

# 二维各向异性压电介质机电耦合场的基本解\*

刘金喜<sup>1</sup> 王彪<sup>2</sup> 杜善义<sup>2</sup>

(1996年4月8日收到, 1997年6月9日收到修改稿)

## 摘 要

本文研究各向异性压电介质的机电耦合问题. 应用平面波分解法和留数定理, 首次得到了线力和线电荷作用下一般二维各向异性压电介质机电耦合场的基本解. 本文的解适用于平面问题、反平面问题以及平面和反平面相互耦合问题. 作为特例, 文中给出了横观各向同性压电介质的基本解.

**关键词** 压电介质 平面波分解法 机电耦合场 基本解

## 一、引 言

压电材料是得到广泛应用和具有良好发展前景的智能材料, 为了优化压电材料的细观结构, 弄清压电材料的损伤机理和失效行为, 一些学者研究了压电介质的机电耦合问题. Wang<sup>[1,2]</sup>用Green函数法和Fourier变换首创性地给出了含椭圆夹杂和扁平椭圆裂纹压电材料中三维耦合场的解, Du<sup>[3]</sup>和Pak<sup>[4]</sup>应用各向异性弹性力学中的Stroh方法分别研究了含椭圆夹杂二维压电介质的机电耦合场和断裂力学问题, 得到了一些有意义的结果; Suo<sup>[5]</sup>使用同样的方法得到了压电介质中的界面裂纹的尖端场的封闭解; Sosa<sup>[6]</sup>使用Lekhnitskii方法研究了含缺陷压电介质的平面问题. 上述工作的特点均是求解无穷远均匀场作用下无限大压电介质的解析解. 为了研究复杂载荷作用下有限尺寸压电体的机电耦合行为, 寻求耦合场问题的基本解是非常必要的. 最近, 文献[7]、[8]用Fourier变换分别得到了简化的二维各向异性和各向同性压电介质的基本解, 为了得到解的显函表达式, 要经过复杂的反演计算. 由于压电介质固有的各向异性, 平面和反平面问题一般是难以解耦的. 因此, [7]、[8]给出的解有很大的局限性.

本文放弃任何假设, 研究一般二维各向异性压电介质的机电耦合问题. 我们首先使用平面波分解法得到线力和线电荷作用下压电体的基本解的积分表达式, 然后通过留数计算给出了解的显函表达式. 作为特例, 文中给出了横观各向同性压电介质的基本解.

\* 国家自然科学基金和国家教委优秀年轻教师基金资助项目

1 石家庄铁道学院建工系, 石家庄 050043

2 哈尔滨工业大学复合材料研究所, 哈尔滨 150001

## 二、基本方程

在直角坐标系 $x_i$ 下, 线性压电介质的本构方程和梯度方程为本构方程

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn} - e_{nij}E_n, \quad D_i = e_{imn}\varepsilon_{mn} + \alpha_{in}E_n \quad (2.1)$$

式中,  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $D_i$ 和 $E_i$ 分别为应力、应变、电位移和电场,  $C_{ijmn}$ ,  $e_{nij}$ 和 $\alpha_{in}$ 分别为材料的弹性、压电和介电常数, 它们有如下的对称关系

$$C_{ijmn} = C_{jimn} = C_{ijnm} = C_{mnij}, \quad e_{nij} = e_{nji}, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad (2.2)$$

和正定特性

$$C_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} > 0, \quad \alpha_{ij}E_iE_j > 0 \quad (2.3)$$

式中,  $\varepsilon_{ij}$ 和 $E_i$ 分别为非零的二阶张量和矢量.

梯度方程

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad E_i = -\varphi_{,i} \quad (2.4)$$

式中,  $u$ 和 $\varphi$ 分别为位移和电势.

在无体力和自由电荷的情况下, 散度方程为

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad D_{i,i} = 0 \quad (2.5)$$

将(2.1)和(2.4)两式代入上式, 得到用位移和电势表示的散度方程为

$$C_{ijmn}u_{m,ni} + e_{nij}\varphi_{,ni} = 0, \quad e_{imn}u_{m,ni} - \alpha_{in}\varphi_{,ni} = 0 \quad (2.6)$$

为方便起见, 下面采用 Barnett 和Lothe<sup>[9]</sup>的表示法, 将场变量和材料常数统一表示为

$$U_M = \begin{cases} u_m, & M=1, 2, 3 \\ \varphi, & M=4 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$Z_{Mn} = \begin{cases} \varepsilon_{mn}, & M=1, 2, 3 \\ -E_n, & M=4 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & J=1, 2, 3 \\ D_i, & J=4 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$E_{iJMn} = \begin{cases} C_{ijmn}, & J, M=1, 2, 3 \\ e_{nij}, & J=1, 2, 3; M=4 \\ c_{imn}, & J=4; M=1, 2, 3 \\ -\alpha_{in}, & J, M=4 \end{cases} \quad (2.10)$$

值得注意的是:  $U_M$ ,  $Z_{Mn}$ ,  $\Sigma_{iJ}$ 和 $E_{iJMn}$ 不是张量, 不服从张量的坐标变换律.

根据(2.7)~(2.10)式, 方程(2.1)和(2.6)成为

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJMn}Z_{Mn} \quad (2.11)$$

$$E_{iJMn}U_{M,ni} = 0 \quad (2.12)$$

## 三、解法的说明

为了简要地说明求解方法, 先考虑Laplace方程的基本解 $G(\mathbf{x})$ ,  $G(\mathbf{x})$ 应满足方程

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}) + \delta(\mathbf{x}) = 0 \tag{3.1}$$

式中,  $\nabla^2$ 为二维Laplace算子.

求解方程(3.1)的基本出发点是使用二维 $\delta(\mathbf{x})$ 函数的平面波分解公式<sup>[10]</sup>

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \nabla^2 \oint_C \frac{1}{|\mathbf{s}|} \log |\mathbf{s} \cdot \mathbf{x}| ds \tag{3.2}$$

式中,  $C$ 为 $\mathbf{s}$ 坐标系下绕原点 $\mathbf{s}=0$ 的任一条闭合线, 而且

$$ds = s_1 ds_2 - s_2 ds_1 \tag{3.3}$$

比较方程(3.1)和式(3.2), 得到 $G(\mathbf{x})$ 的积分表达式为

$$G(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_C \frac{1}{|\mathbf{s}|^2} \log |\mathbf{s} \cdot \mathbf{x}| ds \tag{3.4}$$

为了用留数方程计算(3.4)式中的积分, 取图1所示的积分路径. 容易证明: 当 $|C_1| = |C_2| \rightarrow \infty$ 时, 沿 $C_2$ 和 $C_4$ 的积分为零, 沿 $C_1$ 和 $C_3$ 的积分相等, 所以, 方程(3.4)简化为

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{C_1} \frac{1}{|\mathbf{s}|^2} \log |\mathbf{s} \cdot \mathbf{x}| ds \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+s_2^2} \log(x_1 + s_2 x_2) ds_2 \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+p^2} \log(x_1 + p x_2) dp \end{aligned} \tag{3.5}$$

式中,  $\operatorname{Re}$ 表示复数的实部. (3.5)式中的被积函数在上半复平面只存在一级极点 $p=i$ , 由留数计算得

$$G(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \log(x_1 + i x_2) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \quad (r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \tag{3.6}$$

至此, 我们用平面波分解法得到了大家熟知的Laplace方程的基本解.

### 四、压电介质的基本解

本节将推广上节的求解过程确定压电介质的基本解. 考虑一无限大各向异性压电介质, 在 $x_3$ 轴上作用有均匀分布的线力和线电荷, 则场变量仅是 $x_1$ 和 $x_2$ 的函数. 用 $G_{JM}(\mathbf{x})$  ( $J, M = 1, 2, 3, 4$ )表示压电介质的基本解, 物理意义为:  $G_{mj}$ 和 $G_{m4}$ 分别表示作用在坐标原点 $O$ 处 $x_j$ 方向的线力和线电荷在 $\mathbf{x}$ 点沿 $x_m$ 方向产生的位移,  $G_{4j}$ 和 $G_{44}$ 分别表示作用在坐标原点 $O$ 处 $x_j$ 方向的线力和线电荷在 $\mathbf{x}$ 点产生的电势. 数学上,  $G_{JM}(\mathbf{x})$ 应满足下面的偏微分方程组:

$$\Gamma_{JM}(\partial_1, \partial_2) G_{MR}(\mathbf{x}) + \delta_{JR} \delta(\mathbf{x}) = 0 \tag{4.1}$$

式中

$$\Gamma_{JM}(\partial_1, \partial_2) = E_{\alpha J M \beta} \partial_\alpha \partial_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \tag{4.2}$$

对任一可微函数 $f(\mathbf{s} \cdot \mathbf{x})$ , 我们有关系式

$$\partial_\alpha f(\mathbf{s} \cdot \mathbf{x}) = s_\alpha f'(\mathbf{s} \cdot \mathbf{x}) \tag{4.3}$$

式中 $f' = df/dx$ .

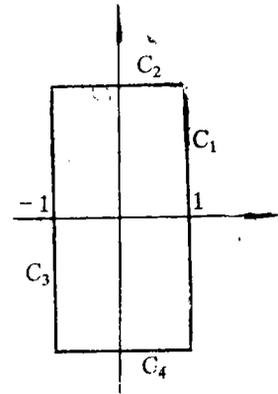


图1 积分路径

通过(4.3)式, 我们可以证明

$$\begin{aligned} & \Gamma_{JM}(\partial_1, \partial_2) \oint_C \Gamma_{MR}^{-1}(\mathbf{s}) \log(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\alpha}) d\mathbf{s} \\ &= \delta_{JR} \nabla^2 \oint_C \frac{1}{|\mathbf{s}|^2} \log(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\alpha}) d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (4.4)$$

式中

$$\Gamma_{JM}(\mathbf{s}) = E_{\alpha JM \beta} s_\alpha s_\beta, \quad \Gamma_{JM}(\mathbf{s}) \cdot \Gamma_{MR}^{-1}(\mathbf{s}) = \delta_{JP} \quad (4.5)$$

由(2.2)和(2.3)可以证明 $\Gamma_{JM}(\mathbf{s})$ 是对称和非奇异的, 所以 $\Gamma_{JM}(\mathbf{s})$ 的逆 $\Gamma_{JM}^{-1}(\mathbf{s})$ 存在. 从(4.5)易知, $\Gamma_{JM}(\mathbf{s})$ 和 $\Gamma_{JM}^{-1}(\mathbf{s})$ 有下面的性质

$$\Gamma_{JM}(\lambda \mathbf{s}) = \lambda^2 \Gamma_{JM}(\mathbf{s}), \quad \Gamma_{JM}^{-1}(\lambda \mathbf{s}) = \lambda^{-2} \Gamma_{JM}^{-1}(\mathbf{s}) \quad (4.6)$$

的齐次性.

由(4.4)和(3.2)两式, 得满足方程(4.1)的解 $G_{RM}(\boldsymbol{\alpha})$ 为

$$G_{MR}(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_C \Gamma_{MR}^{-1}(\mathbf{s}) \log|\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\alpha}| d\mathbf{s} \quad (4.7)$$

利用(4.6)和上节计算曲线积分的分析过程, 上式简化为

$$\begin{aligned} G_{MR}(\boldsymbol{\alpha}) &= -\frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{MR}^{-1}(1, p) \log(x_1 + px_2) dp \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_{MR}^*(p)}{D(p)} \log(x_1 + px_2) dp \end{aligned} \quad (4.8)$$

式中

$$\Gamma_{MR}^*(p) = \operatorname{adj}[\Gamma_{MR}(1, p)], \quad D(p) = \det[\Gamma_{MR}(1, p)] \quad (4.9)$$

注意到 $\Gamma_{MR}^*(p)$ 和 $D(p)$ 分别为 $p$ 的6次和8次多项式, 由于 $C_{ijmn}$ 和 $\alpha_{ij}$ 的正定性, 可以证明多项式 $D(p)$ 仅存在四对共轭复根, 即

$$D(p_m) = 0 \quad (m=1, 2, \dots, 8) \quad (4.10)$$

我们令

$$p_{m+4} = \bar{p}_m, \quad \operatorname{Im}(p_m) > 0 \quad (m=1, 2, 3, 4) \quad (4.11)$$

其中,  $\bar{p}_m$ 表示 $p_m$ 的共轭,  $\operatorname{Im}$ 表示复数的虚部.  $D(p)$ 可表示为

$$D(p) = \sum_{i=0}^8 a_i p^i = a_8 \prod_{m=1}^4 (p - p_m)(p - \bar{p}_m) \quad (4.12)$$

式中 $a_i$ 是八次多项式函数的系数. 假定 $D(p)$ 的根是不相同的, 用留数定理计算(4.8)中的积分, 得到 $G_{MR}(\boldsymbol{\alpha})$ 的显含形式为

$$G_{MR}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{m=1}^4 \frac{\Gamma_{MR}^*(p_m)}{\partial_p D(p_m)} \log(z_m) \right\} \quad (4.13)$$

式中

$$z_m = x_1 + p_m x_2 \quad (4.14)$$

当 $D(p)$ 存在重根时, 我们称相应的压电材料是“退化”的, 此时修正(4.13)为

$$G_{MR}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{m=1}^r \partial_p^{(\iota-1)} \left[ \frac{\Gamma_{MR}^*(p_m)}{D_m(p_m)} \log(z_m) \right] \right\} \quad (4.15)$$

式中,  $r$ 和 $t$ 分别为相异根的个数和根的重数, 而且

$$D_m(p) = \eta_m D(p) / (p - p_m)^t \tag{4.16}$$

$$\eta_m = \begin{cases} 1, & t=1, 2 \\ 1/2, & t=3 \\ 1/6, & t=4 \end{cases} \tag{4.17}$$

在(4.13)和(4.15)两式中, 使用了表达式

$$\partial_p f(p_m) = [\partial f / \partial p]_{p=p_m} \tag{4.18}$$

(4.15)式即为一般二维各向异性压电介质的基本解, 当 $e_{ijk}=0$ 时, 便分别得到各向异性弹性介质和各向异性电介质的基本解。

### 五、特例: 横观各向同性压电介质的基本解

在工程中, 许多得到广泛应用的压电材料具有横观各向同性的性能, 如压电陶瓷。假定 $x_1-x_2$ 平面为各向同性面,  $x_3$ 与极化方向一致, 这类压电材料的本构方程为

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{12})/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{23} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

对横观各向同性压电介质的二维问题, 由上节经简单推导得到

$$\Gamma^{-1}(1, p) = \begin{bmatrix} \Gamma_e^{-1}(1, p) & 0 \\ 0 & \Gamma_p^{-1}(1, p) \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

式中

$$\Gamma_e^{-1}(1, p) = \frac{1}{C_{11}(C_{11}-C_{12})(p^2+1)^2} \begin{bmatrix} 2C_{11}p^2+C_{11}-C_{12} & -(C_{11}+C_{12})p \\ -(C_{11}+C_{12})p & 2C_{11}+(C_{11}-C_{12})p^2 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

$$\Gamma_p^{-1}(1, p) = \frac{1}{(e_{15}^2+\alpha_{11}C_{44})(1+p^2)} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & e_{15} \\ e_{15} & -C_{44} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

其中,  $\Gamma_e^{-1}(1, p)$ 表示与面内变形( $u_1, u_2$ )相关的矩阵,  $\Gamma_p^{-1}(1, p)$ 表示与面外变形和电势( $u_3, \varphi$ )相关的矩阵。前者类似于各向同性弹性介质的平面应变问题, 后者表明面内电场和反平面变形是相互耦合的, 通过简单推导, 基本解的非零分量为:

$$\begin{bmatrix} G_{11}(\mathbf{x}) & G_{12}(\mathbf{x}) \\ G_{21}(\mathbf{x}) & G_{22}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \frac{1}{8\pi C_{66}(1-\nu_{12})} \begin{bmatrix} (3-4\nu_{12})\log(1/r) - y^2/r^2 & xy/r^2 \\ xy/r^2 & (3-4\nu_{12})\log(1/r) + y^2/r^2 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\begin{bmatrix} G_{33}(\mathbf{x}) & G_{34}(\mathbf{x}) \\ G_{43}(\mathbf{x}) & G_{44}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi(1+k)} \begin{bmatrix} C_{44}^{-1} & ke_{15}^{-1} \\ ke_{15}^{-1} & -\alpha_{11}^{-1} \end{bmatrix} \log \frac{1}{r} \quad (5.6)$$

式中,  $\nu_{12}$  为泊松比,  $k=e_{15}^2/(C_{44}\alpha_{11})$ . 方程(5.5)与各向同性材料的基本解的经典结果一致.

## 六、结 论

本文应用平面波分解法和留数定理推导了一般二维各向异性压电介质的基本解, 其优点是避开了Fourier变换方法的反演过程, 求解过程简单、清晰. 本文的基本解为用边界元法求解压电介质的机电耦合问题奠定了基础.

## 参 考 文 献

- [1] B. Wang, Three-dimensional analysis of an ellipsoidal inclusion in a piezoelectric material, *Int. J. Solids Struct.*, **29**(3) (1992), 293-308.
- [2] B. Wang, Three-dimensional analysis of a flat elliptical crack in a piezoelectric material, *Int. J. Engng. Sci.*, **30**(6) (1992), 781-791.
- [3] S. Y. Du, et al., The general solution of anisotropic piezoelectric materials with an elliptic inclusion, *Acta Mech. Sin.*, **10**(3) (1994), 273-291.
- [4] Y. E. Pak, Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric materials, *Int. J. Fracture*, **54** (1992), 79-100.
- [5] Z. Suo, et al., Fracture mechanics for piezoelectric ceramics, *J. Mech. Phys. Solids*, **40**(4) (1992), 739-769.
- [6] H. Sosa, Plane problems in piezoelectric media with defects, *Int. J. Solids Struct.*, **28**(4) (1991), 491-505.
- [7] J. S. Lee and L. Z. Jiang, A boundary integral formulation and 2-D fundamental solutions for piezoelectric media, *Mech. Res. Commun.*, **21**(1) (1994), 47-54.
- [8] 孟庆元、杜善义, 压电介质二维边界积分方程中的基本解, *固体力学学报*, **16**(1) (1995), 90-94.
- [9] D. M. Barnett and J. Lothe, Dislocation and line charges in anisotropic piezoelectric insulators, *Phys. Status. Solidi(b)*, **67** (1975), 105-111.
- [10] I. M. Gel'fand, M. I. Graev and N. Ya. Vilenkin, *Generalized Functions*, Vol. 5, Academic Press, New York (1996).

## Two-Dimensional Electroelastic Fundamental Solutions for General Anisotropic Piezoelectric Media

Liu Jinxi

*(Department of Civil Engineering, Shijiazhuang Railway Institute,  
Shijiazhuang 050043, P. R. China)*

Wang Biao Du Shanyi

*(Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P. R. China)*

### Abstract

Explicit formulas for 2-D electroelastic fundamental solutions in general anisotropic piezoelectric media subjected to a line force and a line charge are obtained by using the plane wave decomposition method and a subsequent application of the residue calculus. "Anisotropic" means that any material symmetry restrictions are not assumed. "Two dimensional" includes not only in-plane problems but also anti-plane problems and problems in which in-plane and anti-plane deformations couple each other. As a special case, the solutions for transversely isotropic piezoelectric media are given.

**Key words** piezoelectric medium, plane wave decomposition method, electroelastic field, fundamental solution