应用数学和力学，第18卷 第8期（1997年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

高阶泛函微分方程的振动性质*

林 文 贤[1]

（林宗池推荐，1996年12月6日收到）

摘 要

本文借助于 Lebesgue 测度等工具研究了一类高阶非线性泛函微分方程的振动性质．文中指出，在一定条件下，方程的非振动解仅有两类，而且给出了每一类非振动解存在的必要条件，同时也建立了方程振动的若干充分判据．

关键词 泛函微分方程 振动 非线性 Lebesgue测度

一、引 言

由于泛函微分方程解的振动性与渐近性在理论和实际两方面都具有很重要的意义，因此近若干年来，在这一领域已出现了大量的研究成果．在文献[1]中，讨论了二阶泛函微分方程

$$[a(t)b(x(t))g(x'(t))]'+\int_a^\beta H(t,\xi,x(t),x(h_1(t,\xi)),\cdots,x(h_n(t,\xi)))d\eta(\xi)$$

$$=\int_a^\beta R(t,\xi,x(t),x'(r_1(t,\xi)),\cdots,x'(r_n(t,\xi)))d\eta(\xi) \qquad (*)$$

的非振动解的渐近分类与振动性．本文则考虑更广泛的高阶泛函微分方程

$$\begin{aligned}&[a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))]'\\&\quad+\int_a^\beta H(t,\xi,x(t),x(h_1(t,\xi)),\cdots,x(h_m(t,\xi)))d\eta(\xi)\\&=\int_a^\beta R(t,\xi,x(t),x'(r_1(t,\xi)),\cdots,x'(r_m(x,\xi)))d\eta(\xi)\end{aligned} \qquad (1.1)$$

的非振动解的性质与分类，并给出了 (1.1) 振动的若干充分判据．本文的研究方法发展和改进了文[1]的方法．

关于方程(1.1)，我们作如下假设：

(R_1) $m\geqslant1$，$n\geqslant2$ 是整数；$a:[t_0,+\infty)\to R$，$b:R\to R$ 均连续，且$a(t)>0$，$b(x)>0$；$R=(-\infty,+\infty)$．

(R_2) ϕ，$\psi:R\to R$均连续；$\psi(x)$严格单调增加且$\psi(0)=0$；当$x\neq0$时$\phi(x)>0,\phi(0)=0$，

---

* 广东省高等学校基础研究课题

1 韩山师范学院数学系，广东潮州 521041

且$\phi(x)\leqslant\phi(|x|)$；

(R_3) $h_i:[t_0,+\infty)\times[\alpha,\beta]\to R$，$r_i:[t_0,+\infty)\times[\alpha,\beta]\to R$均连续，且$h_i(t,\xi)\leqslant t$，$\lim\limits_{t\to\infty}h_i(t,\xi)=+\infty$，$\forall\xi\in[\alpha,\beta]$，$i=1,2,\cdots,m$；

(R_4) $\bar{H}$，$\bar{R}:[t_0,+\infty)\times[\alpha,\beta]\times R^{m+1}\to R$均连续；$\eta:[\alpha,\beta]\to R$非减，方程中的积分为Stieltjes积分；

(R_5) 存在连续函数h，$r:[t_0,+\infty)\times[\alpha,\beta]\to R$和$f:R\to R$使得

$xf(x)>0$，当$x\neq0$时；$f'(x)\geqslant0$，当$x\neq0$时；

$$\frac{\bar{H}(t,\xi,u,u_1,\cdots,u_m)}{f(u)}\geqslant h(t,\xi),\qquad \text{当}uu_1\cdots u_m>0\text{时}$$

$$\frac{\bar{R}(t,\xi,u,u_1,\cdots,u_m)}{f(u)}\leqslant r(t,\xi),\qquad \text{当}u\neq0\text{时}$$

在本文中，所讨论的方程(1.1)的解$x(t)$都是假定在$[T_x,+\infty)$上存在且其n阶导数连续的。

为简便起见，下面常常将$\bar{H}(t,\xi,x(t),x(h_1(t,\xi)),\cdots,x(h_m(t,\xi)))$简写成$H(t,\xi,x(t),x(\bar{h}(t,\xi)))$；$\bar{R}(t,\xi,x(t),x'(r_1(t,\xi)),\cdots,x'(r_n(t,\xi)))$简写成$R(t,\xi,x(t),x'(\bar{r}(t,\xi)))$。

二、非振动解的分类与性质

引理1 设

$$\int_{t_0}^{+\infty}\int_{\alpha}^{\beta}[h(t,\xi)-r(t,\xi)]d\eta(\xi)dt=+\infty \tag{2.1}$$

若$x(t)$是方程(1.1)的最终正解（负解），则存在$T\geqslant t_0$，使当$t\geqslant T$时，$x'(t)<0(x'(t)>0)$，$x^{(n)}(t)$不变号。

证明 设$x(t)$为(1.1)的最终正解，由于$\lim\limits_{t\to\infty}h_i(t,\xi)=+\infty$，故可设存在$t_1\geqslant t_0$，当$t\geqslant t_1$时$x(t)>0$，$x(h_i(t,\xi))>0$，$i=1,2,\cdots,m$,考虑

$$\left[\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))}{f(x(t))}\right]'$$

$$=\frac{[a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))]'}{f(x(t))}-\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))x'(t)f'_x(x(t))}{f^2(x(t))}$$

$$\leqslant\int_{\alpha}^{\beta}\frac{R(t,\xi,x(t),x'(\bar{r}(t,\xi)))-H(t,\xi,x(t),x(\bar{h}(t,\xi)))}{f(x(t))}d\eta(\xi)$$

$$\leqslant\int_{\alpha}^{\beta}[r(t,\xi)-h(t,\xi)]d\eta(\xi) \tag{2.2}$$

从t_1到$t(\geqslant t_1)$积分上式，得

$$\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))}{f(x(t))}$$

$$\leqslant\frac{a(t_1)b(x(t_1))\phi(x^{(n)}(t_1))\psi(x'(t_1))}{f(x(t))}$$

$$-\int_{t_1}^{t}\int_{a}^{\beta}[h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds$$

由(2.1)知

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))}{f(x(t))}\right]=-\infty$$

故存在$T\geqslant t_1$，当$t\geqslant T$时$\psi(x'(t))<0$，$\phi(x^{(n)}(t))\neq 0$，进而$x'(t)<0$，$x^{(n)}(t)\neq 0$且$x^{(n)}(t)$不变号．$x(t)$为最终负解的情形证明类似．证毕．

引理2 若$x(t)$为方程(1.1)的最终正解（负解），且存在$T\geqslant t_0$，当$t\geqslant T$时$x'(t)<0(x'(t)>0)$，$x^{(n)}(t)$不变号，记

$$\left.\begin{aligned}&E_1=\{t\,|\,|x^{(n)}(t)|>c>0,\ t\in[T,\ +\infty),\ c\text{为常数}\}\\&E_2=\{t\,|\,|x^{(n)}(t)|\leqslant c,\ t\in[T,\ +\infty)\}\end{aligned}\right\}\qquad(2.3)$$

则E_1的Lebesgue测度mes $E_1<+\infty$．

证明 由$x^{(n)}(t)$的连续性知E_1，E_2为Lebegue可测，若$x(t)$ 最终为正（为负的情形类似证明），假设mes $E_1=+\infty$，由于$x^{(n)}(t)$不变号，若$x^{(n)}(t)>0$，则由

$$x^{(n-1)}(t)-x^{(n-1)}(T)=\int_T^t x^{(n)}(s)ds$$

$$=\int_{E_1\cap[T,t]}x^{(n)}(s)ds+\int_{E_2\cap[T,t]}x^{(n)}(s)ds$$

$$\geqslant\int_{E_1\cap[T,t]}cds$$

知$\lim\limits_{t\to\infty}x^{(n-1)}(t)=+\infty$，故存在 $T_1\geqslant T$，当 $t>T_1$ 时 $x^{(n-1)}(t)\geqslant c_1>0$，再由 $x^{(n-2)}(t)-x^{(n-2)}(T_1)\geqslant c_1(t-T_1)$，知$\lim\limits_{t\to\infty}x^{(n-2)}(t)=+\infty$，故存在$T_2>T_1$，当$t\geqslant T_2$时$x^{(n-2)}(t)\geqslant c_2>0$，依次类推可得$\lim\limits_{t\to\infty}x'(t)=+\infty$，这与$x'(t)<0$矛盾．若$x^{(n)}(t)<0$，由

$$x^{(n-1)}(t)-x^{(n-1)}(T)=\int_{E_1\cap[T,t]}x^{(n)}(s)ds+\int_{E\cap[T,t]}x^{(n)}(s)ds$$

$$\leqslant\int_{E_1\cap[T,t]}-cds$$

知$\lim\limits_{t\to+\infty}x^{(n-1)}(t)=-\infty$，故存在$T_1'\geqslant T$，当$t\geqslant T_1'$时，$x^{(n-1)}(t)\leqslant c_1'<0$，依次类推可得$x(t)\leqslant c_n'<0$，这与$x(t)>0$矛盾．证毕．

定理1 设(2.1)式成立，则方程（1.1）的非振动解的渐近性质有且仅有以下两种类型：

A_c型：$x(t)\to c$（常数）$\neq 0(t\to+\infty)$；

A_0型：$x(t)\to 0(t\to+\infty)$．

证明 设$x(t)$是方程(1.1)的非振动解，不妨设$x(t)$最终为正，由引理 1 知存在$T\geqslant t_0$，当$t\geqslant T$时，$x(t)>0$，$x'(t)<0$，因而$x(t)$单调减少且有下界，故 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)$ 存在且有限，易见$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=c\geqslant 0$，对于$x(t)<0$的情形可类似得到$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=c\leqslant 0$．证毕．

定理2 设(2.1)式成立，且存在正常数b_0，ψ_0使得：

$$b(x)\leqslant b_0 \tag{2.4}$$

$$\psi^{-1}(uv)\leqslant\psi_0\psi^{-1}(u)\psi^{-1}(v) \tag{2.5}$$

其中ψ^{-1}表示ψ的反函数，则方程(1.1)有A_c型（即$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=c\neq0$）非振动解$x(t)$的必要条件为当$T\geqslant t_0$充分大时，存在$E_T\subset[T,\ +\infty)$，$\text{mes}\,E_T=+\infty$，而$E_T$在$[T,\ +\infty)$中的余集$E_T^c=[T,\ +\infty)\backslash E_T$有$\text{mes}\,E_T^c<+\infty$使得

$$\int_{E_T}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)-r(u,\xi)]d\eta(\xi)du\right)ds<+\infty \tag{2.6}$$

证明 设$x(t)$为(1.1)的A_c型非振动解，不妨设$x(t)$最终为正，则$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=c>0$。由引理1知存在$T\geqslant t_0$，当$t\geqslant T$时$x'(t)<0$，$\phi(x^{(n)}(t))>0$且

$$\int_T^t\int_\alpha^\beta[h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds>0$$

从T到$t(\geqslant T)$积分(2.2)式即得

$$\begin{aligned}&\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))}{f(x(t))}\\&\quad\leqslant\frac{a(T)b(x(T))\phi(x^{(n)}(T))\psi(x'(T))}{f(x(T))}\\&\qquad-\int_T^t\int_\alpha^\beta[h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds\\&\quad\leqslant-\int_T^t\int_\alpha^\beta[h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds\end{aligned}$$

从而

$$\psi(x'(t))\leqslant\frac{-f(x(t))}{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))}\int_T^t\int_\alpha^\beta[h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds$$

$$\begin{aligned}x'(t)\leqslant&\psi_0^3\psi^{-1}\left(-\frac{1}{b_0}\right)\psi^{-1}(f(x(t)))\psi^{-1}\left(\frac{1}{\phi(x^{(n)}(t))}\right)\\&\cdot\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(t)}\int_T^t\int_\alpha^\beta[h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{x'(t)}{\psi^{-1}(f(x(t)))}\leqslant&\psi_0^3\psi^{-1}\left(-\frac{1}{b_0}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{\phi(x^{(n)}(t))}\right)\\&\cdot\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(t)}\int_T^t\int_\alpha^\beta[h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds\right)\end{aligned}$$

从T到$t(\geqslant T)$积分上式有

$$\begin{aligned}\int_{x(T)}^{x(t)}\frac{ds}{\psi^{-1}(f(s))}\leqslant&\psi_0^3\psi^{-1}\left(\frac{-1}{b_0}\right)\int_T^t\psi^{-1}\left(\frac{1}{\phi(x^{(n)}(t))}\right)\\&\cdot\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)-r(u,\xi)]d\eta(\xi)du\right)ds\\\leqslant&\psi_0^3\psi^{-1}\left(-\frac{1}{b_0}\right)\int_{E_2\cap[T,\ t]}\psi^{-1}\left(\frac{1}{\phi(x^{(n)}(t))}\right)\\&\cdot\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)-r(u,\xi)]d\eta(\xi)du\right)ds\end{aligned}\tag{2.7}$$

其中E_2由(2.3)式定义．由ϕ的条件(R_2)及ϕ的连续性知对$t\in E_2$,

$$\phi(x^{(n)}(t))\leqslant\phi(|x^{(n)}(t)|)\leqslant\phi_0\qquad(\text{正常数})$$

故(2.7)式成为

$$\int_{x(T)}^{x(t)}\frac{ds}{\psi^{-1}(f(s))}\leqslant\psi_0^3\psi^{-1}\left(-\frac{1}{b_0}\right)\int_{E_2\cap[T,t]}\psi^{-1}\left(\frac{1}{\phi_0}\right)\cdot\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)-r(u,\xi)]d\eta(\xi)du\right)ds$$

令$t\to+\infty$得

$$\int_{x(T)}^{c}\frac{ds}{\psi^{-1}(f(s))}\leqslant\psi_0^3\psi^{-1}\left(-\frac{1}{b_0}\right)\cdot\psi^{-1}\left(\frac{1}{\phi_0}\right)\cdot\int_{E_2}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)-r(u,\xi)]d\eta(\xi)du\right)ds$$

由引理2知mes $E_1<+\infty$, mes $E_1^c=$mes $E_2=+\infty$, 再注意到$x(T)>c>0$, $\psi^{-1}(f(s))>0$, $(c\leqslant s\leqslant x(T))$, 有

$$-\psi_0^3\psi^{-1}\left(-\frac{1}{b_0}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{\phi_0}\right)\int_{E_2}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)-r(u,\xi)]d\eta(\xi)du\right)ds\leqslant\int_c^{x(T)}\frac{ds}{\psi^{-1}(f(s))}<+\infty$$

取$E_T=E_2$, 则

$$\int_{E_T}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)-r(u,\xi)]d\eta(\xi)du\right)ds<+\infty$$

对于$x(t)$最终为负的情形，类似可证．证毕．

定理3 设(2.1)、(2.4)、(2.5)成立，且对任意$\varepsilon>0$，有

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{ds}{\psi^{-1}(f(s))}<+\infty,\quad\int_0^{-\varepsilon}\frac{ds}{\psi^{-1}(f(s))}<+\infty\tag{2.8}$$

则方程(1.1)有A_0型（即$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$）非振动解$x(t)$的必要条件为当$T\geqslant t_0$充分大时，存在$E_T\subset[T,+\infty)$, mes $E_T=+\infty$, mes $E_T^c<+\infty$, $E_T^c=[T,+\infty)\backslash E_T$, 使得(2.6)式成立．

证明 设$x(t)$为方程(1.1)的A_0型非振动解，不妨设$x(t)$最终为正，类似于定理2的证明可得

$$\int_{x(T)}^{x(t)}\frac{1}{\psi^{-1}(f(s))}ds\leqslant\psi_0^3\psi^{-1}\left(-\frac{1}{b_0}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{\phi_0}\right)\cdot\int_{E_2}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)-r(u,\xi)]d\eta(\xi)du\right)ds$$

令$t\to+\infty$，由$x(t)\to0$及$x(T)>0$和条件(2.8)得

$$-\psi_0^3\psi^{-1}\left(-\frac{1}{b_0}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{\phi_0}\right)\int_{E_2}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)-r(u,\xi)]d\eta(\xi)du\right)ds\leqslant\int_0^{x(T)}\frac{ds}{\psi^{-1}(f(s))}<+\infty$$

取$E_T=E_2$, 则mes $E_T=+\infty$, mes $E_T^c=$mes $E_1<+\infty$, 且

$$\int_{E_T}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)-r(u,\xi)]d\eta(\xi)du\right)ds<+\infty$$

即(2.6)式成立。$x(t)<0$时类似可证。证毕。

三、方程振动的充分判据

定理4 设(2.1)、(2.4)、(2.5)成立，且

$$\int_{t_0}^{+\infty}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\right)ds=+\infty \tag{3.1}$$

而在任何有限的Lebesgue测度集$E\subset[t_0,\ +\infty)$上积分

$$\int_E\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\right)ds<+\infty \tag{3.2}$$

则方程(1.1)振动。

证明 用反证法，假设结论不成立，则(1.1)存在非振动解$x(t)$，不妨设 $x(t)$ 最终为正(($x(t)$最终为负的情形类似证明)，由引理1知存在$T_1\geqslant t_0$，使当 $t\geqslant T_1$ 时 $x(t)>0$，$x'(t)<0$ 且$x(h_i(t,\ \xi))>0$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，$x^{(n)}(t)$不变号，又由(2.1)知存在$T\geqslant T_1$，当$t\geqslant T$时

$$\int_T^t\int_\alpha^\beta[h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds\geqslant 0$$

从T到$t(\geqslant T)$积分方程(1.1)并利用分部积分法有

$$\begin{aligned}
&a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))\\
&\leqslant a(T)b(x(T))\phi(x^{(n)}(T))\psi(x'(T))-\int_T^t f(x(s))\int_\alpha^\beta[h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds\\
&=a(T)b(x(T))\phi(x^{(n)}(T))\psi(x'(T))-f(x(t))\int_T^t\int_\alpha^\beta[h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds\\
&\quad+\int_T^t f'_x(x(s))x'(s)\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)-r(u,\xi)]d\eta(\xi)duds\\
&\leqslant a(T)b(x(T))\phi(x^{(n)}(T))\psi(x'(T))\triangleq\delta<0
\end{aligned}$$

故 $\psi(x'(t))\leqslant\dfrac{\delta}{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))}$

由(2.4)、(2.5)有

$$\begin{aligned}
x'(t)&\leqslant\psi_0^2\psi^{-1}\left(\frac{\delta}{b(x(t))}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(t)}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{\phi(x^{(n)}(t))}\right)\\
&\leqslant\psi_0^2\psi^{-1}\left(\frac{\delta}{b_0}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(t)}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{\phi(x^{(n)}(t))}\right)
\end{aligned}$$

从T到t积分上式得

$$\begin{aligned}
x(t)&\leqslant x(T)+\psi_0^2\psi^{-1}\left(\frac{\delta}{b_0}\right)\int_T^t\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{\phi(x^{(n)}(s))}\right)ds\\
&\leqslant x(T)+\int_{E_2\cap[T,\ t]}\psi_0^2\cdot\psi^{-1}\left(\frac{\delta}{b_0}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{\phi(x^{(n)}(s))}\right)ds
\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中E_2由(2.3)给出，对$t\in E_2$，$\phi(x^{(n)}(t))\leqslant\phi(|x^{(n)}(t)|)\leqslant\phi_0(\phi_0>0)$，故(3.3)式成为

$$x(t)\leqslant x(T)+\psi_0^2\psi^{-1}\left(\frac{\delta}{b_0}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{\phi_0}\right)\int_{E_2\cap[T,\ t]}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\right)ds \tag{3.4}$$

由引理2知 mes $E_1<+\infty$，从而mes $E_2=+\infty$，又

$$\int \quad ^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\right)ds+\int_{E_2}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\right)ds=\int_T^{+\infty}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\right)ds=+\infty$$

条件(3.2)表明

$$\int_{E_2}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\right)ds=+\infty$$

在(3.4)式中令$t\to+\infty$，则$x(t)\to-\infty$，这与“$x(t)>0$”矛盾，所以方程(1.1)是振动的．证毕．

定理5 设条件(2.1)、(2.4)、(2.5)、(3.1)和(3.2)成立，且

$$\int_{t_0}^{+\infty}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)-r(u,\xi)]d\eta(\xi)du\right)ds=+\infty \tag{3.5}$$

而在任何有限的Lebesgue测度集$E\subset[t_0,\ +\infty)$上积分

$$\int_E\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)-r(u,\xi)]d\eta(\xi)du\right)ds<+\infty \tag{3.6}$$

则方程(1.1)振动．

证明 若不然，则(1.1)存在非振动解$x(t)$，由条件(2.1)知定理1成立，故非振动解$x(t)$必属于A_c型或A_0型．

若$x(t)$属于A_c型，因(2.4)、(2.5)成立，由定理2知此时必有$E_T\subset[T,\ +\infty)$，mes$E_T=+\infty$，mes $E_T^c<+\infty$使得

$$\int_{E_T}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)+r(u,\xi)]d\eta(\xi)du\right)ds<+\infty$$

$(T\geqslant t_0)$，但由(3.5)知

$$\int_{E_T}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)-r(u,\xi)]d\eta(\xi)du\right)ds$$
$$+\int_{E_T^c}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)-r(u,\xi)]d\eta(\xi)du\right)ds=+\infty$$

而(3.6)意味着

$$\int_{E_T}\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\int_T^s\int_\alpha^\beta[h(u,\xi)-r(u,\xi)]d\eta(\xi)du\right)ds=+\infty \tag{3.7}$$

矛盾．

若$x(t)$属于A_0型，由(2.4)、(2.5)和(2.8)成立，利用定理3知此时必有(2.6)式成立，这仍与(3.7)矛盾．

定理6 假设条件(2.4)、(2.5)、(2.8)成立，且

1° $f'(x)\geqslant k>0$ (3.8)

2° 对充分大的T，当$t\geqslant T$时$h(t,\xi)-r(t,\xi)\geqslant 0$，$\forall\xi\in[\alpha,\beta]$成立．当$t>T$时，

$$\int_T^t\int_\alpha^\beta[h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds>0$$

而且

$$\int_T^{+\infty}\int_\alpha^\beta[h(t,\xi)-r(t,\xi)]d\eta(\xi)dt<+\infty \tag{3.9}$$

3° 存在某正函数$Q(t)$使

$$\int_T^{+\infty} Q(t) \int_\alpha^\beta [h(t,\xi)-r(t,\xi)]d\eta(\xi)dt=+\infty \tag{3.10}$$

$$\int_T^{+\infty} \frac{[Q'(t)]^2dt}{Q(t)\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(t)}\int_t^{+\infty}\int_\alpha^\beta [h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds\right)}<+\infty \tag{3.11}$$

而在任何有限的Lebesgue测度集$E\subset[T,\ +\infty)$上

$$\int_E Q'(t)<+\infty \tag{3.12}$$

则方程(1.1)振动。

证明 设$x(t)$是(1.1)的非振动解，不妨设$t\geqslant T(T\geqslant t_0)$时$x(t)>0$ ($x(t)<0$的情形证明类似)，$x(h_i(t,\xi))>0$，$i=1$，2，…，m，于是$t\geqslant T$时(2.2)式成立。

$$\left[\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))}{f(x(t))}\right]'\leqslant\int_\alpha^\beta [r(t,\xi)-h(t,\xi)]d\eta(\xi) \tag{2.2}$$

若存在$t=t_1\geqslant T$使$x'(t_1)=0$，从t_1到$t(t\geqslant t_1)$积分(2.2)′式得

$$\begin{aligned}&\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))}{f(x(t))}\\ &\leqslant\frac{a(t_1)b(x(t_1))\phi(x^{(n)}(t_1))\psi(x'(t_1))}{f(x(t_1))}\\ &\quad-\int_{t_1}^t\int_\alpha^\beta [h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds\\ &=-\int_{t_1}^t\int_\alpha^\beta [h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds\end{aligned}$$

由条件(3.9)知，$\phi(x^{(n)}(t))>0$，$\psi(x'(t))<0$。因而，当$t>t_1$时 $x'(t)<0$，$x^{(n)}(t)$ 不变号。取$t_2>t_1$，从t_2到$t(\geqslant t_2)$积分方程(1.1)由定理4后半部分的证明和条件(2.4)、(2.5)、(3.1)和(3.2)知$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=-\infty$，这与假设"$x(t)>0$"矛盾。

若当$t>T$时，$x'(t)>0$，从T到$t(\geqslant T)$积分(1.1)式并取极限$t\to+\infty$，则

$$\begin{aligned}0&\leqslant\lim_{t\to+\infty}\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))}{f(x(t))}\\ &\leqslant\frac{a(T)b(x(T))\phi(x^{(n)}(T))\psi(x'(T))}{f(x(T))}-\int_T^{+\infty}\int_\alpha^\beta [h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds\end{aligned}$$

于是当$t\geqslant T$时

$$\int_t^{+\infty}\int_\alpha^\beta [h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds\leqslant\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))}{f(x(t))} \tag{3.13}$$

由于$x'(t)>0$及(3.8)式，则当$t>T$时

$$\begin{aligned}&\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(t)}\int_t^{+\infty}\int_\alpha^\beta [h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds\right)\\ &\leqslant\psi_0^2\psi^{-1}\left[\frac{1}{f(x(T))}\right]\psi^{-1}(\phi(x^{(n)}(t))x'(t))\end{aligned} \tag{3.14}$$

又因

$$\left[\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))Q(t)}{f(x(t))}\right]'$$

$$=Q(t)\,\frac{R-H}{f}-\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))Q(t)f'_x(x(t))x'(t)}{f^2(x(t))}$$

$$+\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))Q'(t)}{f(x(t))}$$

$$\leqslant Q(t)\int_\alpha^\beta[r(t,\xi)-h(t,\xi)]d\eta(\xi)-a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\,\frac{\psi(x'(t))}{x'(t)}$$

$$\cdot\left[\frac{(Q(t)f'_x(x(t)))^{\frac{1}{2}}x'(t)}{f(x(t))}-\frac{Q'(t)}{2}(f'_x(x(t))Q(t))^{-\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$+\frac{[Q'(t)]^2a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))}{4Q(t)f'_x(x(t))x'(t)}$$

$$\leqslant Q(t)\int_\alpha^\beta[r(t,\xi)-h(t,\xi)]d\eta(\xi)+\frac{[Q'(t)]^2a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))}{4Q(t)f'_x(x(t))x'(t)}\qquad(3.15)$$

再从T到$t(>T)$积分不等式

$$[a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))]'\leqslant f(x(t))\int_\alpha^\beta[r(t,\xi)-h(t,\xi)]d\eta(\xi)$$

有

$$a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))$$

$$\leqslant a(T)b(x(T))\phi(x^{(n)}(T))\psi(x'(T))+\int_T^t f(x(s))\int_\alpha^\beta[r(s,\xi)-h(s,\xi)]d\eta(\xi)ds$$

$$\leqslant a(T)b(x(T))\phi(x^{(n)}(T))\psi(x'(T))\triangleq M_0\qquad(3.16)$$

(3.16)式用到条件(3.9)，将(3.14)、(3.16)代入(3.15)得

$$\left[\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))Q(t)}{f(x(t))}\right]'$$

$$\leqslant Q(t)\int_\alpha^\beta[r(t,\xi)-h(t,\xi)]d\eta(\xi)+\frac{M[Q'(t)]^2}{4Q(t)f'_x(x(t))x'(t)}$$

$$\leqslant Q(t)\int_\alpha^\beta[r(t,\xi)-h(t,\xi)]d\eta(\xi)$$

$$+\frac{M_1[Q'(t)]^2\psi^{-1}(\phi(x^{(n)}(t)))}{Q(t)\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(t)}\int_t^{+\infty}\int_\alpha^\beta[h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds\right)}\qquad(3.17)$$

其中$M_1=(M_0/4k)\psi_0^2\psi^{-1}(b_0/f(x(T)))$，注意到(3.15)式中的第一个等式，即有

$$\left[\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))Q(t)}{f(x(t))}\right]'$$

$$\leqslant Q(t)\int_\alpha^\beta[r(t,\xi)-h(t,\xi)]d\eta(\xi)+\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))Q'(t)}{f(x(t))}\qquad(3.18)$$

积分(3.17)和(3.18)，

$$\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))Q(t)}{f(x(t))}$$

$$\leqslant\frac{a(T)b(x(T))\phi(x^{(n)}(T))\psi(x'(T))Q(T)}{f(x(T))}+\int_T^t Q(s)\int_\alpha^\beta[r(s,\xi)-h(s,\xi)]d\eta(\xi)ds$$

$$+\int_{E_2\cap[T,t]}\frac{M_1[Q'(t)]^2\psi^{-1}(\phi(x^{(n)}(t))dt}{Q(t)\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(t)}\int_t^{+\infty}\int_\alpha^\beta[h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds\right)}$$

$$+\int_{E_1\cap[T,t]}\frac{a(s)b(x(s))\phi(x^{(n)}(s))\psi(x'(s))Q'(s)}{f(x(s))}ds \tag{3.19}$$

其中E_1和E_2由(2.3)定义．注意到(2.2)和条件2°，则当$t>T$时，有

$$\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))}{f(x(t))}\leqslant M_2\qquad (M_2>0\text{为常数}) \tag{3.20}$$

进而，由(3.13)式，当$t>T$时，$x^{(n)}(t)$不变号，于是由引理2知mes $E_1<+\infty$，由(3.12)，我们可记$\int_{E_1}Q'(s)ds=M(M>0$为常数)．而$\forall t\in E_2$，$\phi(x^{(n)}(t))\leqslant\phi(|x^{(n)}(t)|)\leqslant\phi_0$ ($\phi_0>0$为常数)，故(3.19)式成为

$$\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))Q(t)}{f(x(t))}$$

$$\leqslant\frac{a(T)b(x(T))\phi(x^{(n)}(T))\psi(x'(T))Q(T)}{f(x(T))}+\int_T^t Q(s)\int_\alpha^\beta[r(s,\xi)-h(s,\xi)]d\eta(\xi)ds$$

$$+\int_{E_2\cap[T,t]}\frac{M_1[Q'(t)]^2\psi^{-1}(\phi_0)dt}{Q(t)\psi^{-1}\left(\frac{1}{a(t)}\int_t^{+\infty}\int_\alpha^\beta[h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds\right)}+MM_2$$

由(3.10)和(3.11)，可以得到

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))Q(t)}{f(x(t))}=-\infty \tag{3.21}$$

故存在$T_1>T$，当$t>T_1$时$\psi(x'(t))<0$，从而$x'(t)<0$，但这和$x'(t)$的假设矛盾.于是得到：必存在$T_2\geqslant T$且$x'(T_2)<0$．从T_2到$t(t\geqslant T_2)$积分(2.2)有

$$\frac{a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))}{f(x(t))}$$

$$\leqslant\frac{a(T_2)b(x(T_2))\phi(x^{(n)}(T_2))\psi(x'(T_2))}{f(x(T_2))}-\int_T^t\int_\alpha^\beta[h(s,\xi)-r(s,\xi)]d\eta(\xi)ds$$

所以，当$t\geqslant T_2$时$x'(t)<0$，重复定理4后半部分的推证过程，据条件(3.1)、(3.2)，有$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=-\infty$，这与$x(t)>0$的假设矛盾．因此(1.1)是振动的．证毕．

注1 对于非线性方程

$$[a(t)b(x(t))\phi(x^{(n)}(t))\psi(x'(t))]'+\bar{H}(t,x(t),x(h_1(t)),\cdots,x(h_m(t)))$$
$$=\bar{R}(t,x(t),x'(r_1(t)),\cdots,x'(r_m(t))) \tag{3.22}$$

的研究，只须注意在方程(1.1)中令

$$\bar{H}(t,x(t),x(h_1(t)),\cdots,x(h_m(t)))$$
$$=\int_0^1\bar{H}(t,x(t),x(h_1(t)),\cdots,x(h_m(t)))d\xi$$
$$\bar{R}(t,x(t),x'(r_1(t)),\cdots,x'(r_m(t)))$$
$$=\int_0^1\bar{R}(t,x(t),x'(r_1(t)),\cdots,x'(r_m(t)))d\xi$$

可以研究方程(3.22)．

注2 若在方程(3.22)中令$b(x)\equiv 1$，$\phi(x)\equiv 1$，$\psi(x)=x$，$\bar{H}(t,x(t),\cdots)=Q(t,x)$，$\bar{R}(t,x(t),\cdots)=P(t,x,x')$就是J. R. Graff等在文[3]中研究的方程，因此，本文改进和发展了文[3]中的结果。

注3 若在方程(1.1)中令$\phi(x)\equiv 1$就是文[1]所研究的方程，则本文的结论推广和发展了文[1]的结论，相应地，推广了文[4]的结论。

参 考 文 献

[1] 刘斌，二阶泛函微分方程的振动性质，数学学报，**38**(2) (1995)，145—153.

[2] 温立志，二阶泛函微分方程的渐近性和振动性，中国科学，A(2) (1986)，149—161.

[3] J. R. Graff, S. M. Rankin and P. W. Spikess, Oscillation theorems for perturbed nonlinear differential equatios, *J. Math. Anal. Appl.*, **65** (1978), 375—390.

[4] 阮炯，二阶线性泛函微分方程的振动性与渐近性，复旦大学学报，**23**(4) (1984)，455—467.

Oscillatory Behavior for High Order Functional Differential Equations

Lin Wenxian

(*Departmant of Mathematics, Hanshan Teacher's College, Chaozhou, Guangdong* 521041, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, the osillatory behavior for high order nonlinear functional differential equations are studied by means of the Lebesgue measure. It is found that the nonoscillatory solutions only have two kinds on some conditions. And necessary conditions for the existence of each kind of nonoscillatory solutions are presented as well. At the same time, some sufficient conditions for oscillatory solutions are also established.

Key words functional differential equation, oscillation, nonlinear, Lebesgue measure