应用数学和力学，第18卷 第10期（1997年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 弱阻尼KdV方程中长期动力学行为研究*

田立新[1]　　徐振源[2]

（许政范推荐，1995年10月5日收到，1996年11月4日收到修改稿）

**摘　　要**

证明了周期边界条件下弱阻尼 KdV 方程存在近似惯性流形。该流形使吸引子被确切定义的有限维光滑流形逼近。并由此概念引出新的数值方法很好地用于研究动力系统长期行为。

**关键词**　近似惯性流形　弱阻尼KdV方程　动力系统　吸引子

## 一、引　　言

Korteweg-de Vries(KdV)方程

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1.1}$$

最初起源于水槽中小振幅长水波传播的模型。自从Korteweg及de Vries的工作以来，已证得该方程在大量的非线性及色散起重要作用的物理领域有较大影响。多数情况下不能忽略能量耗散及外部刺激。因此我们引出如下形式的方程

$$u_t+u_{xxx}-\eta u_{xx}+\gamma u+uu_x=f \tag{1.2}$$

其中$f$表示外部刺激，$-\eta u_{xx}+\gamma u$是阻尼项。方程(1.2)含有较强的耗散性。研究该方程的兴趣在于关于无穷维动力系统(1.2)中自由度确切数受耗散性的影响。

惯性流形由 Foias[1]等人引入，它是一个用于描述发展方程解的长期行为的非常便利的工具。该类流形是有限维 Lipschitz流形，含有一致吸引子且指数吸引所考虑系统的所有解。当动力系统限制到惯性流形，动力系统约化为有限维常微分方程。但，这种流形的存在性依赖于谱间隙条件及扇形微分算子条件。这两种条件已证明极大限制了应用。对许多数学物理方程惯性流形的存在不得而知。为克服这些困难，[1]引入近似惯性流形。这些流形是有限维光滑流形，使得所有轨道在特定时间后进入一个该流形的细邻域之中（见[2]）。弱阻尼KdV方程是一类典型的微分算子，并不是扇形的。

本文目的是导出弱阻尼KdV方程近似惯性流形的存在性。在另文，我们将建立这类流形的图案动力学及长期混沌研究。本文有关符号同于[3]、[5]、[8]、[9]。

---

* 国家自然科学基金和机械工业部科技基金资助课题

1 江苏理工大学数理系，江苏镇江市 212013

2 无锡轻工业学院基础部，江苏无锡市 214000

# 二、近似惯性流形

我们考虑如下弱阻尼KdV方程，$\eta>0$，$\gamma>0$

$$u_t+u_{xxx}-\eta u_{xx}+\gamma u+uu_x=f \tag{2.1}$$

$$u(x+2\pi,\ t)=u(x,\ t),\qquad x\in R,\ t\geqslant 0 \tag{2.2}$$

$$u(x,\ 0)=u_0(x)\in H^2_{2\pi} \tag{2.3}$$

$$f\in H^3_{2\pi}\qquad (\text{与时间}t\text{无关}) \tag{2.4}$$

**定理2.1** (见[3]、[5]) 在(2.1)～(2.4)中，成立

$$\lim_{t\to\infty}\sup\|u(t)\|_2^2\leqslant k$$

$k$是不依赖于初值的常数.

对(2.1)～(2.4)作椭圆正则化处理.

设$H=L^2[0,\ 2\pi]$，$V=H^2_{2\pi}$，$\Omega=[0,\ 2\pi]$. 考虑如下方程

$$u_t+\varepsilon u_{xxxx}+A_0u=R(u),\qquad x\in\Omega,\ t>0 \tag{2.5}$$

具有周期边界条件，其中 $A_0u=u_{xxx}-\eta u_{xx}+\gamma u$. 对$\varepsilon>0$我们定义 $A_\varepsilon u=\varepsilon u_{xxxx}+A_0u$，$D(A_\varepsilon)=H^4_{2\pi}$，$R(u)=f-uu_x$ 且 $Bu=u_{xxxx}$. 这时算子 $-A_0$，$-\varepsilon B$ 及 $-A_\varepsilon$ 生成$C_0$半群，分别记为 $\exp[-A_0t]$，$\exp[-\varepsilon Bt]$及$\exp[-A_\varepsilon t]$. 因为$A_0$不是扇形算子，半群 $\exp[-A_0t]$ 不是解析半群. 但半群$\exp[-\varepsilon Bt]$及$\exp[-A_\varepsilon t]$是解析的，$\varepsilon>0$.

我们很容易求得$A_0$，$\varepsilon B$和$A_\varepsilon$的特征值如下

$$\lambda_n=(\eta n^2+\gamma)+in^3,\qquad n\in Z$$

$$\lambda_n^b=\varepsilon n^4,\qquad n\in Z$$

$$\lambda_n^\varepsilon=(\varepsilon n^4+\eta n^2+\gamma)+in^3,\qquad n\in Z,\ i=\sqrt{-1}$$

相应的特征向量均为$\varphi_n(x)=(2\pi)^{-1/2}e^{inx}$，$n\in Z$. 集$\{\varphi_n\}_{n\in Z}$形成$H$中一个正交基. $R(u)$是从$D(A_\varepsilon)=H^4_{2\pi}$到$D(A_\varepsilon^{3/4})=H^3_{2\pi}$的一个映射且

$$|A_\varepsilon^{3/4}R(u)|\leqslant C_1,\qquad u\in H_1,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$$

$$|A_\varepsilon^{3/4}R(u_1)-A_\varepsilon^{3/4}R(u_2)|\leqslant C_2|A_\varepsilon u_1-A_\varepsilon u_2|,\qquad u_1,\ u_2\in H_1,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$$

$$|R(u_1)-R(u_2)|\leqslant C_3\|u_1-u_2\|,\qquad u_1,\ u_2\in V$$

其中$\varepsilon_0$为常数，$C_i$，$i=1,\ 2,\ 3$是与$\varepsilon$无关的常数.

任意$\varepsilon>0$，$A_\varepsilon$是扇形算子且有紧预解式，事实上$\rho(A_\varepsilon)\supset\Sigma(\omega_0,\ \delta_0)$（见[11]），$\delta_0=\gamma/2$，$\omega_0\in(\arctan(1/2\sqrt{\varepsilon\eta}),\ \pi/2)$，且

$$(A_\varepsilon u,\ u)\geqslant\min(\varepsilon,\ \eta,\ \gamma)\|u\|_2^2>\min(\varepsilon,\ \eta,\ \gamma)|u|^2,\qquad u\in D(A_\varepsilon)$$

当$f\in H^3_{2\pi}$，则$R(u)=f-uu_x$：$H^4_{2\pi}\to H^3_{2\pi}$，事实上

$$H^4[0,\ 2\pi]\subset W^{2,4}[0,\ 2\pi]\cap W^{1,6}[0,\ 2\pi]\cap W^{3,3}[0,\ 2\pi]\cap L^\infty[0,\ 2\pi]$$

对任意给定$\alpha>\gamma$，构造围道$\Gamma_{\varepsilon,\alpha}$与[3]中相同，使$\omega_0=\omega_0(\varepsilon)$. 设

$$P_{\varepsilon,\alpha}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{\varepsilon,\alpha}}R(\lambda;\ A_\varepsilon)d\lambda,\qquad Q_{\varepsilon,\alpha}=I-P_{\varepsilon,\alpha}$$

这儿我们设没有谱点在直线$\mathrm{Re}\lambda=\alpha$. 则存在唯一被围道$\Gamma_{\varepsilon,\alpha}$围住的$\sigma(A_\varepsilon)$中特征值有限数. 记这种的特征值为$\{\lambda_n^\varepsilon:\ |n|\leqslant n_\alpha\}$. 则$\dim P_{\varepsilon,\alpha}H=2n_\alpha+1$且

$$P_{\varepsilon,\alpha}H=\mathrm{span}\{\varphi_n:\ |n|\leqslant n_\alpha\},\quad Q_{\varepsilon,\alpha}H=\mathrm{span}\{\varphi_n:\ |n|>n_\alpha\}$$

因为特征向量系形成$H$中正交基，则对所有$\varepsilon>0$，$\alpha>\gamma$有$\|P_{\varepsilon,\alpha}\|=\|Q_{\varepsilon,\alpha}\|=1$. 设$P_N$是

到空间span$\{\varphi_n: |n|\leqslant N\}$投影，$Q_N=I-P_N$，或记为$P$，$Q$。由[11]有

**定理2.2** 当$\varepsilon>0$，(2.5)存在近似惯性流形$M_1^\varepsilon$.

接下来研究$\varepsilon\to 0^+$时方程(2.5)近似惯性流形$M_1$的行为．将证明$M_1^\varepsilon$收敛于极限流形$M_1^0$，它是方程(2.1)周期边界条件下的近似惯性流形.

**引理2.3** 设$\varepsilon>0$，方程

$$\varepsilon q^\varepsilon_{xxxx}+q^\varepsilon_{xxx}-\eta q^\varepsilon_{xx}+\gamma q^\varepsilon=Q_N R(p)$$

其中$R(p)=f-pp_x$，具有$H^3_{2\pi}$中唯一解。

**证明** 定义$H^2_{2\pi}(\Omega)\times H^2_{2\pi}(\Omega)$中双线性形式为

$$a(q,\ \xi)=\int_\Omega(\varepsilon q_{xx}\xi_{xx}+q_{xxx}\xi-\eta q_{xx}\xi+\gamma q\xi)dx$$

则$a(q,\ q)\geqslant\min(\varepsilon,\ \gamma,\ \eta)\|q\|_2^2$．由Lax-Milgram引理，存在$q^\varepsilon$使

$$a(q^\varepsilon,\ \xi)=\int_\Omega Q_N R(p)\xi dx$$

且 $$\|q^\varepsilon\|_2\leqslant C_4|Q_N R(p)|_{-2}\leqslant C_4|Q_N R(p)|_0$$

则 $$q^\varepsilon=A_\varepsilon^{-1}Q_N R(p)$$

**引理2.4** 由引理2.3，定义$q^\varepsilon=\Phi^\varepsilon(p)$，$p\in PH=H_p$，则$\|D\Phi^\varepsilon\|_{1,\infty}\leqslant C_5$，这儿

$$D=\frac{\partial}{\partial p},\quad \|B\|_{1,\infty}=\sup_{u\in D(A)}|B(u)|_1$$

**证明** 改变方程(2.5)为

$$p_\varepsilon'+A_\varepsilon p_\varepsilon=P_N R(p_\varepsilon+q_\varepsilon),\quad q_\varepsilon'+A_\varepsilon q_\varepsilon=Q_N R(p_\varepsilon+q_\varepsilon) \tag{2.6}$$

这里$p_\varepsilon=Pu$，$q_\varepsilon=Qu$．若$\theta_\rho(r)$是截断函数且$F(u)=\theta_\rho(|A_\varepsilon u|^2)R(u)$，得到修正方程

$$p_\varepsilon'+A_\varepsilon p_\varepsilon=P_N F(p_\varepsilon+q_\varepsilon),\quad q_\varepsilon'+A_\varepsilon q_\varepsilon=Q_N F(p_\varepsilon+q_\varepsilon)$$

因此，若$p\in H_p$，$q^\varepsilon=\Phi^\varepsilon(p)$，$dq^\varepsilon/dt=D\Phi^\varepsilon dp/dt$，则

$$D\Phi^\varepsilon(P_N F(p+\Phi^\varepsilon(p))-A_\varepsilon p)=Q_N F(p+\Phi^\varepsilon(p))-A_\varepsilon\Phi^\varepsilon(p)$$

考虑下述方程，对$\beta>0$，$\Delta\Phi^\varepsilon=\partial^2\Phi^\varepsilon/\partial p^2$，则

$$-\beta\Delta\Phi^\varepsilon+A_\varepsilon\Phi^\varepsilon+D\Phi^\varepsilon(P_N F(p+\Phi^\varepsilon)-A_\varepsilon\Phi)=Q_N F(p+\Phi^\varepsilon)$$

去解(2.6)的探讨转为构造有限维非线性方程解的无穷序列$\{\Phi_\varepsilon^n\}_{n=1}^\infty$

$$\beta_n\Delta\Phi_\varepsilon^n+A_\varepsilon\Phi_\varepsilon^n+D\Phi_\varepsilon^n(F^{p,n}(p)-A_\varepsilon p)=F^{r,n}(p),\qquad p\in H_p,\ n\geqslant 1 \tag{2.7}$$

这里 $F^{p,n}(p)=P_N F(p+\Phi_\varepsilon^n(p))$，$F^{r,n}(p)=R_N F(p+\Phi_\varepsilon^n(p))$，$R_N=Q_N H^{r(n)}$

$\Phi_\varepsilon^n$假设值在$2n+1$维Hilbert空间$H^{r(n)}=\mathrm{span}\{\Phi_j:\ M+1\leqslant|j|\leqslant M+n\}$.

首先证明当$|p|\to\infty$时，$D\Phi_\varepsilon^n(p)\to 0$.

设$\Phi_\varepsilon^n$的Fourier级数展开为

$$\Phi_\varepsilon^n(p)=\sum_{M+1\leqslant|j|\leqslant M+n}\Phi_j^n(p)\varphi_j$$

其中$\Phi_j^n$是数值函数．对上述证明只需证明：

$$D\Phi_j^n(p)\to 0,\qquad 当|p|\to\infty时$$

由截断函数，有，当$|p|_1>\rho$时，$\Phi_j^n$满足

$$-\beta_n\Delta\Phi_j^n+\lambda_j\Phi_j^n-\sum_{|\alpha|\leqslant M}\lambda_\alpha p_\alpha\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\Phi_j^n,\qquad M+1\leqslant|j|\leqslant M+n$$

这里$p=\sum_{|\alpha|\leqslant M}p_\alpha\varphi_\alpha$．因为$\Phi_\varepsilon^n\in W^{1,2}(H_p,\ H_q)$，则$\Phi_\varepsilon^n\in L^2(H_p)$，$\partial\Phi_j^n/\partial p_\alpha\in L^2(H_p)$且

$$D\Phi_j^n=\frac{\partial}{\partial p}\Phi_j^n=\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\Phi_j^n\in L^2(H_p,\ B_\sigma) \tag{2.8}$$

其中$B_\sigma=\{p\in H_p: |p|_1\leqslant\sigma\}$，这儿$\sigma>p$. 设$\omega\in C^\infty$为数值函数且满足$|\omega(p)|\leqslant 1$，对所有$p\in H_p$且

$$\omega(p)=0,\quad |p_1|\leqslant(p+\sigma)/2$$
$$\omega(p)=1,\quad |p|_1>\sigma$$

这儿$\sigma>\rho$. 由(2.8)成立

$$D^\beta\omega D\Phi_j^n(p)\in L^2(H_p) \tag{2.9}$$

对$\beta>0$，由Sobolev嵌入定理，$W^{k,2}\subset L^r$，对$r\geqslant 2$，$k>M/2-M/r$. 由(2.9)有

$$g(p)\underline{\underline{\mathrm{def}}}(I-\Delta)(\omega D\Phi_j^n)(p)\in L^r(H_p),\qquad (r\geqslant 2)$$

因$\omega D\Phi_j^n(p)=D\Phi_j^n(p)$，当$|p|_1>\sigma$，则能得

$$D\Phi_j^n(p)=\int_{H_p}G(p-q)g(q)dq=\int_{H_p}G(p)g(p-q)dq$$

这里$G(q)$是Bessel位势且满足

$$G(q)=C_6|q|^{2-M}+o(|q|^{2-M}),\qquad 当|q|\to 0,\ M\geqslant 3时$$
$$G(q)=C_7\ln|q|+o(\ln|q|),\qquad 当|q|\to 0,\ M=2时$$
$$G(q)=C_7(1-|q|)+o(1-|q|),\qquad 当|q|\to 0,\ M=1时$$

且　$$|G(q)|\leqslant C_8\rho^{-C_9|q|},\qquad 当|q|\to\infty时$$

当$|p|_1>\sigma$我们得

$$|D\Phi_j^n(p)|\leqslant\left|\int_{|q|>|p|/2}G(p-q)g(q)dq\right|+\left|\int_{|q|<|p|/2}G(p-q)g(q)dq\right|$$
$$\leqslant|G|_{L^v}|g|_{L^{v'}(|q|>|p|/2)}+\left[\int_{|q|<|p|/2}|G(p-q)|^v dq\right]^{1/v}|g|_{L^{v'}(H_p)}$$
$$\leqslant|G|_{L^v}|g|_{L^{v'}(|q|>|p|/2)}+[\sigma_M|p|^M/2]^{1/v}C_8\exp[-C_9/2|p|]|g|_{L^{v'}(H_p)}\to 0,$$
$$|p|\to\infty时$$

这里$\sigma_M$是$R^{2M+1}$中单位球体积，且$M\geqslant 4$时$v>1$，$v<M/(M-2)$；$M\leqslant 3$时，$v\leqslant 2$；$v'=v(v-1)^{-1}$. 得

$$D\Phi_j^n(p)\to 0,\ 当|p|\to\infty时.\ 则D\Phi_\varepsilon^n(p)\to 0,\ 当|p|\to\infty时.$$

现在来证明引理2.4. 记$A_\varepsilon q_\varepsilon=Q_N R(p)$（见引理2.3），考虑如下方程

$$-\beta_n\Delta\Phi_\varepsilon^n+A_\varepsilon\Phi_\varepsilon^n=F^{r,n}(p),\quad F^{r,n}(p)=R_N F(p) \tag{2.10}$$

这里$\beta_n\to 0^+$，$\Delta=\partial^2/\partial p^2$，$H^{r(n)}=\{\varphi_j: M+1\leqslant|j|\leqslant M+n\}$. 在方向$v=\sum_{|\alpha|\leqslant M}v_\alpha\varphi_\alpha$，$|v|_1=1$上取(2.10)式的Gateaux导数，则

$$-\beta_n\Delta\sum_{|\alpha|\leqslant M}\Phi_{\varepsilon,\alpha}^n v_\alpha+A_\varepsilon\sum_{|\beta|\leqslant M}\Phi_{\varepsilon,\alpha}^n v_\alpha=\sum_{|\alpha|\leqslant M}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}F^{r,n}v_\alpha,\qquad p\in H_p \tag{2.11}$$

这里　$\Phi_{\varepsilon,\alpha}^n=D\Phi_\varepsilon^n(p)\varphi_\alpha$，$\partial F^{r,n}(p)/\partial p_\alpha=DF^{r,n}(p)\varphi_\alpha$

接下来在(2.11)式与$A_\varepsilon^2\sum_{|\beta|\leqslant M}\Phi_{\varepsilon,\beta}^n v_\beta$取内积得

$$\frac{-\beta_n}{2}\Delta\Big|\sum_{|\alpha|\leqslant M}\Phi_{\varepsilon,\alpha}^n v_\alpha\Big|_1^2+\beta_n\Big|D\sum_{|\alpha|\leqslant M}\Phi_{\varepsilon,\alpha}^n v_\alpha\Big|_1^2+A_\varepsilon A_\varepsilon\sum_{|\alpha|\leqslant M}\Phi_{\varepsilon,\alpha}^n v_\alpha\cdot A_\varepsilon\sum_{|\alpha|\leqslant M}\Phi_{\varepsilon,\beta}^n v_\beta$$
$$=\sum_{|\alpha|\leqslant M}A_\varepsilon\frac{\partial}{\partial p_\alpha}F^{r,n}v_\alpha\cdot A_\varepsilon\sum_{|\beta|\leqslant M}\Phi_{\varepsilon,\beta}^n v_\beta,\qquad p\in H_p \tag{2.12}$$

注意到$A_\varepsilon$的特征值是$\lambda_n^\varepsilon=(\varepsilon n^4+\eta n^2+\gamma)+in^3$，$n\in Z$. 则$\mathrm{Re}\lambda_n^\varepsilon$当$n>0$时单调增加，$n<0$时，单调减少并且

$$A_\varepsilon A_\varepsilon \sum_{|\alpha|<M} \Phi^n_{\varepsilon,\alpha} v_\alpha \cdot A_\varepsilon \sum_{|\alpha|<M} \Phi^n_{\varepsilon,\beta} v_\beta$$

是实数。我们得到

$$A_\varepsilon A_\varepsilon \sum_{|\alpha|<M} \Phi^n_{\varepsilon,\alpha} v_\alpha \cdot A_\varepsilon \sum_{|\alpha|<M} \Phi^n_{\varepsilon,\beta} v_\beta \geqslant \mathrm{Re}\lambda_{M+1} \Big| \sum_{|\alpha|<M} \Phi^n_{\varepsilon,\alpha} v_\alpha \Big|_1^2$$

因为$|p|\to\infty$时，$D\Phi^n_\varepsilon(p)\to 0$，由Fourier展开得

$$A_\varepsilon D\Phi^n_\varepsilon(p) = \sum_{M+1\leqslant|j|<M+n} \lambda_j D\Phi^n_j(p)\varphi_j$$

因此有$\big|\sum_{|\alpha|<M} \Phi^n_{\varepsilon,\alpha} v_\alpha\big|_1^2\to 0$，$|p|\to\infty$时，所以$\big|\sum_{|\alpha|<M} \Phi^n_{\varepsilon,\alpha} v_\alpha\big|_1^2$ 在某些$p_0\in H_p$有极大值。由极大值原理有

$$D\Big|\sum_{|\alpha|<M} \Phi^n_{\varepsilon,\alpha} v_\alpha\Big|_1^2 = 0,\quad \Delta\Big|\sum_{|\alpha|<M} \Phi^n_{\varepsilon,\alpha} v_\alpha\Big|_1^2 \leqslant 0$$

在$p_0$处。由(2.12)得

$$\mathrm{Re}\lambda_{M+1}\Big|\sum_{|\alpha|<M} \Phi^n_{\varepsilon,\alpha} v_\alpha\Big|_1^2 \leqslant \Big|\sum_{|\alpha|<M} A_\varepsilon \frac{\partial}{\partial p_\alpha} F^{r,n} v_\alpha \cdot A_\varepsilon \sum_{|\beta|<M} \Phi^n_{\varepsilon,\beta}\Big|_{L^\infty(H_p)}$$

$$\leqslant \Big|\sum_{|\alpha|<M} A_\varepsilon \frac{\partial}{\partial p_\alpha} F^{r,n} v_\alpha\Big|_{0,\infty} \|D\Phi^n_\varepsilon\|_\infty$$

则

$$\|D\Phi^n_\varepsilon\|_{1,\infty} \leqslant (\mathrm{Re}\lambda_{M+1})^{-1}\Big|\sum_{|\alpha|<M} A_\varepsilon \frac{\partial}{\partial p_\alpha} F^{r,n}(p) v_\alpha\Big|_{0,\infty}$$

$$= (\mathrm{Re}\lambda_{M+1})^{-1}\Big|\sum_{|\alpha|<M} A_\varepsilon DF^{r,n}(p)\varphi_\alpha\Big|_{0,\infty} \leqslant (\mathrm{Re}\lambda_{M+1})^{-1} \sup_{u\in D(A_\varepsilon)} \sup_{\substack{|v|_1=1\\ v\in H_p}} |DF(u)v|_1$$

$$= (\mathrm{Re}\lambda_{M+1})^{-1} \sup_u \sup_{|v|_1=1} |D(f-uu_x)v|_1 \leqslant (\mathrm{Re}\lambda_{M+1})^{-1} \sup_u \sup_{|v|_1=1} |u_x v + u v_x|_1$$

$$\leqslant 2(\mathrm{Re}\lambda_{M+1})^{-1} \sup_u \sup_{|v|_1=1} |u_x|_\infty |v|_1 \leqslant (\mathrm{Re}\lambda_{M+1})^{-1} C_9$$

$$= C_9/[\varepsilon(M+1)^4+\eta(M+1)^2+\gamma] \leqslant C_9/(\varepsilon+\eta+\gamma) \leqslant C_5$$

进一步，因为$|D\Phi^n_\varepsilon|_{1,\infty}\leqslant C_5$，由Ascoli-Arzela定理可以得到$n\to\infty$，$\beta_n\to 0^+$时，$\|D\Phi^\varepsilon\|_{1,\infty}\leqslant C_5$。

**引理2.5** 设$q^\varepsilon=\Phi^\varepsilon(p)$为引理2.3中解，则我们可选择$\varepsilon_n\to 0^+$及存在$q=\Phi(p)$满足

(1) $\sup_p|\Phi^\varepsilon(p)-\Phi(p)|_2\to 0$，　$n\to\infty$时

(2) $|D\Phi|_{1,\infty}\leqslant C_5$

(3) $q=\Phi(p)$为方程$q_{xxx}-q_{xx}+\gamma q=Q_N R(p)$的解。

**证明** 由Ascoli-Arzela定理易证得。

**引理2.6** 若$u^\varepsilon=p+\Phi^\varepsilon(p)$是如下方程的解：

$$u'+\varepsilon u_{xxxx}+A_0 u=R(u)$$

且$u=p+\Phi(p)$是如下方程的解：

$$u'_\varepsilon+A_0 u=R(u),\qquad p\in H_p$$

则$\Delta=u^\varepsilon-u$满足$|\Delta|\leqslant\varepsilon k$，$k$是常数。

**证明** 由引理2.4(1)可证得。

**定理2.7** $t$充分大，$t\geqslant t_0$，(2.1)～(2.4)的任何轨道与$H$中$M_1^0$的距离保持在$k_1\delta^{5/2}$界限内，$k_1$为依赖于初值的适当常数，$t_0$依赖于初值，且初值$u_0$满足，$|u_0|\leqslant R$。$M_1^0$为(2.1)～(2.4)的近似惯性流形。

**证明** 设$u=p+q$是(2.1)～(2.4)的轨道．对$t>0$，定义$q_1(t)=\Phi(p)$．由引理2.5(3)，得到一个光滑流形$M_1^0$．对$\varepsilon>0$，由定理2.2存在近似惯性流形$M_1^\varepsilon$且$q_{1\varepsilon}=\Phi_\varepsilon(p)$．设(2.5)式轨道$u_\varepsilon=p_\varepsilon+q_\varepsilon$被$M_1^\varepsilon$中$\theta/4=\delta^{5/2}$的细邻域吸收．设$x_1^\varepsilon=q_\varepsilon-q_{1\varepsilon}$．由定理2.1，则$|x_1^\varepsilon|\leqslant\theta/4$．

现在证明(2.1)～(2.4)的轨道$u=p+q$被$M_1^0$中细邻域吸收．设$x_1=q-q_1$，则

$$|x-x_1^\varepsilon|=|q-q_1-(q_\varepsilon-q_{1\varepsilon})|\leqslant|q-q_1|+|q_\varepsilon-q_{1\varepsilon}|$$
$$\leqslant|q-q_{1\varepsilon}|+|q_1-q_{1\varepsilon}|+|q_\varepsilon-q_{1\varepsilon}|\leqslant\varepsilon k+\varepsilon k+\theta/4$$

选择$\varepsilon$使$2k\varepsilon<\theta/4$，则

$$|x-x_1^\varepsilon|<\theta/4+\theta/4=\theta/2,\quad |x_1|<|x-x_1^\varepsilon|+|x_1^\varepsilon|<\theta/2+\theta/2=\theta=4\delta^{5/2}$$

则$u=p+q$被$M_1^0$中$4\delta^{5/2}$细邻域吸收．

## 参 考 文 献


[1] G. Foias, G. Sell and R. Temann, Inertial manifolds in nonlinear evolutionary equations, *J. Diff. Equ.*, 73 (1988), 309—353.

[2] A. Debussche and M. Marion, On the construction of families of approximate inertial manifolds, *J. Diff. Equ.*, 100 (1992), 173—201.

[3] G. Sell and Y. You, Inertial manifolds: the nonselfadjoint case, *J. Diff. Equ.*, 96 (1992), 203—255.

[4] E. Fabes, M. Luskin and G. Sell, Construction of inertial manifolds by elliptic regularization, *J. Diff. Equ.*, 89 (1991), 355—387.

[5] 田立新、徐振源、刘曾荣，耗散孤立波方程的吸引子，应用数学和力学，15(6) (1994)，539—547.

[6] 田立新，Schrödinger 算子的极大耗散扩张，应用数学和力学，15(10) (1994)，919—926.

[7] A. Pazy, Semigroup of linear operators and application to partial differential equation, *Appl. Math. Soc.*, V. 44, Springer-Verlag, New York (1983).

[8] J. -M. Ghidagtis, Weakly damped forced KdV equation behave as a finite dimensional dynamical system in the long time, *J. Diff. Equ.*, 74 (1988), 369—390.

[9] J. -M. Ghidaglia, A note on the strong convergence towards attractors of damped forced KdV equations, *J. Diff. Equ.*, 110 (1994), 356—359.

[10] E. M. Stein, *Singular Interals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, NJ (1970).

[11] 田立新、卢殿臣，非线性发展方程高模态衰减，江苏理工大学学报，17(6) (1996)，107—111.


# The Research of Longtime Dynamic Behavior in Weakly Damped Forced KdV Equation


Tian Lixin

(*Department of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang, Jiangsu* 212013, *P. R. China*)

Xu Zhenyuan

(*Wuxi Light Industry Institute, Wuxi, Jiangsu* 214000, *P. R. China*)



**Abstract**

It is presented that there exists approximate inertial manifolds in weakly damped forced KdV equation with periodic boundary conditions. The approximate inertial manifolds provide approximant of the attractor by finite dimensional smooth manifolds which are explicitly defined. And the concept leads to new numerical schemes which are well adapted to the longtime behavior of dynamical system.



**Key words** approximate inertial manifold, weakly damped forced KdV equation, dynamical system, attractor