应用数学和力学，第18卷 第10期（1997年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

奇点处分岔解支的数目问题*

周 鹍[1]

（刘曾荣推荐，1995年7月19日收到；1997年1月1日收到修改稿）

摘 要

本文在孤立奇点的假设下证明了带参数非线性方程组解的孤立性，同时指出在分岔点处必有而且仅有有限条解支分岔出来．这一结论是分岔问题数值方法的一个理论基础．

关键词 同伦 延续算法 分岔 孤立奇点

一、前 言

考虑非线性方程组

$$F(x,\ \lambda)=0 \tag{1.1}$$

$x\in X\subset R^n$，$\lambda\in R$，F：$X\times R\to R^n$是C^1函数．近20年来，求解(1.1)的最有效方法之一是伪弧长算法（即同伦算法）[1],[2]．同伦算法能得以成功实施的理论基础是Sard定理．

定义1[2] 设映射 H：$R^m\to R^n$是C^1连续可微的$(m\geqslant n)$，如果 $\mathrm{Rank}(DH(x_0))<n$，则称$x_0\in R^m$是H的一个临界点，否则称为H的一个正则点；如果对所有的 $x\in H^{-1}(y_0)$包含至少一个H的临界点x_0，则称$y_0\in R^n$是H的一个临界值，否则称为H的一个正则值．

Sard定理[3] 设 H：$R^n\times R\to R^n$是 C^1 连续可微的，如果 $b\in R^n$ 是H的正则值，则集合$\{\lambda\in R\,|\,b$ 是$H(\cdot,\ \lambda)$的临界值$\}$在 R 中的 Lebesgue 测度为零，即几乎对所有 $\lambda\in R$，b 均是$H(\cdot,\ \lambda)$的正则值．

为了求f：$R^n\to R^n$的零点，定义如下的同伦映射

$$H(x,\ \lambda,\ p)=(1-\lambda)(x-p)+\lambda f(x),\qquad p\in R^n \tag{1.2}$$

对满足$H(x,\ \lambda,\ p)=0$的$(\bar{x},\ \bar{\lambda},\ \bar{p})$，因为$D_pH(\bar{x},\ \bar{\lambda},\ \bar{p})=-(1-\bar{\lambda})I$，当$\bar{\lambda}\neq 1$时，有

$$\mathrm{Range}(DH(\bar{x},\ \bar{\lambda},\ \bar{p}))\supset \mathrm{Range}(D_pH(\bar{x},\ \bar{\lambda},\ \bar{p}))=R^n \tag{1.3}$$

所以$0\in R^n$是$H(\cdot,\ \cdot,\ p)$的正则值．由Sard定理知几乎对所有$p\in R^n$，0也是$H(\cdot,\ \cdot,\ p)$的正则值．设Γ_p是光滑一维流形$H_p^{-1}(0)\cap R^n\times(0,\ 1)$上的一段，它的两个端点分别为$(p,\ 0)$与$(x^*,\ 1)$，则$\Gamma_p$是一条光滑曲线，且有$f(x^*)=0$．伪弧长算法可以追踪曲线$\Gamma_p$直至求出$x^*$点．

在用延续算法追踪(1.1)的解支时，不可避免地会碰到转折点、分岔点之类的奇点．以下

* 国家自然科学基金、非线性科学攀登计划资助项目

1 北京大学力学与工程科学系，北京 100871

我们称满足(1.1)的点(x, λ)为F的零点；若零点(x, λ)同时满足$\det(DF(x, \lambda)/Dx)=0$，则称$(x, \lambda)$为$F$的奇点，否则称为$F$的正则点。(1.1)的连续解支用弧长参数$s$表征为$(x(s), \lambda(s))$。

定义2[3] 如果存在F的零点$(x_0, \lambda_0)\in X\times R$和$(x_0, \lambda_0)$的邻域$U\subset X\times R$，使得对任意$(x_0, \lambda_0)$的邻域$V$，$V\subset U$，在$V$内都存在$F$的零点$(x_1, \lambda)$、$(x_2, \lambda)$，但$x_1\neq x_2$，则称$(x_0, \lambda_0)$是(1.1)解流形上的一个分岔点。

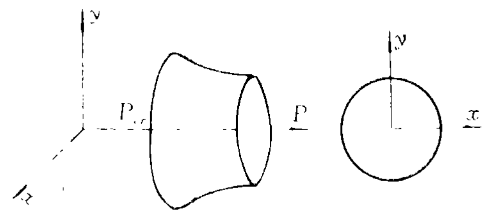
对已经得到的F的零点(x, λ)，在数值计算中人们首先要关心的一个问题是：从(x, λ)出发的(1.1)的连续解支有多少？如果这样的解支是有限的，我们才可以用延续算法来逐一追踪。若(x, λ)是F的正则点，隐函数定理保证了在(x, λ)邻域内(1.1)仅有唯一的连续解支穿过(x, λ)；但若(x, λ)是F的奇点，则会出现极端反常的现象。

例1

$$f(x, \lambda)=\begin{cases}(x^2+\lambda^2)^3\sin(x^2+\lambda^2)^{-1}, & x^2+\lambda^2\neq 0,\\ 0, & x^2+\lambda^2=0,\end{cases}\qquad x, \lambda\in R \tag{1.4}$$

(1.4)的零点集合为$\{(x, \lambda)\,|\,x^2+\lambda^2=0\text{或}x^2+\lambda^2=1/k\pi, k\in\mathbf{N}\}$。显然$(x, \lambda)=(0, 0)$是(1.4)的一个分岔点，但不存在(1.4)的连续解支从(0, 0)处分岔出来。

例2 两端简支的圆截面Euler压杆[4]。当轴向压力$P>P_{cr}=\pi^2EI/l^2$时(EI为杆的弯曲刚度，l为杆长)，杆可以沿任一方向发生屈曲，分岔图如图1。此时$(x, y, P)=(0, 0, P_{cr})$是压杆问题的一个分岔点，从此点有无穷多个解分岔出来。



(图中x，y为杆中点的挠度)

图1 Euler压杆的分岔图

从上面两个例子可以看到，仅从分岔的定义出发，人们甚至不能确认是否必有(1.1)的连续解支从分岔点分岔出来；既使有，也不能确认这样的解支必是有限的。这给分岔理论，尤其是数值计算带来了麻烦。本文在F的奇点是孤立的假设下，证明了(1.1)必有从分岔点分岔出来的连续解支，而且这样的解支是有限的。

二、定理及其证明

称(x_0, λ_0)是F的孤立奇点是指存在(x_0, λ_0)的邻域，使得在该邻域内再无F的其它奇点。

引理1 对于给定的$\lambda^*\in R$，$F(\cdot, \lambda^*)$在开集$W\subset X$上零点集合的聚点必为$F(\cdot, \lambda^*)$的奇点。

证明 设$x^*\in X$是一个聚点，即存在$\{x_n\}\to x^*(n\to+\infty)$，$x_i\in W$，$F(x_i, \lambda^*)=0, i=1,$

2，…，由F的连续性可知x^*是$F(\cdot,\ \lambda^*)$的零点．

假定x^*为$F(\cdot,\ \lambda^*)$的正则点，即$\det[DF(x^*,\ \lambda^*)/Dx]\neq 0$，由$F$的光滑性知，存在以$x^*$为心的开球$B\subset X$使得对任意$x\in B$，$\det[DF(x,\ \lambda^*)/Dx]\neq 0$．而

$$0=F(x,\ \lambda^*)-F(x^*,\ \lambda^*)=[DF(\xi,\ \lambda^*)/Dx](x-x^*),\qquad x,\ \xi\in B \tag{2.1}$$

当且仅当$x=x^*$时成立，这与x^*为聚点矛盾，即x^*必为$F(\cdot,\ \lambda^*)$的奇点． □

推论1 对于给定的$\lambda^*\in R$，若$F(\cdot,\ \lambda^*)$在集$W\subset X$上无奇点，则$F(\cdot,\ \lambda^*)$在W上零点孤立，特别若W是有界闭集则$F(\cdot,\ \lambda^*)$在W上至多有有限个零点．

定理1 若F的奇点是孤立的，则对任意给定的$\lambda^*\in R$，$F(\cdot,\ \lambda^*)$在开集$W\subset X$上的零点孤立．

证明 对任意给定的$\lambda^*\in R$，若$F(\cdot,\ \lambda^*)$在W上无奇点，由推论1，定理1的结论自然成立．若$F(\cdot,\ \lambda^*)$在W上有奇点，我们只须证明对每个奇点$x^*\in W$，一定存在x^*的邻域$B\subset W$，使得$F(\cdot,\ \lambda^*)$在B上的零点孤立即可．

设$x^*\in W$，是$F(\cdot,\ \lambda^*)$的奇点，即$(x^*,\ \lambda^*)$是F的奇点．由奇点的孤立性知，存在$\alpha>0$，令

$$B_\alpha=\{(x,\ \lambda)\mid\sqrt{\|x-x^*\|^2+|\lambda-\lambda^*|^2}<2\alpha,\ x\in W,\ \lambda\in R\}\subset W\times R \tag{2.2}$$

$$V_\alpha=\{x\mid\|x-x^*\|<2\alpha,\ x\in W\}\subset W \tag{2.3}$$

使得F，$F(\cdot,\ \lambda^*)$分别在B_α，V_α上只有唯一的奇点$(x^*,\ \lambda^*)$与x^*．记

$$S=\{x\mid F(x,\ \lambda^*)=0,\ x\in V_\alpha\} \tag{2.4}$$

S为$F(\cdot,\ \lambda^*)$在V_α上的零点集合．以下用反证法证明S是有限集．

若S是无限集，由引理1，x^*必为S的唯一聚点．对任意给定的$t\in(0,\ \alpha)$，令

$$\left.\begin{aligned}&B_\alpha^*=\{(x,\ \lambda)\mid\|x-x^*\|\leqslant t,\ |\lambda-\lambda^*|\leqslant t,\ x\in W,\ \lambda\in R\}\subset B_\alpha\\&V_\alpha^*=\{x\mid\|x-x^*\|\leqslant t,\ x\in W\}\subset V_\alpha\\&S^*=S\cap V_\alpha^*\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

则S^*是无限集，而$S\backslash S^*$是有限集．

对任意的$x_0\in S^*\backslash\{x^*\}$，因为$(x_0,\ \lambda^*)$是$F$的正则点，由隐函数定理，在$B_\alpha^*$内唯一存在有(1.1)的连续单值解曲线$(x(s),\ \lambda(s))$穿越$(x_0,\ \lambda^*)$，且$(x(s),\ \lambda(s))$与$\partial B_\alpha^*$必有交点（因为$F$在$B_\alpha^*$内只有唯一奇点$(x^*,\ \lambda^*)$）．对任意的$y_0\in S^*\backslash\{x^*,\ x_0\}$，(1.1)的穿越$(y_0,\ \lambda^*)$的连续单值解曲线$(y(\bar{s}),\ \lambda(\bar{s}))$与$(x(s),\ \lambda(s))$在$B_\alpha^*$上无交点（否则交点为新的$F$的奇点）．因此，对所有$x\in S^*\backslash\{x^*\}$，在$B_\alpha^*$上有(1.1)的无穷多条连续单值解曲线，其中每一条唯一地对应于一点$(x,\ \lambda^*)$，$x\in S^*\backslash\{x^*\}(\lambda=\lambda^*)$，这些解曲线与$\partial B_\alpha^*$交于无穷多个互异的点$(\lambda>\lambda^*)$．令

$$\left.\begin{aligned}&\partial^1=\{(x,\ \lambda)\mid\|x-x^*\|\leqslant t,\ \lambda=\lambda^*+t\}\subset\partial B_\alpha^*\\&\partial^2=\{(x,\ \lambda)\mid\|x-x^*\|=t,\ \lambda^*\leqslant\lambda\leqslant\lambda^*+t\}\subset\partial B_\alpha^*\\&W^1=\{(x,\ \lambda)\mid F(x,\ \lambda)=0,\ (x,\ \lambda)\in\partial^1\}\\&U^1=\{(x,\ \lambda)\mid F(x,\ \lambda)=0,\ (x,\ \lambda)\in\partial^2\}\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

由推论1，W^1是有限集，因此U^1必为无限集．对任意$n\in\mathbf{N}$，令

$$\left.\begin{aligned}
&B^*_{\alpha_n}=\{(x,\ \lambda)\mid\|x-x^*\|\leqslant t,\ |\lambda-\lambda^*|\leqslant t/n\}\subset B^*_\alpha\\
&V^*_{\alpha_n}=\{x\mid\|x-x^*\|\leqslant t\}=V^*_\alpha\\
&S^*_n=S\cap V^*_{\alpha_n}=S^*\\
&\partial^1_n=\{(x,\ \lambda)\mid\|x-x^*\|\leqslant t,\ \lambda=\lambda^*+t/n\}\\
&\partial^2_n=\{(x,\ \lambda)\mid\|x-x^*\|=t,\ \lambda^*\leqslant\lambda\leqslant\lambda^*+t/n\}\subset\partial^2\\
&W^1_n=\{(x,\ \lambda)\mid F(x,\ \lambda)=0,\ (x,\ \lambda)\in\partial^1_n\}\\
&U^1_n=\{(x,\ \lambda)\mid F(x,\ \lambda)=0,\ (x,\ \lambda)\in\partial^2_n\}\subset U^1
\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

重复以上讨论可知，对任意$n\in\mathrm{N}$，U^1_n均为无限集。而$\partial^2_n\to\{(x,\ \lambda)\mid\|x-x^*\|=t,\ \lambda=\lambda^*\}(n\to+\infty)$，因此在$\{(x,\ \lambda)\mid\|x-x^*\|=t,\ \lambda=\lambda^*\}$上至少存在有一个$U^1$的聚点，即$F(\cdot,\ \lambda^*)$在$\{(x,\ \lambda)\mid\|x-x^*\|=t,\ \lambda=\lambda^*\}$上至少存在有一个零点。这里$t\in(0,\ \alpha)$是任意的。

另一方面，根据x^*是S的唯一聚点，令$V=\{x\mid\|x-x^*\|\leqslant\alpha/4\}\subset V_\alpha$，则$F(\cdot,\lambda^*)$在$V_\alpha\backslash V$上仅有有限个零点，所以存在$\beta$，$0<\beta<\alpha/4$，使得$F(\cdot,\ \lambda^*)$在$\{x\mid\|x-x^*\|=\alpha/4+\beta\}$上无零点。但$\alpha/4+\beta\in(0,\ \alpha)$，构成矛盾。故$S$必为有限集，即$F(\cdot,\ \lambda^*)$在$V_\alpha$上零点孤立。 □

定理1说明若F的奇点孤立，则$F(\cdot,\ \lambda^*)$的零点孤立。注意到定理1的证明中，在∂B^*_α上至多有F的有限个零点，因此有

定理2 若在$W\subset X$上$(x^*,\ \lambda^*)$是F的孤立奇点，则或者$(x^*,\ \lambda^*)$是F的孤立零点，或者从$(x^*,\ \lambda^*)$出发有(1.1)的连续解曲线，且这样的解曲线至多有有限条。

推论2 若$W\subset X$上F的奇点是孤立的，则(1.1)的连续解曲线至多是可数的；特别对$X\times R$上的有界闭集，其上至多有有限条(1.1)的连续解曲线。

推论2说明若F的奇点孤立，则(1.1)的连续解支在R^{n+1}中孤立。

三、在分岔理论中的应用

(1.1)的分岔点$(x_0,\ \lambda_0)$满足对任意充分小的$(x_0,\ \lambda_0)$的邻域V，F在V上都至少存在有两个不同的零点$(x_1,\ \lambda_1)$、$(x_2,\ \lambda_2)$，显然$(x_0,\ \lambda_0)$是F的奇点，且不是F的孤立零点。若分岔点$(x_0,\ \lambda_0)$是F的孤立奇点，由定理2可知(1.1)必有从$(x_0,\ \lambda_0)$处分岔出来的连续解支（至多为有限条），且其中至少有两条存在于超平面$\lambda=\lambda_0$的同侧($\lambda>\lambda_0$或$\lambda<\lambda_0$)。

对具有孤立奇点的系统(1.1)，人们可以利用数值方法来顺利地处理分岔问题[1],[2]。应用伪弧长算法追踪(1.1)的连续解支，在孤立分岔点处通过数值方法求得各解支的分岔方向，进而可以应用伪弧长算法继续追踪所感兴趣的解支。但若系统(1.1)具有非孤立的奇点，从计算的角度讲是不可以操作的。

以上结论虽然是针对单参数的非线性方程(1.1)证明的，对多参数的系统

$$F(x,\ \lambda)=0,\qquad x\in X\subset R^n,\ \lambda\in R^q\tag{3.1}$$

可同理证明类似的结论，不过此时(3.1)的解为R^{n+q}中的q维流形。

感谢武际可教授与作者进行的有益讨论。

参 考 文 献

[1] 季海波、武际可、胡海昌，分叉问题的几何描述及其计算方法，中国科学(A)，(9) (1991)，947.

[2] E. Allgower and K. Georg, *Numerical Continuation Methods*, Springer-Verlag (1990).

[3] S. N. Chow and J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag (1982).

[4] 武际可、苏先樾，《弹性系统的稳定性》，科学出版社 (1994).

On the Problem of the Number of Bifurcation Solutions at Singular Point

Zhou Kun

(Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, *P. R. China)*

Abstract

In this paper, it is proved that the solutions of a nonlinear equation are isolated under the condition that the singular points are isolated. It shows that there must have and only have finite solutions branching from bifurcation point. This is important for the numerical analysis of bifurcation problems.

Key words homotopy, continuation method, bifurcation, isolated singularity