应用数学和力学，第18卷 第10期（1997年10月） 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重庆出版社出版

关于Kuramoto-Sivashinsky方程的非线性Galerkin方法之注记*

伍渝江[1]

（汤任基推荐，1995年10月16日收到，1996年11月11日收到修改稿）

摘　要

本文致力于讨论求解Kuramoto-Sivashinsky方程的非线性Galerkin方法，我们采用了 s_m 个小尺度分量作反馈，并给出了收敛性结果，分析了误差估计。结论表明我们的修正方法是十分有效的。

关键词　非线性Galerkin方法　Kuramoto-Sivashinsky方程　无穷维动力系统

一、方　　程

考虑带周期边界条件的Kuramoto-Sivashinsky方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\nu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0\qquad x\in\left(-\frac{l}{2},\ \frac{l}{2}\right),t>0\\&u(x+l,t)=u(x,t)\\&u(x,0)=u_0(x)\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中$\nu>0$是任意的，$u_0(x)$具周期l和零均值。

适当选定具内积$(\cdot,\cdot)$和范数$|\cdot|$的Hilbert空间H，我们能把上述方程改写为H上的一个抽象发展方程。此处我们取空间H如下：

$$H=\{u\,|\,u\in L^2(-l/2,l/2)，u\text{是奇函数}\}$$

再给出另一个相关的空间V

$$V=H_p^2\left(-\frac{l}{2},\ \frac{l}{2}\right)\cap H$$

记其内积为$((\cdot,\cdot))$，范数为$\|\cdot\|$，则方程(1.1)可写为

$$\frac{du}{dt}+\nu Au+B(u,u)+Cu=f,\ u(0)=u_0\tag{1.2}$$

这里，H中算子A置为$A=\partial^4/\partial x^4$，其定义域为

$$D(A)=H_p^4\left(-\frac{l}{2},\ \frac{l}{2}\right)\cap H$$

---

* 国家教委科研基金部分资助项目

1 上海大学数学系，上海 201800；兰州大学数学系，兰州 730000

而$B(\cdot,\cdot): V\times V\to V'$是一个双线性算子

$$(B(u,v),w)=\int_{-l/2}^{l/2}u\frac{\partial v}{\partial x}w\,dx \qquad \forall u,v,w\in V$$

并且

$$Cu=\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & l<2\pi\\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\phi\dfrac{\partial u}{\partial x}+\phi' u, & l\geqslant 2\pi\end{cases}$$

$$f=\begin{cases}0, & l<2\pi\\ -\nu\phi^{(4)}-\phi''-\phi\phi', & l\geqslant 2\pi\end{cases}$$

函数$\phi=\phi(x)$如文[5]中那样选取，以保证算子$\nu A+C$的强制性，即：存在常数$\alpha>0$使得

$$((\nu A+C)u,u)\geqslant\alpha\|u\|^2, \qquad \forall u\in D(A) \tag{1.3}$$

二、算　法

设w_k，$k\in\mathbf{N}$是算子A的特征向量，即存在一组相应的λ_k，$k\in N$使得

$$Aw_k=\lambda_k w_k$$

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots,\ \text{且}\lambda_k\to\infty\ (k\to\infty)$$

不妨再设诸w_k构成H的一组正交规范基．事实上，我们可算得

$$\lambda_k=\left(\frac{2k\pi}{l}\right)^4,\ w_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2k\pi}{l}x \qquad (k=1,2,\cdots)$$

固定正整数$m\in\mathbf{N}$，并且设$s=s(m)\in\mathbf{N}$是与m有关的另一个正整数．考虑H中正交投影算子P_m，它将H投影到前m个特征向量$w_1,w_2,\cdots,w_m$张成的子空间上．据此，我们的修正的非线性 Galerkin 方法不再象最初那样，只寻找具有m个小尺度分量的近似解；与此相反，我们期望寻找一种具有$s(m)$个小尺度分量的近似解，亦即

$$u\approx y_m(t)+z_s(t)$$

$$y_m(t)=\sum_{j=1}^{m}g_{jm}(t)w_j\in P_mH$$

$$z_s(t)=\sum_{j=m+1}^{m+s}h_{jm}(t)w_j\in(P_{s+m}-P_m)H$$

近似解$y_m(t)+z_s(t)$满足

$$\frac{dy_m}{dt}+\nu Ay_m+P_m(B(y_m,y_m)+B(y_m,z_s)+B(z_s,y_m))+Cy_m=P_mf \tag{2.1}$$

$$\nu Az_s+(P_{s+m}-P_m)B(y_m,y_m)+Cz_s=(P_{s+m}-P_m)f \tag{2.2}$$

$$y_m(0)=P_mu_0 \tag{2.3}$$

定义V上的三线性形式b，

$$b(u,v,w)=\langle B(u,v),w\rangle_{V',V}, \qquad \forall u,v,w\in V$$

据此可知方程(2.1)～(2.3)等价于

$$\frac{d}{dt}(y_m,v)+((\nu A+C)y_m,v)+b(y_m,y_m,v)+b(y_m,z_s,v)$$
$$+b(z_s,y_m,v)=(f,v),\qquad \forall v\in P_mH \tag{2.4}$$
$$((\nu A+C)z_s,\tilde{v})+b(y_m,y_m,\tilde{v})=(f,\tilde{v}),\qquad \forall \tilde{v}\in(P_{s+m}-P_m)H \tag{2.5}$$
$$(y_m(0),v)=(u_0,v),\qquad \forall v\in P_mH \tag{2.6}$$

我们知道，非线性 Galerkin 方法首先于文[4]中提出。当时，人们是对称地选取$s=m$的。稍后不久，文[12]（亦见文[6]）就建议将个数m调整为$(d-1)m$（其中$d>2$）来近似小尺度分量。本文中，我们给出了一个比文[12]或[6]大得多的范围来调整个数。事实上，我们用的个数是m的非线性函数$s(m)$。这种推广给我们提供了选择最佳个数的可能性，利用最佳个数可获得比y_m+z_m和$y_m+z_{(d-1)m}$更好的近似解$y_m+z_{s(m)}$。

下面先就我们的算法，给出近似解的先验估计。

命题2.1

(i) 如果$l<2\pi$，则当$m\to\infty$时，y_m和z_s在$L^\infty(\mathbf{R}^+;H)\cap L^2(\mathbf{R}^+;V)$中有界。

(ii) 如果$l\geqslant 2\pi$，则对任何$T>0$，当$m\to\infty$时，y_m和z_s在$L^\infty(\mathbf{R}^+;H)\cap L^2(0,T;V)$中有界。 □

三、主要理论结果

定理3.1 设$u_0\in H$给定。则存在$m_0>0$，使得当$m\geqslant m_0$时，对任何固定的$s=s(m)$，问题(2.1)～(2.3)具有唯一的解$y_m(t)+z_{s(m)}(t)$，$t>0$。当$m\to\infty$时，y_m+z_s按以下意义收敛于Kuramoto-Sivashinsky方程的解u：

(i) 对所有的$T>0$和所有$1\leqslant p<\infty$，$L^2(0,T;V)$与$L^p(0,T;H)$中$y_m\to u$与$z_{s(m)}\to 0$都是强收敛；

(ii) $L^\infty(\mathbf{R}^+;H)$中$y_m\to u$与$z_{s(m)}\to 0$是弱*—收敛。 □

定理3.2 假定解u在$H_0^\sigma(-l/2,l/2)$中。给定正整数m，如果将$s(m)$取作

$$\gamma\cdot\max\{m[\sqrt{m}],\ m[m^{4/\sigma}]\}-m \tag{3.1}$$

（其中$\gamma>0$是一常数），则近似解y_m+z_s的误差将达到极小。 □

此后，我们将(3.1)记作s_m，即：

$$s_m=\gamma\cdot\max\{m[\sqrt{m}],\ m[m^{4/\sigma}]\}-m \tag{3.2}$$

为分析误差，我们取

$$\varepsilon_m=\varepsilon_m(x,t)=u-(y_m+z_s) \tag{3.3}$$

以下，我们按(3.2)取$s=s_m$，代入方程(2.1)～(2.3)及(2.4)～(2.6)，便可得如下的误差估计结果。（注意在以下场合中，c总是与m和函数u无关的常数，并且在不同的位置处可能具不同的值。）

定理3.3 设u_0在H中，则

(i) $l<2\pi$时有

$$|\varepsilon_m(\cdot,t)|\leqslant cm^{-(4+\sigma)}$$

关于$t>0$一致成立。

$$\|\varepsilon_m\|_{L^2(\mathbf{R}^+;V)}\leqslant cm^{-(4+\sigma)}$$

(ii) $l\geqslant 2\pi$时有

$$|\varepsilon_m(\cdot,t)|\leqslant cm^{-(4+\sigma)}$$

关于$0<t\leqslant T$成立。

$$\|\varepsilon_m\|_{L^2(0,T;V)}\leqslant cm^{-(4+\sigma)}$$ □

定理3.4 设u_0在V中，则

(i) $l<2\pi$时有

$$\|\varepsilon_m(\cdot,t)\|\leqslant cm^{-(4+\sigma)}$$

关于$t>0$一致成立。

$$\|A\varepsilon_m\|_{L^2(\mathbf{R}^+;H)}\leqslant cm^{-(4+\sigma)}$$

$$\sup_x|\varepsilon_m(\cdot,t)|\leqslant cm^{-(4+\sigma)}$$

关于$t>0$一致成立。

(ii) $l\geqslant 2\pi$时有

$$\|\varepsilon_m(\cdot,t)\|\leqslant cm^{-(4+\sigma)}$$

关于$0<t\leqslant T$一致成立。

$$\|A\varepsilon_m\|_{L^2(0,T;H)}\leqslant cm^{-(4+\sigma)}$$

$$\sup_x|\varepsilon_m(\cdot,t)|\leqslant cm^{-(4+\sigma)}$$

关于$0<t\leqslant T$一致成立。 □

四、一些引理

为了证明第三节中的定理，我们需要如下一些引理。

引理4.1 如果$u\in V$，则

$$b(u,u,u)=0 \tag{4.1}$$

证明 由定义，

$$b(u,u,u)=\int_{-l/2}^{l/2}u\frac{\partial u}{\partial x}udx=-2b(u,u,u)$$

因此$b(u,u,u)=0$。 □

引理4.2

$$|b(u,v,w)|\leqslant c|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|v\||w|^{\frac{1}{2}}\|w\|^{\frac{1}{2}},\qquad \forall u,v,w\in V \tag{4.2}$$ □

此不等式之证明类似于Navier-Stokes方程情形的同类型不等式（例如，参见[7]和[8]）。

引理4.3

$$\|Cu\|\leqslant c\|u\|,\qquad \forall u\in V \tag{4.3}$$

证明 $l<2\pi$时是平凡的。

$l\geqslant 2\pi$时有

$$|Cu|\leqslant\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|+\left|\phi\frac{\partial u}{\partial x}\right|+|\phi' u|$$

由ϕ的构造（参见[5]）及Sobolev嵌入定理便可得(4.3)。 □

引理4.4([7][8])

$$|B(u,v)|\leqslant\begin{cases}c|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}|Av|^{\frac{1}{2}}, & \forall u\in V,v\in D(A) \quad (4.4)\\ c|u|^{\frac{1}{2}}|Au|^{\frac{1}{2}}\|v\|, & \forall u,v\in D(A) \quad (4.5)\end{cases}$$

□

引理4.5([1][2])

$$|B(u,v)|\leqslant c\left(1+\log\frac{|Au|^2}{\lambda_1\|u\|^2}\right)^{\frac{1}{2}}\|u\|\|v\|, \qquad \forall u\in D(A),v\in V \tag{4.6}$$

□

引理4.6([14])

$$|B(u,v)|\leqslant c\left(3-\frac{\lambda_1\|u\|^2}{\tau|Au|^2}\right)^{\frac{1}{2}}\|u\|\|v\|, \qquad (\tau>0)$$

$$\forall u\in D(A),v\in V \tag{4.7}$$

□

引理4.7

$$b(y_m,z_s,y_m)+b(z_s,y_m,y_m)+b(y_m,y_m,z_s)=0 \tag{4.8}$$

证明 由定义和分部积分直接可得(4.8)。 □

引理4.8 如果$y(t)\geqslant0$ $(y(0)=0)$，$x(t)\geqslant0$，$g(t)\geqslant0$和$h(t)\geqslant0$满足

$$y'(t)+x(t)\leqslant g(t)y(t)+h(t), \qquad \forall t\geqslant0 \tag{4.9}$$

则

$$y(t)+\int_0^t x(\tau)d\tau\leqslant\int_0^t h(\tau)\exp\left[\int_0^t g(s)ds\right]d\tau \tag{4.10}$$

证明 在(4.9)式两端乘上因子

$$\exp\left[-\int_0^t g(s)ds\right]$$

后可得

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)\exp\left[-\int_0^t g(s)ds\right]\right]+x(t)\exp\left[-\int_0^t g(s)ds\right]$$

$$\leqslant h(t)\exp\left[-\int_0^t g(s)ds\right]$$

将上式从0到t积分后变成

$$y(t)\exp\left[-\int_0^t g(s)ds\right]+\int_0^t x(\tau)\exp\left[-\int_0^\tau g(s)ds\right]d\tau$$

$$\leqslant\int_0^t h(\tau)\exp\left[-\int_0^\tau g(s)ds\right]d\tau$$

因此

$$y(t)+\int_0^t x(\tau)d\tau\leqslant y(t)+\int_0^t x(\tau)\exp\left[\int_\tau^t g(s)ds\right]d\tau$$

$$\leqslant\int_0^t h(\tau)\exp\left[\int_\tau^t g(s)ds\right]d\tau$$

□

引理4.9 如果$u\in H_0^2(-l/2,l/2)$，则

$$|u-P_m u|\leqslant cm^{-\sigma}|d^\sigma u/dx^\sigma| \tag{4.11}$$

□

证明 考虑u的Fourier级数:

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\sin\frac{2k\pi}{l}x \tag{4.12}$$

易得

$$|u-P_m u|=\sqrt{\int_{-l/2}^{l/2}\left|\sum_{k=m+1}^{\infty}u_k\sin\frac{2k\pi x}{l}\right|^2dx}$$

$$=\sqrt{\frac{l}{2}\sum_{k=m+1}^{\infty}|u_k|^2}$$

$$\leqslant\sqrt{\left(\frac{2m\pi}{l}\right)^{-2\sigma}\cdot\frac{l}{2}\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\frac{2k\pi}{l}\right)^{2\sigma}|u_k|^2}$$

$$\leqslant cm^{-\sigma}\sqrt{\frac{l}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k\pi}{l}\right)^{2\sigma}|u_k|^2}$$

$$\leqslant cm^{-\sigma}\left|\frac{d^\sigma u}{dx^\sigma}\right|$$

□

引理4.10([15]) 对任何整数$s>0$,我们有

$$|z_s|\leqslant c\left(\frac{1}{\lambda_{m+1}m^\sigma}\right),\quad\left|\frac{\partial z_s}{\partial t}\right|\leqslant c\left(\frac{1}{\lambda_{m+1}m^\sigma}\right) \tag{4.13}$$

□

引理4.11 $l<2\pi$时存在常数$\beta>0$使得

$$\left(\frac{d^4u}{dx^4}+\frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{d^4u}{dx^4}\right)\geqslant\beta\left|\frac{d^4u}{dx^4}\right|^2,\qquad\forall u\in D(A) \tag{4.14}$$

证明 利用(4.12)可得

$$\left(\frac{d^4u}{dx^4}+\frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{d^4u}{dx^4}\right)=\frac{l}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|^2\left\{\left(\frac{2k\pi}{l}\right)^8-\left(\frac{2k\pi}{l}\right)^6\right\}$$

置$\delta=(2\pi-l)(2\pi+l)/4\pi^2$,便得到$\beta\in(0,\delta)$. □

如同[4]和[14]中所述,我们可以运用上述引理,进而得到定理3.1和定理3.2的证明.鉴于此,我们在下面直接推证定理3.3和定理3.4.

首先,分解ε_m为

$$\varepsilon_m(x,t)=\rho(x,t)+\theta(x,t) \tag{4.15}$$

其中

$$\rho(x,t)=u-P_{s_m+m}u,\quad\theta=\theta_1+\theta_2$$

$$\theta_1=P_m u-y_m,\quad\theta_2=P_{s_m+m}u-P_m u-z_{s_m}$$

由定义我们知道$\theta(x,t)$满足

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t}+A\theta_1+C\theta_1+P_m\left(u\frac{\partial u}{\partial x}-\left(y_m\frac{\partial y_m}{\partial x}+z_{s_m}\frac{\partial y_m}{\partial x}+y_m\frac{\partial z_{s_m}}{\partial x}\right)\right)=0 \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial t}+A\theta_2+C\theta_2+(P_{s_m+m}-P_m)\left(u\frac{\partial u}{\partial x}-y_m\frac{\partial y_m}{\partial x}\right)+\frac{\partial z_{s_m}}{\partial t}=0 \tag{4.17}$$

为了证明定理3.3，我们取(4.16)与θ_1的内积，并注意到

$$y_m\frac{\partial y_m}{\partial x}+z_{s_m}\frac{\partial y_m}{\partial x}+y_m\frac{\partial z_{s_m}}{\partial x}=(y_m+z_{s_m})\frac{\partial(y_m+z_{s_m})}{\partial x}-z_{s_m}\frac{\partial z_{s_m}}{\partial x}$$

$$\max\{|\theta_1|,|\theta_2|\}\leqslant|\theta|\leqslant\sqrt{|\theta_1|^2+|\theta_2|^2}$$

$$\max\{\|\theta_1\|,\|\theta_2\|\}\leqslant\|\theta\|\leqslant\sqrt{\|\theta_1\|^2+\|\theta_2\|^2}$$

通过对内积式用分部积分便获得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta_1|^2+\alpha\|\theta_1\|^2$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\sup_x\{|u+y_m+z_{s_m}|\}|u-(y_m+z_{s_m})|\left|\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\right|+\int_{-l/2}^{l/2}|z_{s_m}|^2\left|\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1}\right|dx\right)$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{2}\|\theta_1\|^2+\frac{c}{\alpha}\left\{\sup_x|u+y_m+z_{s_m}|^2(|\rho|^2+|\theta|^2)+\int_{-l/2}^{l/2}|z_{s_m}|^4dx\right\}$$

又取(4.17)与θ_2的内可积得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta_2|^2+\alpha\|\theta_2\|^2$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sup_x\{|u+y_m|\}|u-y_m|\left|\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial z_{s_m}}{\partial x}\right||\theta_2|$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{4}\|\theta_2\|^2+\frac{c}{\alpha}\sup_x\{|u+y_m|^2\}|u-y_m|^2+\frac{\alpha}{4}\|\theta_2\|^2+\frac{\alpha}{4}\left|\frac{\partial z_{s_m}}{\partial t}\right|^2$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{2}\|\theta_2\|^2+\frac{c}{\alpha}\left\{\sup_x|u+y_m|^2(|\rho|^2+|\theta|^2+|z_{s_m}|^2)+\left|\frac{\partial z_{s_m}}{\partial t}\right|^2\right\}$$

将它们加起来便有

$$\frac{d}{dt}(|\theta_1|^2+|\theta_2|^2)+\alpha(\|\theta_1\|^2+\|\theta_2\|^2)$$

$$\leqslant\frac{c}{\alpha}\left\{(\|u+y_m+z_{s_m}\|^2+\|u+y_m\|^2+\|z_{s_m}\|^2)(|\rho|^2+|\theta|^2\right.$$

$$\left.+|z_{s_m}|^2)+\left|\frac{\partial z_{s_m}}{\partial t}\right|^2\right\}$$

于是由引理4.8可知，当$l<2\pi$时，对所有的$t>0$一致地成立

$$|\theta_1(t)|^2+|\theta_2(t)|^2+\alpha\int_0^t(\|\theta_1(\tau)\|^2+\|\theta_2(\tau)\|^2)d\tau\leqslant cm^{-2(4+\sigma)}$$

注意到$|\rho|^2$有相同的估计以及

$$|\varepsilon_m|\leqslant\sqrt{|\rho|^2+|\theta|^2},\quad \|\varepsilon_m\|_{L^2(R^+;V)}\leqslant\sqrt{\|\rho\|^2_{L^2(R^+;V)}+\|\theta\|^2_{L^2(R^+;V)}}$$

我们便完成了$l<2\pi$情形下的证明.

$l\geqslant2\pi$时的结论可相仿证明.

至于定理3.4的证明，需要取(4.16)与$A\theta_1$的内积及(4.17)与$A\theta_2$的内积. 注意到关系式

$$\int_{-l/2}^{l/2}\left\{u\frac{\partial u}{\partial x}-\left(y_m\frac{\partial y_m}{\partial x}+z_{s_m}\frac{\partial y_m}{\partial x}+y_m\frac{\partial z_{s_m}}{\partial x}\right)\right\}A\theta_1dx$$

$$=\int_{-l/2}^{l/2}\Big\{(u-(y_m+z_{s_m}))\frac{\partial u}{\partial x}+(y_m+z_{s_m})\Big(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial(y_m+z_{s_m})}{\partial x}\Big)$$

$$+z_{s_m}\frac{\partial z_{s_m}}{\partial x}\Big\}A\theta_1 dx$$

和

$$\int_{-l/2}^{l/2}\Big\{\Big(u\frac{\partial u}{\partial x}-y_m\frac{\partial y_m}{\partial x}\Big)+\frac{\partial z_{s_m}}{\partial t}\Big\}A\theta_2 dx$$

$$=\int_{-l/2}^{l/2}\Big\{(u-y_m)\frac{\partial u}{\partial x}+y_m\Big(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial y_m}{\partial x}\Big)+\frac{\partial z_{s_m}}{\partial t}\Big\}A\theta_2 dx$$

直接由引理4.11便可推得

$$\frac{d}{dt}(\|\theta_1\|^2+\|\theta_2\|^2)+\beta(|A\theta_1|^2+|A\theta_2|^2)$$

$$\leqslant\frac{c}{\beta}\Big(\max\{\|u\|^2,\|y_m\|^2,\|z_{s_m}\|^2\}(\|\rho\|^2+\|\theta\|^2+\|z_{s_m}\|^2)+\Big|\frac{\partial z_{s_m}}{\partial t}\Big|^2\Big)$$

和

$$\|\theta_1(t)\|^2+\|\theta_2(t)\|^2+\beta\int_0^t(|A\theta_1(\tau)|^2+|A\theta_2(\tau)|^2)d\tau\leqslant cm^{-(4+\sigma)}$$

上述式子对所有$t>0$一致成立．于是我们完成了结论的证明．

笔者非常感谢郭本瑜教授和王德人教授的悉心指导和鼓励．

参 考 文 献

[1] C. Foias, O. Manley and R. Temam, Modelling of the interaction of small and large eddies in two dimensional turbulent flows, *RAIRO Math. Model. Numer. Anal.*, **22** (1988), 93—118.

[2] C. Foias, O. Manley, R. Teman and Y. Trève, Asymptic analysis of the Navier-Stokes equations, *Physica D*, **9** (1983), 157—188.

[3] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris (1969).

[4] M. Marion and R. Temam, Nonlinear Galerkin methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, **26** (1989), 1139—1157.

[5] B. Nicolaenko, B. Scheurer and R. Temam, Some global dynamical properties of the Kuramoto-Sivashinshy equation: nonlinear stability and attractors, *Physica D*, **16** (1985), 155—183.

[6] J. Shen, Long time stability and convergence for fully discrete nonlinear Galerkin methods, *Appl. Anal.*, **38** (1990), 201—229.

[7] R. Temam, *Navier-Stokes Equations*, Third edition, North-Holland, Amsterdam, New York (1984).

[8] R. Temam, *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia (1983).

[9] R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Appl. Math. Sci. 68, Springer-Verlag, Berlin, New York (1988).

[10] R. Temam, Variétés innertielles approximatives pour les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles, *C. R. Acad. Sci., Sér.* **I**, **306** (1988), 399—402.

[11] R. Temam, Induced trajectory and approximate inertial manifolds, *RAIRO Math. Model. Numer. Anal.*, **23** (1989), 541—561.

[12] R. Temam, Dynamical systems, turbulence and the numerical solution of the Navier-Stokes equations, in: D. L. Dwoyer and R. Voigt, eds, *The Proceedings of the Eleventh International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag (1989).

[13] 伍渝江, 关于近似惯性流形及其数值方法的研究, 力学进展, **24** (1994), 145—153.

[14] Y. J. Wu, A nonlinear Galerkin method with variable modes for Kuramoto-Sivashinshy equation: analysis and computation, *J. Comput. Math.*, (to appear).

[15] Z. H. Yang, A. Mahmood and R. S. Ye. Fully discrete nonlinear Galerkin methods for Kuramoto-Sivashinsky equation and their error estimates, *J. Shanghai University (English Edition)*, (1) (1997), 20—27.

Remarks on Nonlinear Galerkin Method for Kuramoto-Sivashinsky Equation

Wu Yujiang

(*Department of Mathematics., Shanghai University, Shanghai* 201800;
Department of Mathematics, Lanzhou University,
Lanzhou 730000, *P.R.China*)

Abstract

This paper is concentrated on a nonlinear Galerkin method with $\dot{s}_m$ small-scale components for Kuramoto-Sivashinsky equation, in which convergence results and the analysis of error estimates are given. The conclusion shows that this choice of modes is efficient for the method modified.

Key words nonlinear Galerkin method, Kuramoto-Sivashinsky equation, infinite dimensional dynamical systems