应用数学和力学，第18卷 第9期（1997年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

S-R分解定理的唯一性、存在性和客观性

陈 勉[1] 梁景伟[1] 陈 熙[2] 陈至达[3]

（1996年3月6日收到）

摘 要

对于连续体的一切物理可能的变形场，其变形梯度张量**F**可被分解为一个对称张量**S**和一个正交张量**R**的直和，这便是S-R分解定理．本文通过矩阵方法和张量方法证明了S-R分解定理的唯一性、存在性和客观性．

关键词 S-R分解定理 唯一性 存在性 客观性

一、引 言

变形梯度张量 **F** 的分解是有限变形理论的基本问题．以往大多数研究者主要应用Green 应变理论和极分解理论，但是这些理论均存在着严重的缺陷．1979 年，陈至达提出了变形梯度分解的变形转动分解定理（简称S-R分解定理），该定理简述如下：

对于连续物体的一切物理许可变形场，任一变形梯度张量**F**可被分解为对称张量 **S** 与正交张量**R**的直和：

$$\mathbf{F}=\mathbf{S}+\mathbf{R}$$

其中：

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T]-(1-\cos\theta)\mathbf{L}\mathbf{L}$$

$$\mathbf{R}=\mathbf{I}+\frac{1}{2}\sin\theta\mathbf{L}+(1-\cos\theta)\mathbf{L}\mathbf{L}$$

$$\mathbf{L}=\frac{\mathbf{w}}{\sin\theta},\quad \mathbf{w}=\frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u}-(\nabla\mathbf{u})^T]$$

$$\theta=\pm\arcsin[-\mathbf{w}:\mathbf{w}]$$

上式中$\nabla\mathbf{u}$表示位移梯度，θ为平均整旋角，**L**为转轴方位矩阵．

近十五年来，该理论在许多领域中得到应用，并获得巨大的成功．在理论研究方面，S-R分解定理的唯一性、存在性和客观性问题一直是理论界所关注的问题．本文将给出唯一性、存在性和客观性的新的一般性证明．

1 石油大学，北京 102200．
2 成都煤炭干部管理学院，成都 610000．
3 中国矿业大学北京研究生部，北京 100083．

二、唯　一　性

所谓物理许可变形场要求$\mathbf{F}(u)$，$\mathbf{R}(u)$，$\mathbf{S}(u)$ 是连续的，因此 $\mathbf{R}$，$\mathbf{S}$ 是关于 $\mathbf{F}$ 的连续函数，而且位移函数的变换是唯一可逆的.

我们假设：在初始变形场情况，即$\mathbf{F}=\mathbf{I}$时，$\mathbf{S}=0$，$\mathbf{R}=\mathbf{I}$. 事实上，这与小变形理论的理解是一致的.

变形梯度可分解为

$$\mathbf{F}=\mathbf{S}+\mathbf{R} \tag{2.1}$$

其中 $\mathbf{S}$为一对称张量，$\mathbf{R}$为一正交张量.

如果上述分解非唯一，则有

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{F}&=\mathbf{S}_1+\mathbf{R}_1\\ \mathbf{F}&=\mathbf{S}_2+\mathbf{R}_2\end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

两式相减，得

$$(\mathbf{S}_1-\mathbf{S}_2)+(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2)=0 \tag{2.3}$$

或

$$\mathbf{S}_2-\mathbf{S}_1=\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2 \tag{2.4}$$

以上方程亦可写为

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}-\mathbf{V} \tag{2.5}$$

其中 $\mathbf{A}=\mathbf{S}_2-\mathbf{S}_1$，$\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$；

$\mathbf{U}=\mathbf{R}_1$，$\mathbf{U}\mathbf{U}^T=\mathbf{I}$；

$\mathbf{V}=\mathbf{R}_2$，$\mathbf{V}\mathbf{V}^T=\mathbf{I}$；

$\mathbf{I}$为单位张量.

为证明唯一性，引用下列定理[4].

定理[4]　对于任意一个三阶实正交矩阵，一定存在一个三阶正交矩阵$\mathbf{H}$，使得

$$\mathbf{H}^T\mathbf{U}\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\pm1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{2.6}$$

在式(2.5)两边分别乘以$\mathbf{H}^T$和$\mathbf{H}$，有

$$\mathbf{H}^T\mathbf{A}\mathbf{H}=\mathbf{H}^T\mathbf{U}\mathbf{H}-\mathbf{H}^T\mathbf{V}\mathbf{H} \tag{2.7}$$

即

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}\pm1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}-\mathbf{V}_1 \tag{2.8}$$

$$\mathbf{A}_1^T=\begin{bmatrix}\pm1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}-\mathbf{V}_1^T \tag{2.9}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A}_1&=\mathbf{H}^T\mathbf{A}\mathbf{H}\\ \mathbf{V}_1&=\mathbf{H}^T\mathbf{V}\mathbf{H}\end{aligned}\right. \tag{2.10}$$

将式(2.8)与式(2.9)相减，得

$$\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_1^T=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&2\sin\theta\\0&-2\sin\theta&0\end{bmatrix} \tag{2.11}$$

上式两边分别乘以$\mathbf{V}_1$，得

$$\mathbf{V}_1^2-\mathbf{I}=\mathbf{V}_1\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&d\\0&-d&0\end{bmatrix} \tag{2.12}$$

$$\mathbf{V}_1^2-\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&d\\0&-d&0\end{bmatrix}\mathbf{V}_1 \tag{2.13}$$

其中 $d=2\sin\theta$.

由

$$\begin{bmatrix}v_{11}&v_{12}&v_{13}\\v_{21}&v_{22}&v_{23}\\v_{31}&v_{32}&v_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&d\\0&-d&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&d\\0&-d&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}&v_{12}&v_{13}\\v_{21}&v_{22}&v_{23}\\v_{31}&v_{32}&v_{33}\end{bmatrix} \tag{2.14}$$

可得

$$v_{23}+v_{32}=0,\quad v_{22}=v_{33},\quad \text{其它}\ v_{ij}=0$$

考虑到$\mathbf{V}_1\mathbf{V}_1^T=\mathbf{I}$，可得$v_{22}^2+v_{23}^2=1$. 令$v_{22}=\cos\phi$，$v_{23}=\sin\phi$，于是$\mathbf{V}_1$可写为

$$\mathbf{V}_1=\begin{bmatrix}\pm1&0&0\\0&\cos\phi&\sin\phi\\0&-\sin\phi&\cos\phi\end{bmatrix} \tag{2.15}$$

将式(2.15)代入式(2.8)，可得

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\cos\theta-\cos\phi&\sin\theta-\sin\phi\\0&-\sin\theta+\sin\phi&\cos\theta-\cos\phi\end{bmatrix} \tag{2.16}$$

由于$\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_1^T$，从上式可得

$$\sin\theta=\sin\phi \tag{2.17}$$

即

$$\theta=\phi+2n\pi,\quad \pi-\phi+2n\pi\qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \tag{2.18}$$

因此，$\mathbf{A}_1$可被重新写为

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0,2\cos\theta&0\\0&0&0,2\cos\theta\end{bmatrix} \tag{2.19}$$

有基本假设

$$\mathbf{R}|_{\mathbf{u}=0}=\mathbf{I},\quad \mathbf{S}|_{\mathbf{u}=0}=\mathbf{I}$$

可得

$$\mathbf{A}_1|_{\mathbf{u}=0}=0$$

我们考察$\mathbf{R}$和$\mathbf{S}$的对于$\mathbf{u}$的连续性，显然当$\Delta\mathbf{u}\to0$时$\Delta\theta\to0$，式(2.19)中的$\cos\theta$项是不符合连续性要求的，应舍去。于是

$$\mathbf{A}_1=0 \tag{2.20}$$

由式(2.20)，我们可得

$$\mathbf{R}_1=\mathbf{R}_2,\quad \mathbf{S}_1=\mathbf{S}_2 \tag{2.21}$$

于是S-R分解唯一.

事实上，(2.6)式的变换，将空间坐标轴和转轴重合，如确定平面上一根通过转轴的直线为起始线，θ为转角，则在(2.18)式中，ϕ是补角，可舍去．因此，θ和ϕ相差 $2n\pi$．从连续变换的角度，θ和ϕ以同一起始线计起，则$\theta=\phi$，故其解是唯一的.

三、S-R 分解

由于S-R分解是唯一的，我们可以采用半逆解法解出$\mathbf{S}$和$\mathbf{R}$．设$\mathbf{S}$和$\mathbf{R}$有如下形式

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T]-\mathbf{A} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{R}=\mathbf{I}+\frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T]+\mathbf{A} \tag{3.2}$$

其中 $\mathbf{A}$为一待定矩阵．由于$\mathbf{S}$为对称，必有$\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$.

正交矩阵$\mathbf{R}$满足

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\mathbf{R}^T&=(\mathbf{I}+\mathbf{w}+\mathbf{A})(\mathbf{I}+\mathbf{w}+\mathbf{A})^T\\&=(\mathbf{I}+\mathbf{w}+\mathbf{A})(\mathbf{I}-\mathbf{w}+\mathbf{A})\\&=\mathbf{I}+2\mathbf{A}-\mathbf{w}\mathbf{w}+\mathbf{A}\mathbf{A}+\mathbf{w}\mathbf{A}-\mathbf{A}\mathbf{w}\\&=\mathbf{I}\end{aligned} \tag{3.3}$$

即

$$2\mathbf{A}-\mathbf{w}\mathbf{w}+\mathbf{A}\mathbf{A}+\mathbf{w}\mathbf{A}-\mathbf{A}\mathbf{w}=0 \tag{3.4}$$

引理 如果$\mathbf{w}=-\mathbf{w}^T$，即$\mathbf{w}$为反对称张量，可对应于一个实矢量$\boldsymbol{L}=[L_i]$的反对称矩阵

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix}0 & L_3 & -L_2\\ -L_3 & 0 & L_1\\ L_2 & -L_1 & 0\end{bmatrix} \tag{3.5}$$

则

$$(\mathbf{w}\ \ \mathbf{w})(\mathbf{w}\ \ \mathbf{w})=-\alpha(\mathbf{w}\ \ \mathbf{w}) \tag{3.6}$$

其中 $\alpha=L_iL^i$

设$\mathbf{A}$满足

$$\mathbf{A}=\lambda\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} \tag{3.7}$$

其中 λ为一待定系数.

考虑到式(3.7)和(3.4)，可得

$$(2\lambda-1-\alpha\lambda^2)\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=0 \tag{3.8}$$

当$\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}\neq 0$时，有

$$\alpha\lambda^2-2\lambda+1=0 \tag{3.9}$$

上述方程的解为

$$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1-\alpha}}{\alpha} \tag{3.10}$$

考虑到位移连续性，我们在上述解中取正号.

令$\sin^2\theta=\alpha$，λ可写为

$$\lambda=\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta} \tag{3.11}$$

因此，S-R分解定理公式可写为

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla)-(1-\cos\theta)\mathbf{L}\cdot\mathbf{L} \tag{3.12}$$

$$\mathbf{R}=\mathbf{I}+\frac{1}{2}\sin\theta\mathbf{L}+(1-\cos\theta)\mathbf{L}\cdot\mathbf{L} \tag{3.13}$$

其中

$$\mathbf{L}=\frac{\mathbf{w}}{\sin\theta} \tag{3.14}$$

如果$\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=0$，$\mathbf{S}$和$\mathbf{R}$可表示为

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T) \tag{3.15}$$

$$\mathbf{R}=\mathbf{I} \tag{3.16}$$

四、S-R 分解定理的存在性

若S-R分解(3.12)、(3.13)存在，则式(3.9)中λ必为实值.

考虑到式(3.10)，有

$$1-\alpha\geqslant 0 \tag{4.1}$$

即

$$|\sin\theta|\leqslant 1 \tag{4.2}$$

则θ为实值.

反之，若$\alpha\leqslant 1$，我们可以重复(3.2)～(3.16)推导过程证明S-R分解定理.

因此，S-R分解定理存在的充分必要条件是$\alpha\leqslant 1$.

五、S-R分解的客观性

物理现象的描述一般依赖于观察者的选择. 所谓一个“观察者”是指一个带有时钟为刚性标架. 当观察者的变换$(x,t)\to(\tilde{x},\tilde{t})$给定，其变换关系为

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}&=\mathbf{Q}(\mathbf{t})\mathbf{x}+\mathbf{c}(\mathbf{t})\\ \tilde{\mathbf{t}}&=\mathbf{t}+\mathbf{a}\end{aligned} \tag{5.1}$$

其中 $\mathbf{Q}$为正交张量.

对于二阶张量$\mathbf{A}$，若下式成立

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T \tag{5.2}$$

则称$\mathbf{A}$是客观的.

变形梯度张量$\mathbf{F}$是初始拖带系到实时拖带系的变换

$$\mathbf{g}=\mathbf{F}\mathring{\mathbf{g}} \tag{5.3}$$

初始拖带系与实时拖带系之间存在着内在的联系. 当初始拖带系被选定后，实时拖带系

也就由物体的运动所决定．$\mathbf{F}$ 是建立在拖带坐标系上的张量，当观察者变换时，有

$$\mathbf{g}\to\tilde{\mathbf{g}}=\mathbf{Q}\mathbf{g}$$
$$\mathbf{F}\to\tilde{\mathbf{F}}=\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^T \tag{5.4}$$

对于S-R分解表达式

$$\mathbf{F}=\mathbf{S}+\mathbf{R} \tag{5.5}$$

左右两边分别乘以$\mathbf{Q}$与$\mathbf{Q}^T$，得

$$\tilde{\mathbf{F}}=\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^T=\mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{Q}^T+\mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{Q}^T \tag{5.6}$$

很明显，$\mathbf{QSQ}^T$为对称张量，$\mathbf{QRQ}^T$为正交张量．将上式与

$$\tilde{\mathbf{F}}=\tilde{\mathbf{S}}+\tilde{\mathbf{R}} \tag{5.7}$$

相比较，并考虑到和分解的唯一性，有

$$\tilde{\mathbf{S}}=\mathbf{QSQ}^T$$
$$\tilde{\mathbf{R}}=\mathbf{QRQ}^T \tag{5.8}$$

因此，$\mathbf{S}$与$\mathbf{R}$均是客观的．

参 考 文 献

[1] 陈至达，《有理力学》，中国矿业大学出版社（1986），96—100．

[2] 陈 勉，非线性连续体力学中的杆、壳大变形问题，中国矿业大学博士论文（1991）．

[3] 陈 熙，有限变形和分解定理的存在性与唯一性，中国矿业大学硕士论文（1986）．

[4] Marvin Marcus and Henryk Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Allyn and Bacon Inc., Boston (1964), 67.

On Uniqueness, Existence and Objectivity of S-R Decomposition Theorem

Chen Mian Liang Jingwei

(*University of Petroleum, Beijing* 102200, *P. R. China*)

Chen Xi

(*Chengdu Coal Mining Management Institute, Chengdu* 610000, *P. R. China*)

Chen Zhida

(*China University of Mining, Beijing* 100083, *P. R. China*)

Abstract

For a physically possible deformation field of a continuum, the deformation gradient function $\mathbf{F}$ can be decomposed into direct sum of a symmetric tensor S and an orthogonal tensor $\mathbf{R}$, which is called S-R decompsition theorem. In this paper, The S-R decomposition unique existence theorem is proved, by employing matrix and tensor method. Also, a brief proof of its objectivity is given.

Key words S-R decomposition theorem, uniqueness, existence, objectivity