应用数学和力学，第18卷 第9期（1997年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

状态右端受限的滞后控制系统的最优控制*

蒋 威[1]　　郑祖庥[2]

（李继彬推荐，1996年9月16日收到，1997年4月28日收到修改稿）

摘　　要

本文对非线性滞后控制系统

$$\dot{x}(t)=f[x(t),x(t-1),u(t),t] \qquad t\in[t_0,t_1]$$

$$x(t)=\psi(t) \qquad t\in[t_0,t_1]$$

就其状态右端$x(t_1)$在

$$\psi_k[x(t_1)]=0 \qquad (k=1,2,\cdots,l)$$

的限制条件下，给出最大值原理。作为特例，还将给出在部分状态变量右端完全固定的情况下的最大值原理。最后举例说明主要结果的应用。

关键词　滞后控制系统　状态右端受限　最大值原理

一、引　　言

在控制理论中，最优控制问题的解决，特别是庞特里亚金（Понтрягин）最大值原理[1]、[2]的提出，对现代科学的进步和诸如力学系统、经济管理系统、工业工程系统、生物系统等等实际系统提供了十分有用的工具。因而不仅大大地促进了这些领域的发展，而且还带有巨大的经济效益和社会效益。我们还必须注意到，在许多领域中，系统，特别是非线性系统，往往带有时滞现象。而对这些带有时滞的控制系统的最优控制问题，用一般的最大值原理无法解决。1966年，文[3]给出了线性滞后控制系统和特定的性能指标的最优控制问题。而对非线性滞后控制系统，文[4]给出了其最大值原理。这样虽然使一般的滞后控制系统的最优控制问题的解决成为可能。但在那里我们总是假定系统的终点的状态是自由的，而在实际系统中，还有一大批往往要对系统的终点的状态作一些限制。因而需要对此作深入研究。本文将就状态右端受限的滞后控制系统给出求解最优控制的一般方法。作为特例，我们还将就部分状态变量右端完全固定的情况下，给出求解最优控制的方法。最后，我们给出一个例子，从而说明本文主要结果的应用。本文所给的方法和理论对线性滞后控制系的状态右端受限的最优控制同样适用。另外，虽然文中主要对单滞量的非线性滞后控制系统作讨论，其主要目的是为了讨论方便，对多滞量的滞后控制系统，可仿此研究。

---

* 国家自然科学基金及安徽省教委自然科学资助项目.

1　安徽大学管理学系，合肥　230039.

2　安徽大学数学系，合肥　230039.

二、主要结果

本文考虑的滞后控制系统为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}(t)=f(x(t),\ x(t-1),\ u(t),\ t) && (t_0<t\leqslant t_1)\\&x(t)=\psi(t) && (t_0-1\leqslant t\leqslant t_0)\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

这里 $x(t)$为n维的状态向量；$u(t)$为r维的控制向量；$\psi(t)$为连续的初始函数；$f(\cdot,\ \cdot,\ \cdot,\ \cdot)$为$n$维的，关于各变元均可微的函数.

我们总假定$u(t)$给定时，系统(2.1)的解存在，且当$u(t)$的变分δu趋于零时，x的变分δx也趋于零.

本文，我们要考虑的一般化最优控制问题，是求可容控制（u 属于给定的约束集Ω），使得滞后控制系统(2.1)在状态右端约束条件：

$$\psi_k[x(t_1)]=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ l;\ l<n)\tag{2.2}$$

下，使得性能指标

$$J(x(t_1))=Cx(t_1)=C_1x_1(t_1)+C_2x_2(t_1)+\cdots+C_nx_n(t_1)\tag{2.3}$$

（其中$C=(C_1,\ C_2\cdots,\ C_n)$）达到极小值.

为了解决这个问题，我们首先引入[4]中的定理作为引理. 在该定理考虑的性能指标为

$$J_1=g(x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}F(x(t),\ x(t-1),\ u(t),\ t)dt\tag{2.4}$$

相应于(2.1)和(2.4)的伴随方程为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\eta}(t)=&-\eta(t)\frac{\partial f(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)}+\frac{\partial F(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)}\\&-\eta(t+1)\frac{\partial f(x(t+1),x(t),u(t+1),t+1)}{\partial x(t)}\\&+\frac{\partial F(x(t+1),x(t),u(t+1),t+1)}{\partial x(t)} \qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1-1)\\\dot{\eta}(t)=&-\eta(t)\frac{\partial f(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)}\\&+\frac{\partial F(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)} \qquad (t_1-1\leqslant t\leqslant t_1)\\\eta^T(t_1)=&-\mathrm{grad}\,g(x(t_1))\end{aligned}\right\}\tag{2,5}$$

其中 $\eta(t)=(\eta_1(t),\eta_2(t),\ \cdots,\ \eta_n(t))$为其共态向量.

引理 设$u(t)$是一个容许控制，$x(t)$是滞后控制系统(2.1)相应于$u(t)$的轨线，$\eta(t)$是相应于$u(t)$和$x(t)$满足伴随方程(2.5)的共态向量，则$u^*(t)$和$x(t)$是关于性能指标(2.4)的最优控制和最优轨线的必要条件是：在区间$[t_0,\ t_1]$上的每一个值，哈密顿函数

$$\begin{aligned}H(x(t),x(t-1),\ \eta(t),\ u(t),t)=&-F(x(t),x(t-1),u(t),t)\\&+\eta(t)f(x(t-1),x(t-1),u(t),t)\end{aligned}\tag{2.6}$$

必在$u(t)=u^*(t)$处达到最大值.

对于右端受限，即满足条件(2.2)的滞后控制系统的最优解，可将原来的性能指标泛函(2.3)改写成为

$$J=Cx(t_1)+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\psi_k[x(t_1)] \tag{2.7}$$

这里 λ_1, λ_2, …, λ_l为待定常数.

显然，如果约束条件(2.2)得到满足时，性能指标泛函(2.3)与(2.7)是相等的.

如果在(2.4)中令

$$g(x(t_1))=Cx(t_1)+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\psi_k[x(t_1)],\ F(x(t),\ x(t-1),\ u(t),\ t)\equiv 0$$

则(2.4)与(2.7)就相一致了.

这时伴随方程(2.5)就化为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\eta}(t)=&-\eta(t)\frac{\partial f(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)}\\&-\eta(t+1)\frac{\partial f(x(t+1),x(t),u(t+1),t+1)}{\partial x(t)}\qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1-1)\\\dot{\eta}(t)=&-\eta(t)\frac{\partial f(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)}\qquad (t_1-1\leqslant t\leqslant t_1)\\\eta(t_1)=&-\left(C+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial\psi_k(x(t_1))}{\partial x^T(t_1)}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

这里 $\dfrac{\partial\psi_k(x(t_1))}{\partial x^T(t_1)}=\left(\dfrac{\partial\psi_k(x(t_1))}{\partial x_1(t_1)},\ \dfrac{\partial\psi_k(x(t_1))}{\partial x_2(t_1)},\ \cdots,\ \dfrac{\partial\psi_k(x(t_1))}{\partial x_n(t_1)}\right)$.

而哈密顿函数(2.6)即为:

$$H(x(t),x(t-1),u(t),t)=\eta f(x(t),x(t-1),u(t),t) \tag{2.9}$$

因而由引理可得:

定理1 设$u(t)$是一个容许控制，$x(t)$是滞后控制系统(2.1)的相应于$u(t)$的轨线，$\eta(t)$是满足(2.8)的共态变量. 则$u^*(t)$ 和 $x(t)$分别是在状态变量满足右端受限条件(2.2)的情况下的最优控制和最优轨线的必要条件是:

对于$[t_0,t_1]$上的每一个t值，哈密顿函数(2.9)必在$u=u^*(t)$处达到最大值.

作为定理1的特例，我们来讨论滞后控制系统(2.1)的某些状态变量的终态$x_k(t_1)$ ($k=1$, 2, …, l) ($l\leqslant n$)为完全固定的情况下的最优控制问题.

设$x_k(t_1)=x_{k1}(k=1,2,\cdots,l)$其中$x_{k1}$为常数. 这时性能指标(2.3)为:

$$J=C_1x_1(t_1)+\cdots+C_nx_n(t_1)=C_1x_{11}+\cdots+C_lx_{l1}+C_{l+1}x_{l+1}(t_1)+\cdots+C_nx_n(t_1)$$

其中前部分$C_1x_{11}+\cdots+C_lx_{l1}$是固定不变的，因而只需考虑性能指标

$$J_1=C_{l+1}x_{l+1}(t_1)+\cdots+C_nx_n(t_1)$$

即可. 而这相当于在(2.3)中取$C_1=C_2=\cdots=C_l=0$. 前l个状态变量终点完全固定，相当于右端受限的条件为: $\psi_k[x(t_1)]=x_k(t_1)-x_{k1}=0(k=1,2,\cdots,l\leqslant n)$这样，由定理1，我们可得到:

定理2 设$u(t)$是一个容许控制，$x(t)$是滞后控制系统(2.1)相应于$u(t)$ 的轨线，$\eta(t)$是满足伴随方程

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\eta}(t)=-\eta(t)\frac{\partial f(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)}\\
&\qquad -\eta(t+1)\frac{\partial f(x(t+1),x(t),u(t+1),t+1)}{\partial x(t)} \quad (t_0\leqslant t\leqslant t_1-1)\\
&\dot{\eta}(t)=-\eta(t)\frac{\partial f(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)} \qquad (t_1-1\leqslant t\leqslant t_1)\\
&\eta(t_1)=-(\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_l,C_{l+1},\cdots,C_n)
\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

的共态变量（其中$\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_l$为待定常数），则$u^*(t)$和$x(t)$是前$l$个状态右端完全固定的条件下的最优控制和最优轨线的必要条件是：对于$[t_0,t_1]$上的每一个t值，哈密顿函数

$$H(x(t),x(t-1),\eta(t),u(t),t)=\eta f(x(t),x(t-1),u(t),t)$$

必在$u=u^*(t)$处达到最大值。

由定理2可见，若状态变量x_i的终态完全固定，则相应的共态变量$\eta_i(t)$的终态自由；若状态变量x_i的终态自由，则与之相应的共态变量$\eta_i(t)$终态固定。

三、实 例

由定理2可见，定理1是应用范围非常广泛的重要结论，为进一步说明其应用，我们再给出一例。

例题 设滞后控制系统为

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-x_1(t-1)+u(t)\\ \dot{x}_2=u^2(t)\end{cases} \qquad (t\in[0,2]) \tag{3.1}$$

满足初始条件

$$\begin{cases}\psi_1(t)=1\\ \psi_2(t)=0\end{cases} \qquad (t\in[-1,0]) \tag{3.2}$$

求其在右端状态满足约束条件：$x_1(2)+x_2(2)=1$ (3.3)

下，使性能指标 $J=x_2(2)$ (3.4)

达到最小的最优控制和最优轨线，并求J的最优值。

这时，由(2.8)得(3.1)、(3.2)、(3.3)的伴随方程为：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\eta}_1(t)=\eta(t+1)\\ &\dot{\eta}_2(0)=0\end{aligned}\right\} \quad (0\leqslant t\leqslant 1);$$

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\eta}_1(t)=0\\ &\dot{\eta}_2(t)=0\end{aligned}\right\} \quad (0\leqslant t\leqslant 2); \quad \left.\begin{aligned}&\eta_1(2)=-\lambda\\ &\eta_2(2)=-1-\lambda\end{aligned}\right\}$$

解之得：

$$\eta_1(t)=\begin{cases}-\lambda t & (0\leqslant t\leqslant 1)\\ -\lambda & (1\leqslant t\leqslant 2)\end{cases}; \qquad \eta_2(t)=-1-\lambda \qquad (0\leqslant t\leqslant 2).$$

哈密顿函数为

$$\begin{aligned}H&=\eta_1(t)[-x_1(t-1)+u(t)]+\eta_2(t)u^2(t)\\ &=-\eta_1(t)x_1(t-1)+\eta_1(t)u(t)+\eta_2(t)u^2(t)\end{aligned}$$

可见，使H达最大的控制为

$$u(t)=-\frac{\eta_1(t)}{2\eta_2(t)}=\begin{cases}-\dfrac{\lambda t}{2(1+\lambda)} & (0\leqslant t\leqslant 1)\\[2ex] -\dfrac{\lambda}{2(1+\lambda)} & (1\leqslant t\leqslant 2)\end{cases}\tag{3.5}$$

代入(3.1)、(3.2)得：对$\dot{x}_1(t)=-x_1(t-1)+u(t)$

当$0\leqslant t\leqslant 1$时：$\dot{x}_1(t)=-1-\dfrac{\lambda t}{2(1-\lambda)}$，即$x_1(t)=1-t-\dfrac{\lambda}{4(1+\lambda)}t^2$。

当$1\leqslant t\leqslant 2$时，由于$x_1(1)=-\dfrac{\lambda}{4(1+\lambda)}$，且$\dot{x}_1(t)=-\left[1-(t-1)-\dfrac{\lambda}{4(1+\lambda)}(t-1)^2\right]-$

$$\frac{\lambda}{2(1+\lambda)}=\frac{\lambda}{4(1+\lambda)}\ (t-1)^2+(t-1)-1-\frac{\lambda}{2(1+\lambda)}$$

得：$x_1(t)=\dfrac{\lambda}{12(1+\lambda)}(t-1)^3+\dfrac{1}{2}\ (t-1)\quad \dfrac{2+3\lambda}{2(1+\lambda)}\ (t-1)-\dfrac{\lambda}{4(1+\lambda)}$.

对于$\dot{x}_2(t)=u^2(t)$：

当$0\leqslant t\leqslant 1$时：$\dot{x}_2(t)=\dfrac{\lambda^2}{4(1+\lambda)^2}t^2$且$x_2(0)=0$得$x_2(t)=\dfrac{\lambda^2}{12(1+\lambda)^2}t^3$.

当$1\leqslant t\leqslant 2$时，$\dot{x}_2(t)=\dfrac{\lambda^2}{4(1+\lambda)^2}$和$x_2(1)=\dfrac{\lambda^2}{12(1+\lambda)^2}$得

$$x_2(t)=\frac{\lambda^2}{4(1+\lambda)^2}(t-1)+\frac{\lambda^2}{12(1+\lambda)^2}$$

故$x_1(2)=\dfrac{\lambda}{12(1+\lambda)}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2+3\lambda}{2(1+\lambda)}-\dfrac{\lambda}{4(1+\lambda)}=-\dfrac{3+7\lambda}{6(1+\lambda)}$

$$x_2(2)=\frac{\lambda^2}{4(1+\lambda)^2}+\frac{\lambda^2}{12(1+\lambda)^2}=\frac{\lambda^2}{3(1+\lambda)^2}$$

代入约束条件(3.3)得

$$11\lambda^2+22\lambda+9=0,$$

解之得 $\lambda=\dfrac{\sqrt{22}-11}{11}=\sqrt{\dfrac{2}{11}}-1\left(\lambda=\dfrac{-\sqrt{22}-11}{11}\text{可类似讨论}\right)$，故最优控制可由(3.5)得到：

$$u(t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{22}-2}{4}t & (0\leqslant t\leqslant 1)\\[2ex] \dfrac{\sqrt{22}-2}{4} & (1\leqslant t\leqslant 2)\end{cases}$$

最优轨线为：

$$x_1(t)=\begin{cases}1-t-\dfrac{1}{4}\left(1-\sqrt{\dfrac{11}{2}}\right)t^2 & (0\leqslant t\leqslant 1)\\[2ex] \dfrac{1}{12}\left(1-\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)(t-1)^3+\dfrac{1}{2}(t-1)^2 & \\[2ex] \qquad -\dfrac{1}{2}\left(3-\sqrt{\dfrac{11}{2}}\right)(t-1)-\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right) & (1\leqslant t\leqslant 2)\end{cases}$$

$$x_2(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(\frac{13}{2}-\sqrt{22}\right)t^3 & (0\leqslant t\leqslant 1)\\ \frac{1}{4}\left(\frac{13}{2}-\sqrt{22}\right)(t-1)+\frac{1}{12}\left(\frac{13}{2}-\sqrt{22}\right) & (1\leqslant t\leqslant 2)\end{cases}$$

最小的性能指标为:

$$J=x_2(2)=\frac{1}{4}\left(\frac{13}{2}-\sqrt{22}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{13}{2}-\sqrt{22}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{13}{2}-\sqrt{22}\right)$$

参 考 文 献

[1] 谢绪恺,《现代控制理论基础》, 辽宁人民出版社, 沈阳 (1981).
[2] 王照林,《现代控制理论基础》, 国防工业出版社, 北京 (1981).
[3] D. H. Chyung and E. Brucelee, Linear optimal systems with time delays. *J. Siam Control*, 4(3) (1966), 548—575.
[4] 刘永清、唐功友,《大型动力系统的理论与应用》(卷3), 华南理工大学出版社, 广州 (1992).

The Optimal Control of Delay Control Systems with Restricted State Right Endpoint

Jiang Wei

(*Department of Administration, Anhui University, Hefei* 230039, *P. R. China*)

Zheng Zuxiu

(*Department of Mathematics, Anhui University, Hefei* 230039, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, for the delay control system:

$$\dot{x}(t)=f(x(t),x(t-1),u(t),t)\qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1)$$

$$x(t)=\psi(t)\qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1)$$

with state right endpoint restricted condition

$$\psi_k[x(t_1)]=0\qquad (k=1,2,\cdots,l)$$

a maximum principle is given. And as a specific example, this paper gives a maximum principle under the condition that partial states right endpoints be completely fixed. Finally, this paper gives an example to explain the application of the main result of this paper. All the results are suitable for the control systems with multidelay as well.

Key words delay control system, restricted state right endpoint, maximum principle