由Gurtin变分原理求解任意形状板动力响应的半解析法*

彭建设[1]　　张敬宇[2]　　杨　杰[3]

（程昌钧推荐，1996年 9 月 6 日收到，1997年 6 月16日收到修改稿）

摘　　要

该半解析法以 Gurtin 变分原理为基础，在空间域作有限元离散，在时间域取级数。本文研究了任意形状板时域函数的取法，使得各种支承条件，任意形状板的动力响应问题均可由本计算模式得到具有相当精度和效率的解。

关键词　半解析法　动力响应　变分原理　薄板　有限元

一、引　　言

Gurtin 变分原理被认为是唯一能反映动力学全部特征的变分原理，它通过卷积将运动平衡方程和初始条件融为一个场方程，从而将动力学混合初-边值问题转化为一个等价的边值问题。本文以 Gurtin 变分原理为基础，在空间域内作有限元离散，在时间域上，对各种支承条件，任意形状板均选取了一种统一的时域级数形式，使各种支承及形状的板动力响应问题均可由本文导出的模式得到具有较高精度和效率的解。该半解析法尽量利用了解析法的优势，由于时域不离散，从而将动力学问题的偏微分方程组转化为一个线性代数方程组求解，成功地避开了误差积累及解的稳定性等问题，求解一次线性方程组，即得到动力响应场，可由此求得任一位置，任一时刻的响应解。本方法实为求解任意形状板动力响应的一种有效的，值得进一步研究和发展的方法。

二、Gurtin型变分原理的建立

弹性体R的动力平衡方程为

$$\sigma_{ij,j}+f_i=\rho\cdot\ddot{u}_i \tag{2.1}$$

以时间t对上式两边作卷积，并化简得

* 国家自然科学基金资助项目．

1 四川师范学院，四川南充 637002;

2 天津大学机电分校，天津 300000.

3 武汉化工学院，武汉 430000、

$$t*\sigma_{ij,j}+P_i=\rho\cdot u_i \tag{2.2}$$

式中 $P_i=t*f_i+\rho(u_{0i}+tv_{0i})$

(2.2)式加上力和位移边界条件，即将动力学混合初-边值问题转化为一个等价的边值问题。卷积型变分原理即为包容该问题的一种等价数学描述，以u_i为自变函数的Gurtin泛函为

$$\phi=\frac{1}{2}\int_R\{t*\sigma_{ij}*\varepsilon_{ij}+\rho\cdot u_i*u_i-2[t*f_i+\rho(u_{0i}+tv_{0i})]*u_i\}dR$$

$$-\int_{A_2}t*\hat{T}_i*u_i dA \tag{2.3}$$

式中 σ_{ij}，ε_{ij}及u_i之间满足物理方程及几何方程。关于Gurtin变分原理的详细数学证明见文献[1]。

三、半解析法计算模式推导

薄板振动微分方程解的形式为：

$$W=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos\omega_m t+B_m\sin\omega_m t)\cdot\psi_m(x,\ y) \tag{3.1}$$

式中 $\psi_m(x,\ y)$为振形函数，与时间t无关，时域函数中的ω_m为板的自然频率，只与板的形状及支承情况等固有特性有关，而与外来因素无关。

对任意形状及各种支承条件板，按(3.1)式，在空间域作有限元离散，在时间域取三角级数，通过Gurtin变分原理来满足其动力平衡要求，从而得到其半解析的动力响应场。

在板上取四节点矩形元，在初速度v_0为零的情况下，节点位移函数可较简单地取为带补充项的余弦函数。

$$\left\{\begin{array}{c}w_i\\ \theta_{xi}\\ \theta_{yi}\end{array}\right\}=\sum_{n=0}^{N}\cos\omega_n t\cdot\left\{\begin{array}{c}\delta_n^{Oi}\\ \delta_n^{xi}\\ \delta_n^{yi}\end{array}\right\}(i,\ j,\ m,\ p) \tag{3.2}$$

式中 δ_n^{Oi}，δ_n^{xi}，δ_n^{yi} 为待定参数，$\omega_0=0$，ω_n 为板的各阶自然频率，可由能量法或由所划分的有限元网格求解一个广义特征值问题

$$([K]-\omega^2[M])\cdot\{\psi\}=0 \tag{3.3}$$

求出其前几阶自然频率。

令 $J_n=\cos\omega_n t$，单元位移场试函数即为

$$W=\sum_{n=0}^{N}[N]\cdot J_n\cdot\{\delta\}_n \tag{3.4}$$

式中，$\{\delta\}_n$为单元节点待定参数列阵，$[N]$为Hermit插值函数。

将Gurtin泛函以矩阵形式表达，在力约束边界处给定外力$\hat{T}$为零的情况下，经合并，成为：

$$\phi^e=\frac{1}{2}\left[\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\{\delta\}_m^T[\mathscr{K}]_{mn}\{\delta\}_n-2\sum_{m=0}^{N}\{\delta\}_m^T\{F\}_m\right] \tag{3.5}$$

式中 $[\mathscr{K}]_{mn}$，$\{F\}_m$分别为单元广义质量刚度矩阵和单元广义载荷列阵。

$$[\mathscr{K}]_{mn}=[K]\cdot t*J_m*J_n+[M]\cdot J_m*J_n \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\{F\}_m=&[M]\cdot[J_m*t*1/\rho h\cdot\{f\}+J_m*t\cdot\{v\}+J_m*1\cdot\{d\}]\\&+C\cdot[N]^T(\xi_P,\ \eta_P)\cdot J_m*t*1\cdot P\end{aligned} \tag{3.7}$$

式中 $[K]$，$[M]$即为有限元刚阵和质量阵，ρ为材料密度，h为板厚，$\{f\}$，$\{v\}$，$\{d\}$分别为分布载荷f，初速度v_0，初位移W_0的离散列阵，ξ_P，η_P是f为集中载荷P时所作用单元的局部坐标

$$C=\begin{cases}1 & (\text{集中载荷作用的单元})\\0 & (\text{其余单元})\end{cases}$$

让位移场试函数(3.4)式满足位移初始条件得，$\sum\limits_{m=0}^{N}\{\delta\}_m=\{d\}$

即

$$\{\delta\}_0=\{d\}-\sum_{m=1}^{N}\{\delta\}_m \tag{3.8}$$

将其代入(3.5)式，经合并化简得：

$$\phi^e=\frac{1}{2}\left[\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\{\delta\}_m^T\cdot[\bar{K}]_{mn}\cdot\{\delta\}_n-2\sum_{m=1}^{N}\{\delta\}_m\cdot\{\bar{F}\}_m\right] \tag{3.9}$$

式中：

$$[\bar{K}]_{mn}=[\mathscr{K}]_{00}+[\mathscr{K}]_{mn}-[\mathscr{K}]_{0n}-[\mathscr{K}]_{m0} \tag{3.10}$$

$$\{\bar{F}\}_m=([\mathscr{K}]_{00}-[\mathscr{K}]_{m0})\cdot\{d\}+\{F\}_m-\{F\}_0 \tag{3.11}$$

分别为单元等效广义质量刚度矩阵和单元等效广义载荷列阵。

对各单元求和，得总泛函

$$\Phi=\sum_e\phi^e=\frac{1}{2}[\{\delta\}^T\cdot[\mathscr{K}]\cdot\{\delta\}-2\{\delta\}^T\cdot\{F\}] \tag{3.12}$$

式中 $\{\delta\}$为总待定参数列阵，$[\mathscr{K}]$，$\{F\}$分别为总广义质量刚度矩阵和总广义载荷列阵，由各单元的等效阵$[\bar{K}]_{mn}$和$\{\bar{F}\}_m$按节点和级数参数编号组装而成。

由Gurtin变分原理知，在运动允许状态下，薄板动力响应的真解应使总泛函(3.12)式取驻值。

$$\partial\Phi/\partial\{\delta\}=\{0\}$$

即

$$[\mathscr{K}]\cdot\{\delta\}=\{F\} \tag{3.13}$$

此即为求解薄板动力响应问题的等效平衡方程。由此即可求得薄板的动力响应解。

卷积式按定义计算。设$f(r,\ t)$和$g(r,\ t)$在定义域内连续，定义时域长度为S，则

$$f*g=\int_0^s f(r,\ s-\tau)\cdot g(r,\ \tau)d\tau$$

四、算　　例

例1　一四边简支矩形板，长 $A=80\text{cm}$，宽 $B=60\text{cm}$，板厚 $h=1\text{cm}$，弹性模量 $E=15000000\text{N/cm}^2$，质量密度 $\rho=0.008\text{kg/cm}^3$，在板上突加一 $q=1\text{N/cm}^2$ 的均布载荷，初速度 $v_0=0$，初位移 $d_0=0$，试求 $x=20\text{cm}$，$y=15\text{cm}$ 处的动挠度．

例2　如图1所示形状之薄板，几何尺寸如图，板厚 1cm，周边画斜线处固支，其余边界自由，其物理参数同例 1，在板上 (45，30) 处作用一 $P=1000\text{N}$ 的突加集中载荷，$v_0=0$，$d_0=0$，试求 $x=3A/8$，$y=B/2$ 处的动挠度．

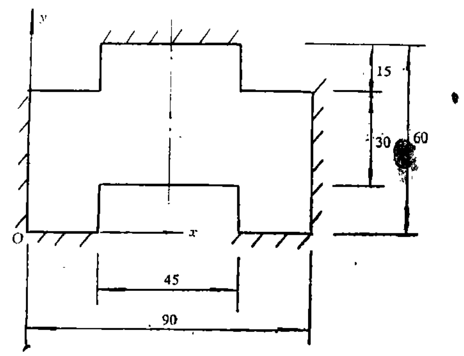

图1　(单位：cm)

计算所得的半解析解及其与精确解和差分解的比较，分别如表1，表2所示，表 1 中的误差 1 和误差 2 分别为精确解与半解析解和差分解之间的误差，表 2 中的差值为半解析解与加密网格加密步长所得振型迭加法解之间的差值．

表　1

时间（秒）	0.07	0.08	0.10	0.14	0.20	0.24	0.28	0.44
本文解(10^{-1}cm)	2.232	2.799	3.961	5.903	6.316	4.733	2.454	3.149
精确解(10^{-1}cm)	2.260	2.793	3.908	5.954	6.250	4.737	2.401	3.160
差分解(10^{-1}cm)	2.371	2.925	4.072	5.982	6.163	4.557	2.244	3.536
误差1(%)	1.24	−0.21	−1.35	0.86	1.05	0.084	−2.10	0.35
误差2(%)	−4.91	−4.73	−4.20	−0.47	1.39	3.80	6.54	11.9

表　2

时间（秒）	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16
本文解(10^{-2}cm)	1.906	4.257	3.150	0.4006	0.7289	3.577	4.043	1.426
加密差分解(10^{-2}cm)	1.896	4.363	3.207	0.3938	0.7040	3.611	4.174	1.436
差值(%)	0.53	−2.49	−1.81	1.70	3.41	−0.95	−3.24	−0.70

五、结　　语

本文推出了求解任意形状板动力响应半解析法的一般计算模式，本方法的关键是导出合适的时域级数，任意形状板的自然频率可由(3.9)式求解特征值问题得到．虽说求解(3.9)式需花一定的时间，但式中的刚阵$[K]$和质量阵$[M]$即为半解析法质刚阵中的(3.6)式，不需专门计算，在半解析法中，一般时域级数仅取一、二项即可得到精度较高的解，因此，只需由(3.3)式求出一、二个最低自然频率，并不需花多少时间．从例 1 与精确解的比较看，半解析法的精度和效率都是比较高的，例 2 中的加密差分解是取48个单元，时间步长为十万分之五秒 (0.00005秒)，经过近五千步，由振型迭加法算得的结果，其计算时间是半解析法

的十几倍．本文方法的最大特点是时域不离散，从而将动力学问题的偏微分方程组转化为一个线性代数方程组求解，成功地避开了误差积累以及解的稳定性等问题，求解一次线性方程组，即求得动力响应场．该方法既有相当的精度，又有较高的效率，还能适应较复杂为空间域和不同支承条件．

参 考 文 献

[1] M. E. Gurtin Variation principles for linear elastodynamics, *Achive for Rational Mechanics and Analysis*., 16(1) (1964), 34.

[2] T. J.R.Hvgkes, A precis of developments in computional method for transient analysis, *Transaction of the ASME,Journal of Applied Mechanics*, 50(7) (1983), 1037.

[3] 罗恩，关于线弹性动力学中各种Gurtin型变分原理，中国科学，A辑，17(9) (1987), 936.

[4] 彭建设、张敬宇，由Gurtin变分原理求解一维动力响应的半解析法，力学学报,26(6) (1992), 708.

[5] J. Y. Zhang, W. R. Lewis and J. S. Peng,A semianalytic approach to general transient problems and its application to heat-transfer,*Numerical Heat Transfer*, *Pt, B-Fund*., 23(4) (1993), 413.

Formulation of a Semi-Analytical Approach Based on Gurtin Variational Principle for Dynamic Response of General Thin Plates

Peng Jianshe

(*Sichuan Teachers College, Nanchong, Nanchong Sichuan* 637000, *P. R. China*)

Zhang Jingyu

(*College of Mech. and Elec., Tianjin University, Tianjin* 300000, *P. R. China*)

Yang Jie

(*Wuhan Institute of Chemical Technology, Wuhan* 430000, *P. R. China*)

Abstract

A semi-analytical approach for the dynamic response of general thin plates which employes finite element discretization in space domain and a series of representation in time domain is developed on the basis of Gurtin variational principles. The formulation of time series is also investigated so that the dynamic response of plates with adequate accuracy.

Key words semi-analytical approach, dynamic response, variational principle, thin plate, the finite element method