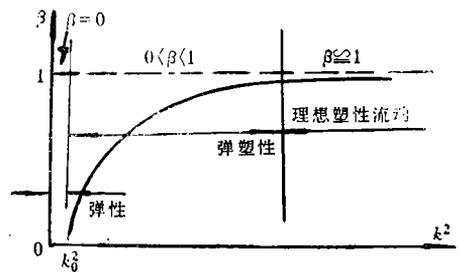


图 3

衡方程是通过变分原理弱满足的。

五、刚性冲压的弹塑性大变形问题

为了阐明本文在工程问题中的应用，我们举半平面上刚性冲压非线性大变形接触力学为典型例。这里是一个数值计算例，不涉及特殊材料（金属、岩石或塑料）。

首先一步是建立形变场的模型：给出以自然拖带坐标 (x, y) 为变量的水平和垂直位移函数 u, v ：

$$U = \delta_1(x, y) \cdot g \cdot x \cdot [\exp(-C_1 x^2 - C_2 y) - \exp(-C_1 a^2)]$$

$$\delta_1(x, y) = \begin{cases} +1 & (|x| \leq a) \\ -1 & (|x| > a) \end{cases} \quad (5.1)$$

$$V = f \{ \exp(-C_3 x^2 + C_4 y) [1 - \delta_2(x, y) \exp(-C_5 y)] + \delta_2(x, y) \exp(-C_5 y - C_6 a^2) \}$$

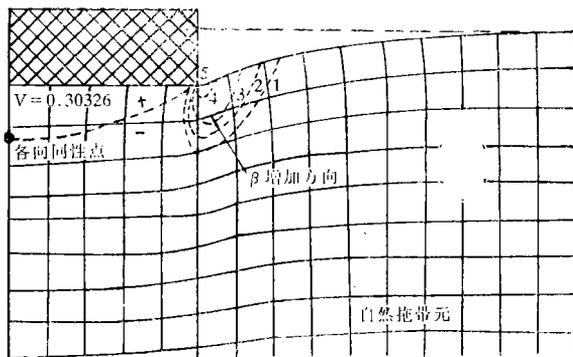
$$\delta_2(x, y) = \begin{cases} +1 & (|u| \leq a) \\ 0 & (|u| > a) \end{cases} \quad (5.2)$$

以上二式满足几何边界条件以及对称和反对称条件。在方程式中， f, g 为系数， $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ 将按计算机模拟调整的参数。 a 是冲压块宽度的半长。 C_i 各量可为时间变量。

C_i 值的选取有无穷多种可能。第一种合理的选择是按Moire图象^[4]（云纹法实验）用计算机仿真取得的一组数据：

$$f/g = 0.5/0.1, C_1 = 0.5, C_2 = 1.5, C_3 = 0, C_4 = 0.8, C_5 = 1.5$$

计算结果示于图4。



k^2 : 1 0.05; 2 0.10; 3 0.15; 4 0.50; 5 0.66

图 4

所有其他项目的计算均可按具体公式求出。

由已得结果可导出一些和实验相合的有趣结论：

(1) 塑性区是先由压块角点进入，假若压块是刚性水平，计算结果指明在初始阶段，中点并不附着（见图5）。如压块是可变形的，则在很大变形阶段，方程式(5.1)，(5.2)应修正使表现双向接触变形，反映实际接触情况。

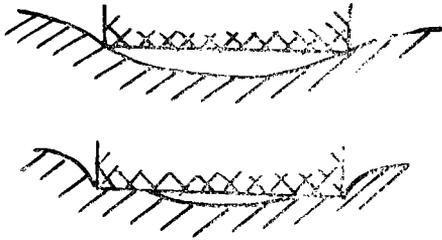


图 5

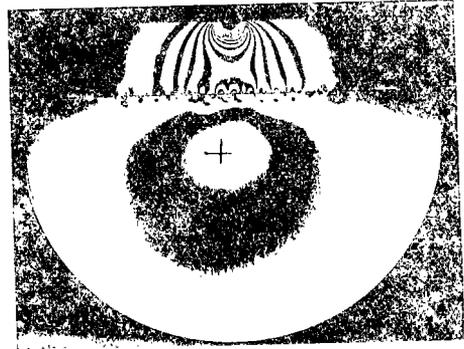


图 6

(2) 在正中截面下方出现一个各向同性点, $\sigma_x^z = \sigma_y^z$, (见图 6 中, 光测弹性力学等差线的各向同性点)。

(3) 因为角点的塑性大变形, 以致受压区的弹性回弹呈中部向上凸起之势。为了获得压块离开后受压成形为水平面, 压块的表面应呈向下凸的形势, 其曲率可由本方法初步估算。

六、结 束 语

因受到理论的限制, 采用各种有限元算法求解接触问题的完全答案是困难的。新的非线性尺规方法打开了一条新路, 利用计算机模拟来解答大变形接触问题具有高度潜力和灵活性。但必须注意, 计算机软件可能将位移函数的奇异性光滑掉, 数据处理因此是必须的。严格的数学理论正在研究中。

参 考 文 献

- [1] 陈至达, 《有理力学》, 中国矿业大学出版社, 徐州 (1988).
- [2] 陈至达, 《杆、板、壳大变形理论》, 科学出版社, 北京 (1994).
- [3] P. Li and Z. D. Chen, The updated co-moving coordinate formulation of continuum mechanics based on the S-R decomposition theorem, *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 114 (1994), 21—34.
- [4] E. M. Cegal, etc., *Research on Plastic Deformation of Metal by Moire Method*, Metallurgical Publisher, Moscow (1974), 154.
- [5] M. M. Frocht, *Photoelasticity*, Vol. II, John Wiley & Sons (1948), 76.
- [6] Z. D. Chen and X. C. Liu, Nonlinear geometric field theory and viscoplasticity of large deformation, MD. Vol 69—1, *Proceedings of the ASME Materials Division*, Editors: N. R. Scottes, etc. (1995), 429—440.

Inverse Asymptotic Solution Method for Finite Deformation Elasto-Plasticity

Chen Zhida

(Beijing Graduate School, China University of Mining, Beijing 100083, P.R. China)

Abstract

The development of modern mechanics in recent years has made many important progresses in the concepts and methods for nonlinear large deformation mechanics [1][2][3] etc. The present paper is aimed to show how the natural co-moving system method and Stokes-Chen's decomposition theorem can be effectively applied asymptotically to solving problems of finite deformation elasto-plasticity by inverse asymptotic method for engineering design purpose. Rigid punch problem is exemplified in the paper.

Key words finite deformation, elasto-plasticity, computer method, inverse approximation