

地震响应的凸集分析*

何彩英¹ 张景绘¹

(1996年4月26日收到)

摘 要

本文提出了一种用于表示地震动不确定性的椭球傅立叶界限凸集模型。从数学上严格推出了这种模型对单自由度系统的最坏响应。并给出了模型参数的几种选取方法。通过合理地选取模型界限参数,将椭球傅立叶界限凸集模型与模拟的地震波结果进行比较,证实了基于标准地震波的抗震设计的危险性。

关键词 地震响应 反应谱 凸集 极值

一、引 言

工程中经常把结构的最大响应作为抗震设计的依据。最早 Drenick (1968, 1970) 和 Shinozuka (1970) 等把地震激励的最大响应作为抗震设计准则。目前抗震设计中采用的反应谱理论就是基于最大响应的概念提出的。由于地震运动的不确定性,结构的响应也是不确定的。很多学者用不同的模型描述了地震动的不确定性,并研究了相应的最大响应。最有代表性的是 Boit (1941), Housner (1959), Newmark (1973) 等人研究的统计法; Crandall (1970) 和 Vanmarcke (1975) 研究的概率估计法; Ben-Haim 和 Elishakoff (1990) 提出的凸集模型。

统计法是对不同的结构用逐步积分法求出各种地震记录的响应时间历程,然后加以统计,获得一个平均的反应谱。这种方法是把地震记录看作不确定性地震运动的一个实现,通过统计大量的样本信息来估计地震运动的整体信息。现有的规范就采用这一统计方法。这种方法最大的弱点是有限的地震记录不一定能反映地震的整体特性;概率方法是把地震运动看作随机过程,对地震动建立概率模型,然后求概率意义下的最大响应。概率模型建立的好坏很大程度上取决于地震记录的数量,而这对于大多数实际场地来说是很难做到的;随着模糊理论的兴起, Brown (1979), Yao (1980) 等提出模糊随机理论,将地震动加速度表示为含模糊参数的随机过程,然后结合模糊理论和概率论求结构的最大响应。对于一些重要的结构如核电站,上述这些方法的可靠性都不能保证。近年来, Ben-Haim 和 Elishakoff 等引进了凸集模型,以表示地震运动的不确定性。凸集模型是通过建立一个函数集合,这个集合中每个函数表示不确定性运动的一次实现,然后求这个凸集合上的最大响应。

* 国家自然科学基金与国家教委博士点基金资助项目
1 西安交通大学建筑工程与力学学院, 西安 710049

凸集模型的最大特点是它需要的信息量较少, 比如用它表示地面运动时, 因为它可以不知道地面运动的频域信息, 所以我们说凸集模型分析需要的信息密度比概率模型小, 避免了统计法和概率模型中地震记录不足的缺点. 当然, 有用的观察和记录对凸集模型也很重要. 凸集模型的第二个特点是分析结果非常可靠, 这对于一些重要结构是非常有用的. 由于实际地震记录较少, 且设计经验不足, 所以基于场地试验和标准地震输入设计的可靠性无法保证. 而由于凸集模型能较全面地反映地面运动的不确定性, 因此它能保证结构的抗震可靠性. 此外, 对线弹性有阻尼结构, 凸集分析能得到最大响应的解析表达式. 这一点在结构主动控制中特别重要.

本文对强度包络函数和三角级数模拟的渐近非平稳过程建立一个椭球傅立叶界限凸集模型, 用于描述地震运动的不确定性. 利用线性函数在凸集上取极值的条件, 推导了单自由度系统对地震的椭球傅立叶界限凸集模型的最坏响应. 并比较了用规范地震波和凸集模型的计算结果, 表明由凸集模型计算的结果要比规范地震波计算的结果保守许多. 这说明在缺乏场地频域信息的情况下, 基于现有反应谱或标准地震波的设计是不安全的.

二、凸集模型

考虑单自由度系统, 当激励是水平地面运动加速度时, 其运动方程为:

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2y(t) = -\ddot{x}_g(t) \quad (2.1)$$

其中 $y(t)$ 为系统相对于地面的位移, ω_0 和 ξ 分别为系统固有频率和阻尼比, $\ddot{x}_g(t)$ 为地面运动的加速度, 具有很大的不确定性, 可用一凸集合建模.

1. 椭球傅立叶界限凸集模型 (EFB模型)

椭球傅立叶界限凸集模型, 简称 EFB 模型. 它采用地震工程中经常沿用的平稳化假定, 用一个确定的时间函数 $I(t)$ 表示地震动加速度从出现、增强到减弱的过程, 将地震动加速度 $\ddot{x}_g(t)$ 表示成

$$\ddot{x}_g(t) = I(t)x(t) \quad (2.2)$$

$x(t)$ 为平稳过程, $I(t)$ 采用下面的形式

$$I(t) = \begin{cases} (t/t_1)^2, & 0 \leq t < t_1 \\ 1, & t_1 \leq t < t_2 \\ \exp[-\lambda(t-t_2)], & t_2 \leq t \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 λ 是衰减系数, 根据我国强震资料统计, 一般 $t_1=0.15T$, $t_2=0.5T$, T 是地震持续时间. 用式(2.2)表示的地面运动加速度通常称为渐近非平稳过程. 平稳过程 $x(t)$ 可用有限级数项的傅立叶级数近似地表示为

$$x(t) = \sum_{k=1}^N C_k \sin(\omega_k t + \phi_k) \quad (2.4)$$

其中 C_k 和 ϕ_k 分别是第 k 个谱波分量的幅值和相角. 在上下限频率 ω_u 和 ω_l 限定的范围内, N 是充分大的正整数, ω_k 为

$$\omega_k = \omega_l + (k-1/2)\Delta\omega \quad (2.5)$$

其中 $\Delta\omega = (\omega_u - \omega_l)/N$. 为方便, 将(2.4)式改写为如下形式:

$$x(t) = \sum_{k=1}^N (a_k \cos \omega_k t + a_{N+k} \sin \omega_k t) = D^T \varphi(t) \quad (2.6)$$

其中 D 是傅立叶系数矢量, $\varphi(t)$ 是谐波函数矢量:

$$D = \{a_1 \cdots a_N \ a_{N+1} \cdots a_{2N}\}^T \quad (2.7)$$

$$\varphi(t) = \{\cos \omega_1 t \cdots \cos \omega_N t \ \sin \omega_1 t \cdots \sin \omega_N t\}^T \quad (2.8)$$

$$a_k = C_k \sin \phi_k, \quad a_{N+k} = C_k \cos \phi_k \quad (k=1, \dots, N) \quad (2.9)$$

现在我们将傅立叶系数限定在一个椭球凸集合 F_{EFB} 里:

$$F_{\text{EFB}} = \{D: D^T W D \leq R^2\} \quad (2.10)$$

其中 W 是正定实对称矩阵, 维数 $2N \times 2N$, R^2 是正实数. 椭球的形状和大小分别由 W 和 R 决定, 椭球的维数为 $2N$. (2.10) 式要求傅立叶系数应落在由 W 和 R 确定的椭球之内.

在不了解傅立叶系数信息的情况下, W 可设为单位阵. 即意味着平稳过程 $x(t)$ 的频谱幅值是均匀加权的. R 的取法可与输入地震的能量联系起来, 这时得到的椭球傅立叶界限凸集模型与 Ben-Haim^[1] 提出的积分能量界限凸集模型在物理意义上是一致的.

如果某些场地的地面运动有足够的频域信息, 比如知道傅立叶系数的方差信息, 或傅氏谱的包络, 那么 W 可取为对角阵, 而每个对角元素的倒数可近似地等于对应的傅立叶系数方差的平方, 这时 R 取为 $\sqrt{2N}$. 这种取法使得 EFB 模型在物理意义上又与 Ben-Haim^[1] 提出的傅立叶包络界限凸集模型一致.

如果傅立叶系数的方差及协方差信息很充分, 那么 W 可进一步取为傅立叶系数协方差矩阵的逆阵, 这时的 EFB 模型将更经济实用.

2. 单自由度系统的响应

对 (2.1) 式表示的单自由度系统, 当受有地震激励时, 它的响应可表示为

$$y(t) = - \int_0^t I(\tau) D^T \varphi(\tau) h(t-\tau) d\tau = -D^T \varphi_1(t) \quad (2.11)$$

其中 $h(t)$ 是单位脉冲响应函数, $\varphi_1(t)$ 表示为

$$\varphi_1(t) = \int_0^t I(\tau) \varphi(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (2.12)$$

定义系统最坏位移响应为

$$Y = \max_t \sup_{D \in F_{\text{EFB}}} |y(t)| \quad (2.13)$$

它描述了系统在集合 F_{EFB} 上的最大位移响应. 同样可以定义最坏加速度响应. 使用名词最坏响应泛指位移或加速度最坏响应, 最坏响应与系统的固有频率有关, 我们称最坏响应与系统固有周期的关系为最坏响应谱.

根据仿射函数的极值定理^[7]: 如果 f 是一个仿射函数, S 是紧集, 那么在紧集 S 上和和它的凸包 $\text{ch}(S)$ 上 f 将取得相同的极值 (最大值和最小值).

由以上定理可以推出, 对于矢量 D 的线性函数 $y(t)$, 在凸集 F_{EFB} 上的极值一定取在 F_{EFB} 的极点集上. 因此, 对凸集 F_{EFB} , 我们来构造它的极点集 E_{EFB} :

$$E_{\text{EFB}} = \{D: D^T W D = R^2\} \quad (2.14)$$

为求得结构的最坏响应, 我们利用 Lagrange 乘子法构造一个目标函数 J ,

$$J = D^T \varphi_1(t) + \lambda (D^T W D - R^2) \quad (2.15)$$

J 取极值的条件是

$$\frac{\partial J}{\partial D} = \varphi_1(t) + 2\lambda W D = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \lambda} = D^T W D - R^2 = 0 \quad (2.16)$$

由(2.16)的第一式求解 D , 并记为 D_m :

$$D_m = -W^{-1}\varphi_1(t)/2\lambda \quad (2.17)$$

代入(2.16)的第二式可解得Lagrange乘子 λ :

$$\lambda = \pm \sqrt{\varphi_1(t)^T W^{-1} \varphi_1(t) / 2R} \quad (2.18)$$

将(2.18)代入(2.17)得

$$D_m = \pm \{R / [\sqrt{\varphi_1(t)^T W^{-1} \varphi_1(t)}]\} W^{-1} \varphi_1(t) \quad (2.19)$$

由 D_m 可求得最坏响应:

$$Y = \max_t |D_m^T \varphi_1(t)| = \max_t R \sqrt{\varphi_1(t)^T W^{-1} \varphi_1(t)} \quad (2.20)$$

这就是单自由度系统对椭球傅立叶界限凸集模型的最坏响应的精确解。

三、对比分析

分别用规范形成的标准地震波和本文建议的地震波的 EFB 模型, 计算单自由度系统的最大响应和最坏响应。从这个对比分析中可看出在缺乏场地频域信息的情况下, 现行的用标准地震波时程计算法设计的结构存在着危险性。

标准地震波由(2.2)式和(2.4)式计算, (2.4)式中的 C_k 为

$$C_k = 2\sqrt{S_x(\omega_k) \Delta\omega} \quad (3.1)$$

其中 $S_x(\omega)$ 为输入功率谱密度函数, 由规范反应谱转换而得。 ϕ_k 为 $0 \sim 2\pi$ 范围内互相独立、均匀分布的随机相角。

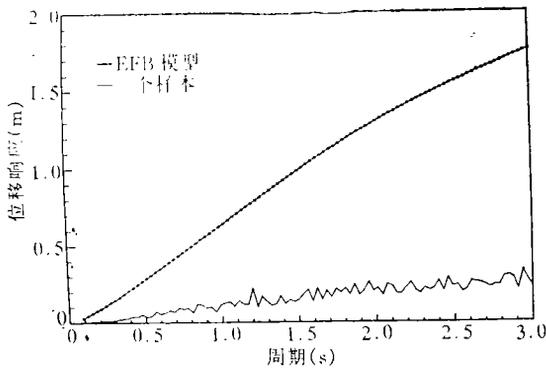
若在 EFB 模型中选取 W 为单位阵, 这时(2.20)式可进一步写为

$$Y = \max R \sqrt{\sum_{k=1}^N \left[\left(\int_0^t I(\tau) \cos \omega_k \tau \cdot h(t-\tau) d\tau \right)^2 + \left(\int_0^t I(\tau) \sin \omega_k \tau \cdot h(t-\tau) d\tau \right)^2 \right]} \quad (3.2)$$

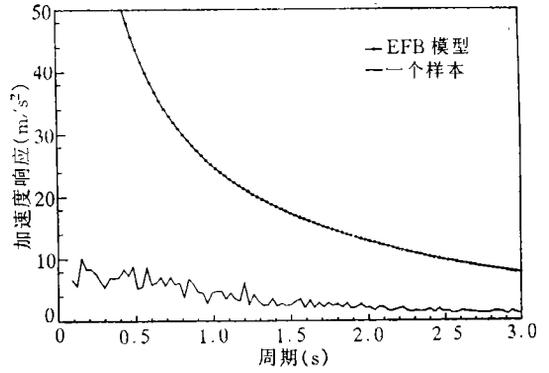
其中 R^2 为 $\sum_{k=1}^N C_k^2$ 。式(3.2)中的两个积分表达式可精确求出。

图1(a)中的两条曲线分别为阻尼比 $\xi=0.05$, 频率上下限 $\omega_u=100\text{rad/s}$, $\omega_l=2\text{rad/s}$, $N=200$ 时, 由标准地震波计算的最大位移响应谱和由 EFB 模型计算的最坏位移响应谱。图1(b)为对应的最大加速度响应谱和最坏加速度响应谱; 图2(a)和(b)为 $\xi=0.05$, $\omega_u=256\text{rad/s}$, $\omega_l=2\text{rad/s}$, $N=500$ 时的结果。当固有周期 $T_0=2\pi/\omega_0 \rightarrow 0$ 时, 最坏加速度响应趋于无穷大, 因此当 T_0 较小时图中略去了最坏加速度响应曲线部分。从图1和图2可看出, EFB 模型的最坏响应比规范标准波计算的最大响应大得多, 这不难理解, 因为后者实际上是 F_{EFB} 集合的一个样本。这充分说明工程中常用的基于标准地震波的抗震设计的可靠性值得研究。

同时也考虑了最坏响应谱与阻尼比的关系。图3、图4分别表示不同阻尼下的 EFB 模型的最坏位移响应谱和最坏加速度响应谱。可见, 随着阻尼比的增加, 最坏响应谱的衰减是很显著的。

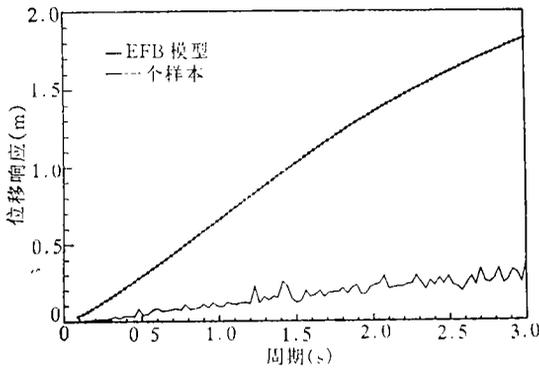


(a) 位移响应谱

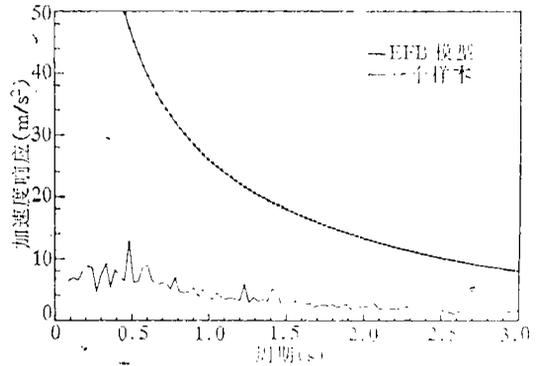


(b) 加速度响应谱

图 1



(a) 位移响应谱



(b) 加速度响应谱

图 2

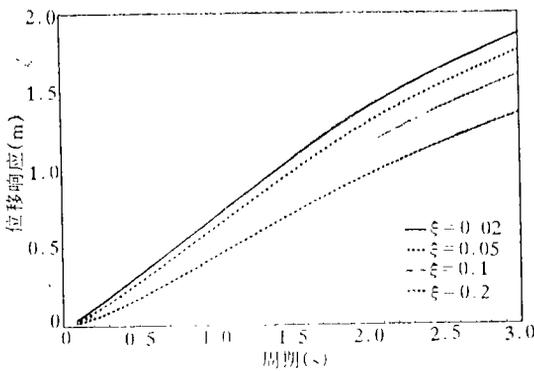


图3 不同阻尼的最坏位移响应谱

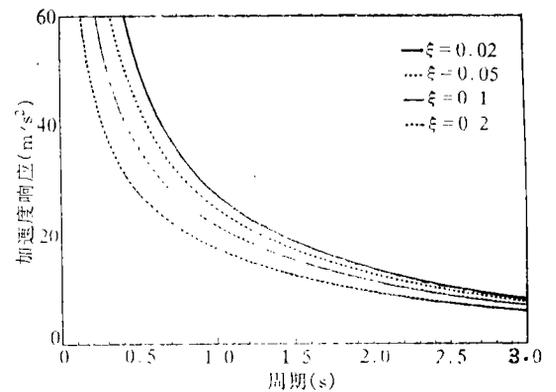


图4 不同阻尼的最坏加速度响应谱

四、结 语

1. 本文从模拟地震动的角度提出了反映地震动不确定性的椭球傅立叶界限凸集模型,

它具有很大的灵活性, 根据对场地地震动信息的了解程度, 可以选取不同的模型参数, 并求解了单自由度线性系统的最坏响应。

2. 分析结果表明, 在缺乏场地地面运动频率信息的情况下, 基于规范标准地震波的抗震设计是不安全的。

3. 由于 EFB 模型在数学上的严格性, 它将为一些重要结构的抗震设计和结构的振动控制开辟一个新途径。

参 考 文 献

- [1] Y. Ben-Haim and I. Elishakoff, *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*, Elsevier, Amsterdam (1990).
- [2] R. F. Drenick, Model-free design of seismic structures, *Journal of Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE*, **96** (1970), 483—493.
- [3] M. Shinozuka, Maximum structural response to seismic excitations, *Journal of Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE*, **96** (1970), 729—738.
- [4] R. F. Drenick and C. B. Yun, Reliability of seismic resistance predictions, *Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE*, **105** (1979), 1879—1891.
- [5] Y. Ben-Haim, Fatigue lifetime with load uncertainty represented by convex model, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **120** (1994), 445—462.
- [6] Y. Ben-Haim, Convex models of uncertainty in radial pulse buckling of shells, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, **60** (1993), 683—688.
- [7] P. J. Kelly and M. L. Weiss, *Geometry and Convexity, A Study in Mathematical Method*, Wiley, New York (1979).

Convex-Model Analysis of the Seismic Response

He Caiying Zhang Jinghui

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China)

Abstract

An ellipsoidal Fourier-bound convex model (EFB model) is proposed in the present paper to express the uncertainty of seismic excitation, and several methods of selecting parameters of the model are explained. An analytical expression is obtained for the worst response of the single-degree-of-freedom (SDOF) system with the EFB model. A numerical simulation shows that the traditional prediction of maximum response can yield the value substantially lower than that predicted by the EFB model. This means that the traditional designing method based on standard seismic inputs may lead to unsafe design decisions.

Key words seismic response, response spectrum, convex set, extreme value