应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非线性问题的插值摄动解法

袁 镒 吾[1]

（钱伟长推荐，1996年1月21日收到）

摘 要

本文用插值摄动法[1]求解几个非线性问题。算例表明，本文方法有很好的精度。

关键词 插值 奇异摄动法 非线性

一、问题的提法及算例

本文在文[1]的基础上用插值摄动法求解几个非线性问题．其大要为：引入插值函数，用摄动法求得该插值函数后，再用精确的方法去求取原来的未知函数．文中有三个算例．算例表明，对于弱非线性问题，本文方法具有很好的精度；当非线性不是很弱时，精度也还不错，特别是，该法有时甚至比多尺度法还更好些．

算例1 我们考虑圆球在粘性流体中的下落运动．假设圆球的质量为m，其所受流体的阻力与球的速度的平方成正比，g为重力加速度，则球的运动方程为

$$\begin{cases} m dv/dt = mg - k_v v^2 \qquad (r \geqslant 0) & (1.1) \\ v(r) = 0 \qquad (r = 0) & (1.2) \end{cases}$$

这里，k_v为比例常量，设$\mu = k_v/m$，并设

$$t = r\sqrt{g\mu}, \quad V = v/\sqrt{g/\mu}$$

则得[2]

$$\begin{cases} dV/dt + V^2 = 1 \qquad (t \geqslant 0) & (1.3) \\ V(0) = 0 & (1.4) \end{cases}$$

为了用摄动法求解式(1.3)、(1.4)，我们把式(1.3)中的非线性项V^2乘以小参数ε（用摄动法求得解后再令$\varepsilon=1$），于是式(1.3)变为

$$dV/dt + \varepsilon V^2 = 1 \tag{1.5}$$

把式(1.5)改写成

$$dV/dt = 1 - \varepsilon V^2 \tag{1.6}$$

由于1与$(1-\varepsilon V^2)$很接近，我们引入插值函数$y(t)$，它与1及$(1-\varepsilon V^2)$的接近程度相同，即令

1 中南工业大学，长沙 410083．

$$\begin{cases} 1-y=K & (1.7) \\ y-(1-\varepsilon V^2)=K(1-\varepsilon V\ ) & (1.8) \end{cases}$$

式中 $K(t)$为待求的函数．由式(1.7)、(1.8)可得

$$\begin{cases} K=\varepsilon V^2/(2-\varepsilon V^2) & (1.9) \\ y=1-K & (1.10) \end{cases}$$

由于$K=O(\varepsilon)$是微量，准确至$O(\varepsilon)$，我们有

$$K=K^*=\frac{1}{2}\varepsilon(V^0)^2+O(\varepsilon^2) \tag{1.11}$$

式中 V^0为$\varepsilon=0$时的V的数值，即

$$\begin{cases} dV/dt=1 \\ V(0)=0 \end{cases}$$

的解．显然有

$$V^0=t \tag{1.12}$$

将上式代入式(1.11)得

$$K^*=\varepsilon t^2/2 \tag{1.13}$$

代入式(1.10)得

$$y=1-\varepsilon t^2/2 \tag{1.14}$$

于是，我们用摄动法求得了函数K及y的近似值．

在此基础上，现在我们用精确的方法去求取原来的函数$V(t)$．将式(1.9)代入式(1.10)得

$$y=1-\varepsilon V^2/(2-\varepsilon V^2)$$

于是得

$$V=\sqrt{2(y-1)/(\varepsilon y-2\varepsilon)} \tag{1.15}$$

将式(1.14)代入上式，并令$\varepsilon=1$得

$$V=\sqrt{t^2/(1+t^2/2)} \tag{1.16}$$

这就是用插值摄动法求得的式(1.3)、(1.4)的近似解．

式(1.3)、(1.4)的准确解为[2]

$$V=(1-\exp[-2t])/(1+\exp[-2t]) \tag{1.17}$$

用正则摄动法求得的式(1.3)、(1.4)的三阶近似解为[2]

$$V=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{2}{15}t^5-\frac{17}{315}t^7 \tag{1.18}$$

为了检验本文近似解式(1.16)的精度，我们在表 1 和图 1 中将它和准确解(1.17)进行了比较．在图 1 中我们还描绘了正则摄动法的三阶近似解式(1.18)．从表 1 和图 1 可见，本文结果与准确解还算相当符合．$t\leqslant 0.8$时，最大误差仅为 4.9%．在整个运动过程中，其最大误差也大于41%（当$t\to\infty$时）．

正则摄动法的三阶近似结果则差多了．当 $t=1.5$时，其误差已达46.5%，而本文此时的误差仅为13.7%．

表 1

t	准确式(1.17)	本文式(1.16)	t	准确式(1.17)	本文式(1.16)
0	0	0	2.0	0.9640	1.1547
0.2	0.1974	0.1980	2.5	0.9866	1.2309
0.4	0.3799	0.3849	3.0	0.9951	1.2792
0.6	0.5370	0.5523	3.5	0.9982	1.3112
0.8	0.6640	0.6963	4.0	0.9993	1.3333
1.0	0.7616	0.8165	8.0	1.0000	1.3926
1.5	0.9051	1.0290	∞	1	1.4142

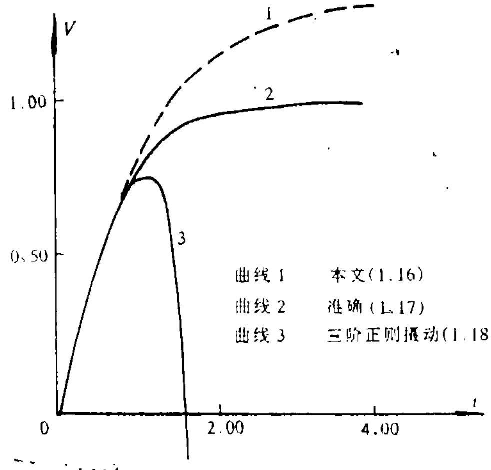

图 1

二、算 例 2

兹考察下列边值问题

$$\begin{cases} x du/dx + u + \varepsilon u du/dx = 0 & (2.1) \\ u(1) = 1 & (2.2) \end{cases}$$

将式(2.1)改写成

$$-\frac{x}{u}\cdot\frac{du}{dx} = 1 + \varepsilon\frac{du}{dx} \tag{2.3}$$

引入插值函数$y_1(x)$，并令

$$\begin{cases} y_1 - 1 = K_1 & (2.4) \\ 1 + \varepsilon du/dx - y_1 = K_1(1 + \varepsilon du/dx) & (2.5) \end{cases}$$

由式(2.4)、(2.5)得

$$\begin{cases} K_1 = \varepsilon\dfrac{du}{dx}\Big/\left(2 + \varepsilon\dfrac{du}{dx}\right) & (2.6) \\ y_1 = 1 + K_1 & (2.7) \end{cases}$$

先用摄动法求y_1及K_1的近似值．准确至$O(\varepsilon)$，式(2.6)可简化为

$$K_1 = K_1^* = (\varepsilon/2) du^0/dx + O(\varepsilon^2) \tag{2.8}$$

式中 u^0为$\varepsilon=0$时的u值，即

$$\left.\begin{aligned} &x du/dx+u=0 \\ &u(1)=1 \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

的解. 显然有

$$u^0=x^{-1} \tag{2.10}$$

将上式代入式(2.8)，再代入式(2.7)得

$$y_1=1-\frac{1}{2}\varepsilon x^{-2}+O(\varepsilon^2) \tag{2.11}$$

用摄动法求得了K_1，y_1的近似值后，现在，我们用精确的方法去求取原来的函数$u(x)$. 将式(2.6)代入式(2.7)得

$$y_1=1+\frac{\varepsilon du/dx}{2+\varepsilon du/dx}$$

于是得

$$\varepsilon du/dx=(2y_1-2)/(2-y_1)$$

将式(2.11)代入上式得

$$\varepsilon\frac{du}{dx}=\frac{-\varepsilon x^{-2}}{1+\varepsilon x^{-2}/2}$$

将上式积分，并利用边界条件(2.2)得

$$u=1-\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+\varepsilon/2}}\right)-\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon/2}}\right)\right] \tag{2.12}$$

这就是我们用插值摄动法求得的式(2.1)、(2.2)的近似解析解.

现在，我们试探用多尺度法求解式(2.1)、(2.2). 这个问题属于边界层型问题，函数u在$x=0$附近变化激烈. 引入自变量

$$\zeta=x,\quad \xi=x/\varepsilon \tag{2.13}$$

并令

$$u=u_0(\zeta,\ \xi)+\varepsilon u_1(\xi,\ \zeta) \tag{2.14}$$

则有

$$du/dx=(1/\varepsilon)\partial u/\partial\xi+\partial u/\partial\zeta \tag{2.15}$$

代入式(2.1)得

$$\zeta\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)+u+\varepsilon u\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)=0 \tag{2.16}$$

将式(2.14)代入，令ε的各次幂的系数为零得

$$\zeta\partial u_0/\partial\xi=0 \tag{2.17}$$

$$\zeta\frac{\partial u_1}{\partial\xi}+\zeta\frac{\partial u_0}{\partial\zeta}+u_0+u_0\frac{\partial u_0}{\partial\xi}=0 \tag{2.18}$$

$$\zeta\frac{\partial u_2}{\partial\xi}+\zeta\frac{\partial u_1}{\partial\zeta}+u_1+u_0\frac{\partial u_1}{\partial\xi}+u_1\frac{\partial u_0}{\partial\xi}+u_0\frac{\partial u_0}{\partial\zeta}=0 \tag{2.19}$$

由式(2.17)得

$$u_0=C(\zeta) \tag{2.20}$$

将上式代入式(2.18)得

$$\zeta\partial u_1/\partial\xi=-\zeta dC/d\zeta-C(\zeta) \tag{2.21}$$

故应有

$$\zeta\frac{dC}{d\zeta}+C=0 \tag{2.22}$$

否则，比值u_1/u_0当$\xi\to\infty$时无界．由式(2.22)得

$$C=\frac{C_0}{\zeta}$$

式中 C_0为任意常数，由条件$u_0(1)=1$得$C_0=1$．故有

$$u_0=\frac{1}{\zeta} \tag{2.23}$$

由式(2.21)、(2.22)得

$$u_1=C_1(\zeta) \tag{2.24}$$

将式(2.24)、(2.23)代入式(2.19)得

$$dC_1/d\zeta+\zeta^{-1}C_1=\zeta^{-4}$$

积分，并利用条件$u_1(1)=0$得

$$u_1=\frac{\zeta^{-1}-\zeta^{-3}}{2} \tag{2.25}$$

联合式(2.23)、(2.25)最后得

$$u=x^{-1}+\varepsilon(x^{-1}-x^{-3})/2+O(\varepsilon^2) \tag{2.26}$$

这就是用多尺度法求得的式(2.1)、(2.2)的一级近似解．

式(2.1)、(2.2)的精确解为[3]

$$u=(1/\varepsilon)(-x+\sqrt{x^2+2\varepsilon+\varepsilon^2})$$

为了考察本文结果的精度，在表2($\varepsilon=0.1$)及表 3($\varepsilon=1$)中把本文近似解式(2.12)与精确解(2.27)进行了比较，表中还列入了多尺度法的一级近似解(2.26)．从表 2 可见，当 ε 很小($\varepsilon=0.1$)时，本文近似解有很好的精度，并优于多尺度法．表 3 则表明，即使非线性不是很弱($\varepsilon=1$)，本文近似解的精度仍然不错．多尺度法此时的一级近似解(2.26)则差多了，其u值随x的变化规律也不同，当x逐渐增大时，u值逐渐减小．

表 2 ($\varepsilon=0.1$)

x	u 准确 式(2.27)	u 本文 式(2.12)	u 多尺度 式(2.26)
1.0	1	1	1
0.9	1.0995	1.1052	1.0981
0.8	1.2195	1.2351	1.2148
0.7	1.3666	1.3989	1.3542
0.6	1.5498	1.6115	1.5185
0.5	1.7823	1.8969	1.7000
0.4	2.0828	2.2958	1.8438
0.3	2.4772	2.8807	1.6481
0.2	3.0000	3.7776	−1.0000
0.1	3.6904	5.1603	−39.50
0	4.5826	7.0410	∞

表 3 ($\varepsilon=1$)

x	u 准确 式(2.27)	u 本文 式(2.12)	u 多尺度 式(2.26)
1.0	1	1	1
0.9	1.0519	1.0714	0.9808
0.8	1.1079	1.1532	0.8984
0.7	1.1682	1.2474	0.6851
0.6	1.2330	1.3559	0.1852
0.5	1.3028	1.4806	−1.0000
0.4	1.3776	1.6230	
0.3	1.4578	1.7836	
0.2	1.5436	1.9612	
0.1	1.6349	2.1530	
0	1.7321	2.3510	

三、算 例 3

兹考察初值问题

$$\begin{cases} d^2u/dt^2-u+\varepsilon u^4=0 & (3.1)\\ u(0)=1,\ \dfrac{du}{dt}(0)=b & (3.2)\end{cases}$$

将式(3.1)改写成

$$-\frac{d^2u}{dt^2}/u=1-Cu^3 \tag{3.3}$$

引入插值函数y_2，并令

$$1-y_2=K_2 \qquad y_2-(1-\varepsilon u^3)=K_2(1-\varepsilon u^3) \tag{3.4}$$

则得

$$\begin{cases} K_2=\varepsilon u^3/(2-\varepsilon u^3) & (3.5)\\ y_2=1-K_2 & (3.6)\end{cases}$$

式(3.5)可简化成为

$$K_2=K_2^*=\varepsilon u_0^3/2+O(\varepsilon^2) \tag{3.7}$$

其中 u_0为$\varepsilon=0$时的u值，由式(3.1)得

$$u_0=C_2\exp[t]+C_3\exp[-t] \tag{3.8}$$

式中 C_2，C_3均为积分常数．将式(3.8)代入式(3.7)再代入式(3.5)的左边，对u求解得

$$u=(C_2\exp[t]+C_3\exp[-t])[1-(\varepsilon/6)(C_2\exp[t]+C_3\exp[-t])^3]+O(\varepsilon^2) \tag{3.9}$$

$$\dot{u}=\frac{C_2\exp[t]-C_3\exp[-t]}{\left[1+\frac{1}{2}\varepsilon(C_2\exp[t]+C_3\exp[-t])^3\right]^{1/3}}-\frac{\varepsilon(C_2\exp[t]+C_3\exp[-t])^3(C_2\exp[t]-C_3\exp[-t])}{[1+(\varepsilon/2)(C_2\exp[t]+C_3\exp[-t])^3]^{4/3}} \tag{3.10}$$

由边界条件(3.2)及上二式可求得

$$\begin{cases} C_2=[1+\varepsilon/6+b(1+2\varepsilon/3)]/2\\ C_3=[1+\varepsilon/6-b(1+2\varepsilon/3)]/2\end{cases} \tag{3.11}$$

式(3.9)及(3.11)即是我们用插值摄动法求得的式(3.1)、(3.2)的近似解，它准确至$O(\varepsilon)$．

文[4]第125页也得到了$\varepsilon=1$时式(3.1)、(3.2)在$u=1$附近的近似解

$$\begin{cases} u=1+a_0\cos(\sqrt{3}\,\omega t+\beta_0)+\dfrac{1}{3}a_0^2[\cos(2\sqrt{3}\,\omega t+2\beta_0)-3]\\ \omega=1-7a_0^2/6\end{cases} \tag{3.12}$$

为了把它和本文结果相比较，我们取$b=-0.6014$．将$u(0)=1$，$\dfrac{du}{dt}(0)=b=-0.6014$代入式(3.12)可得

$$a_0=\sqrt{2}/2,\quad \omega=5/12,\quad \beta_0=\pi/4$$

于是，式(3.12)成为

$$u=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{5\sqrt{3}}{12}t+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{6}\left(\sin\frac{5\sqrt{3}}{6}t+3\right) \qquad (\varepsilon=1) \tag{3.13}$$

将$\varepsilon=0.1$，$b=-0.6014$代入式(3.9)～(3.11)得

$$u=(0.1876\exp[t]+0.8291\exp[-t])\cdot\left[1-\frac{1}{60}(0.1876\exp[t]+0.8291\exp[-t])^3\right] \tag{3.14}$$

$$\dot{u}=(0.1876\exp[t]-0.8291\exp[-t])\cdot\left[1-\frac{1}{15}(0.8176\exp[t]+0.8291\exp[-t])^3\right] \qquad (\varepsilon=0.1) \tag{3.15}$$

将$\varepsilon=1$及$b=-0.6014$代入式(3.9)～(3.11)得

$$u=\frac{2^{-2/3}(2.2028\exp[-t]-0.2028\exp[t]}{\left[1+\frac{1}{8}(2.2028\exp[-t]-0.2028\exp[t])^3\right]^{1/3}} \tag{3.16}$$

表 4 将本文结果式(3.16)和文[4]的相应结果式(3.13)做了比较．由于文[4]的结果只适用于$u\approx1$ 的情形，故表 4 中的t 值只取到$t=0.5$．由表 4 可见，当$t\leqslant0.4$时，本文结果式(3.16)和文[4]的相应结果式 (3.13) 基本一致，但本文解法无文[4]中的$u\approx1$的限制条件．为了把本文近似解和准确解相比较，我们需要求式(3.1)的准确解．

表 4 $(\varepsilon=1)$

t	u 本文 式(3.16)	u 文[4] 式(3.13)
0	1	1
0.1	0.9352	0.9387
0.2	0.8618	0.8754
0.3	0.7813	0.8110
0.4	0.6955	0.7460
0.5	0.6066	0.6812

表 5 $(\varepsilon=0.1)$

t	u 本文 式(3.14)	$\dot{u}$ 本文 式(3.15)	$\dot{u}$ 准确 式(3.17)
0	1	−0.5966	−0.6014
0.1	0.9435	−0.5111	−0.5118
0.2	0.8966	−0.4272	−0.4271
0.3	0.8580	−0.3453	−0.3453
0.4	0.8275	−0.2652	−0.2663
0.5	0.8049	−0.1867	−0.1898
0.6	0.7901	−0.1094	−0.1167
0.7	0.7830	−0.0328	−0.0547
0.8	0.7836	−0.0435	−0.0624
0.9	0.7917	−0.1201	−0.1266
1.0	0.8076	−0.1975	−0.2004

由式(3.1)有$du\cdot\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{du}{dt}\right)=(u-\varepsilon u^4)du$

故

$$(du/dt)^2/2=u^2/2-\varepsilon u^5/5+C_4$$

$$\frac{du}{dt}=\pm\sqrt{u^2-\frac{2}{5}\varepsilon u^5+2C_4}$$

由$u=1$及$du/dt=-0.6014$确定C_4，当$\varepsilon=0.1$时，上式成为

$$du/dt=\pm\sqrt{u^2-0.04u^5-0.59832} \qquad (\varepsilon=0.1) \tag{3.17}$$

表 5 把本文近似解式(3.14)、(3.15)与准确解式(3.17)进行了比较，取$\varepsilon=0.1$，表 5 说明，本文近似解有很好的精度．

参 考 文 献

[1] 袁镒吾，求一类非线性振动微分方程的近似解的新方法，力学与实践，12(1) (1990)，49—51.
[2] 廖世俊，建立在同伦基础上的一种非线性分析方法，上海力学，2 (1994).
[3] 钱伟长主编，《奇异摄动理论及其在力学中的应用》，科学出版社 (1981)，48.
[4] A. H. 奈弗著，《摄动方法习题集》(宋家骕，戴世强译)，上海翻译出版社 (1990)，125.

Interpolation Perturbation Method for Solving Nonlinear Problems

Yuan Yiwu

(*Central South University of Technology, Changsha* 410012, *P.R.China*)

Abstract

In this paper, using the interpolation perturbation method, the author seeks to solve several nonlinear problems. Numerical examples show that the method of this paper attains good accuracy.

Key words interpolation, singular perturbation method, nonlinear