应用数学和力学，第18卷 第8期（1997年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

线性方程组的异步松弛迭代法*

谷 同 祥[1]

（张汝清推荐，1995年7月6日收到，1997年3月31日收到修改稿）

摘 要

本文考虑解线性方程组经典迭代法的异步形式，对系数矩阵为H矩阵，给出了异步迭代过程收敛性的充分条件，这不仅降低了文献[3]对系数矩阵的要求，而且收敛区域比文献[3]的大。

关键词 异步迭代法 松驰方法 线性方程组

一、异步松驰迭代法

科学与工程的许多重要领域已经并正在提出越来越多的大型或超大型科学计算问题，这些计算问题中有许多又直接或间接地归结为大型或超大型线性代数方程组

$$Ax=b \qquad A\in R^{n\times n}\text{非奇异，} b\in R^n\text{已知} \tag{1.1}$$

的求解。并行计算机的出现，使这些问题的求解成为可能。为有效地使用并行计算机，必须设计合理的并行算法，本文考虑用异步松驰迭代法求解线性代数方程组，其目的是能够在MIMD系统上求解线性代数方程组时，充分发挥各处理机的效率。

关于异步迭代法，已有一些文献论及。1969年，Chazan和Miranker在文献[1]中提出了解线性系统的混乱松驰法，给出了线性迭代$x=Bx+c$的收敛性定理，即当$\rho(|B|)<1$时，此迭代过程异步收敛。1978年，Baudet在文献[2]中给出了非线性迭代$x=Fx$的收敛性定理，即当F是P压缩时，迭代过程异步收敛。1992年，迟学斌[3]研究了Jacobi，Gauss-Seidel迭代及其松驰型迭代的异步收敛性，得到了当系数矩阵为M或严格对角占优矩阵，及松驰因子ω满足$0<\omega\leqslant 1$时，迭代过程异步收敛。本文给出的异步松驰迭代法，以AOR方法为基础，研究了当系数矩阵为H矩阵时的收敛性，所得收敛性区域比文献[3]的大。另外，本文提出的异步松驰迭代法具有比文献[3]中方法适应面广，灵活性强，收敛速度快的特点。

为讨论方便，下面引入文献[2]中关于$x=Fx$的异步迭代的定义，为此，记Fx的第i个分量为$f_i(x)$或$f_i(x_1,\cdots,x_n)$，$i=1,\cdots,n$，R^n中向量序列记为$x^{(k)}$，$k=0,1,\cdots$，N为所有非负整数组成的集合。

定义1 设F是$R^n\to R^n$的映射，则算子F和初始点$x^{(0)}$为异步迭代是由下述递推关系定

---

* 国家自然科学基金及河南省教委自然科学基础研究资助项目

1 河南师范大学数学系，河南新乡 453002

义的向量序列$x^{(k)}\in R^n$ ($k=0,1,\cdots$)

$$x_i^{(k)}=\begin{cases}x_i^{(k-1)}, & i\overline{\in} J_k\\ f_i(x_1^{(s_1(k))},\cdots,x_n^{(s_n(k))}) & i\in J_k\end{cases}\tag{1.2}$$

其中$J=\{J_k|k=1,2,\cdots\}$是$\{1,2,\cdots,n\}$的非空子集构成的序列，$S=\{s_1(k),\cdots,s_n(k)|k=1,2,\cdots\}$是$N^n$中的一个序列。此外，对每个$i=1,2,\cdots,n$，$J$和$S$满足下面的基本假设

1) $s_i(k)<k$，对所有$k=1,2,\cdots$；

2) $\lim\limits_{k\to\infty}s_i(k)=\infty$；

3) 集合$\{k|i\in J_k\}$是无界的。

若$A=(a_{ij})$，记$|A|=(|a_{ij}|)$，$A\geqslant 0$表示对任意$i,j=1,\cdots,n$，$a_{ij}\geqslant 0$，A的比较矩阵为$\langle A\rangle=(\alpha_{ij})$，其中$i\neq j$时，$\alpha_{ij}=-|a_{ij}|$；$i=j$时，$\alpha_{ii}=|a_{ii}|$。记$Z^{n\times n}=\{A\in R^{n\times n}|a_{ij}\leqslant 0$，对任意$i\neq j\}$。

定义2

1) 称A为L矩阵，若$A\in Z^{n\times n}$且$a_{ii}>0$；

2) 称A为M矩阵，若$A\in R^{n\times n}$且$A^{-1}\geqslant 0$；

3) 称A为H矩阵，若$\langle A\rangle$为M矩阵。

定义3 称$A=B-C$为A的一个分裂，如果B是非奇异的。

有了关于系数矩阵A的分裂$A=B-C$，可以定义解(1.1)的迭代格式：

$$x=B^{-1}Cx+B^{-1}b\tag{1.3}$$

下面考虑解(1.1)的经典迭代法，为此将A分裂为

$$A=D-L-U$$

其中 $D=\mathrm{diag}(A)$，即A的对角元素组成的对角矩阵，L 和U分别为严格下、上三角矩阵，通过引进松驰因子ω和加速因子r，可得如下加速超松驰迭代法，即AOR迭代法

$$x=(D-rL)^{-1}[(1-\omega)D+(\omega-r)L+\omega U]x+\omega(D-rL)^{-1}b\tag{1.4}$$

若记

$$\mathscr{L}_{r,\omega}=(D-rL)^{-1}[(1-\omega)D+(\omega-r)L+\omega U],\quad c=\omega(D-rL)^{-1}b\tag{1.5}$$

则迭代法(1.4)可写成

$$x=\mathscr{L}_{r,\omega}x+c\tag{1.6}$$

定义算子$Fx=\mathscr{L}_{r,\omega}x+c$，且按(1.2)定义的异步迭代进行计算，则我们得到将要研究的异步松驰迭代法，或称之为异步AOR迭代法，

$$x_i^{(k)}=\begin{cases}x_i^{(k-1)}, & i\overline{\in} J_k\\ (\mathscr{L}_{r,\omega}z^{(k)}+c)_i, & i\in J_k\end{cases}\tag{1.7}$$

其中 $$z^{(k)}=(x_1^{(s_1(k))},\cdots,x_n^{(s_n(k))})^T$$

注意到对ω和r的不同选取可得不同的异步迭代过程：

1) 取$r=\omega$，得异步SOR迭代法，即文献[3]中的Gauss-Seidel松驰迭代法；

2) 取$r=0$，得异步JOR迭代法，即文献[3]中的Jacobi松驰迭代法；

3) 取$r=\omega=1$，得异步Gauss-Seidel迭代法；

4) 取$r=0$，$\omega=1$，得异步Jacobi迭代法。

由于利用了松驰技术，从而可以得到比原方法更好的收敛速度。

二、收敛性分析

引理1 设$A\in R^{n\times n}$为H矩阵，$\langle A\rangle=|D|-|L|-|U|=|D|-|B|$，则当因子$r$，$\omega$满足

$$0\leqslant r\leqslant\omega,\quad 0<\omega<2/[1+\rho(|D|^{-1}|B|)] \tag{2.1}$$

时，存在一正数$\beta<1$和一正向量v，使得

$$|\mathscr{L}_{r,\omega}|v\leqslant\beta v \tag{2.2}$$

证明 由于A为H矩阵，$\langle A\rangle$为M矩阵，故存在正向量$v^{(1)}>0$（不妨设$v^{(1)}=\langle A\rangle^{-1}(1,1,\cdots,1)^T$），使得$\langle A\rangle v^{(1)}>0$，又$L$为严格下三角矩阵，则$\langle D-rL\rangle$为$L$矩阵，且

$$\langle D-rL\rangle^{-1}=(|D|-r|L|)^{-1}\geqslant 0$$

从而$D-rL$为H矩阵，因此有

$$|(D-rL)^{-1}|\leqslant\langle D-rL\rangle^{-1}=(|D|-r|L|)^{-1}$$

由(1.5)有

$$\begin{aligned}|\mathscr{L}_{r,\omega}|&\leqslant|(D-rL)^{-1}|\cdot|(1-\omega)D+(\omega-r)L+\omega U|\\&\leqslant\langle D-rL\rangle^{-1}[|1-\omega||D|+|\omega-r||L|+\omega|U|]\end{aligned} \tag{2.3}$$

下面分两种情况

(i) 当$0\leqslant r<\omega\leqslant 1$时

记

$$\begin{aligned}\bar{B}&=|D|-r|L|=\langle D-rL\rangle\\\bar{C}&=(1-\omega)|D|+(\omega-r)|L|+\omega|U|\\&=(|D|-r|L|)-\omega(|D|-|L|-|U|)=\bar{B}-\omega\langle A\rangle\end{aligned}$$

由(2.3)有

$$\begin{aligned}|\mathscr{L}_{r,\omega}|v^{(1)}&\leqslant\bar{B}^{-1}\bar{C}v^{(1)}=\bar{B}^{-1}(\bar{B}-\omega\langle A\rangle)v^{(1)}\\&=v^{(1)}-\omega\bar{B}^{-1}\langle A\rangle v^{(1)}\end{aligned}$$

由于$\bar{B}$为M矩阵，$\bar{B}^{-1}\geqslant 0$，而$\langle A\rangle v^{(1)}>0$，所以$\omega\bar{B}^{-1}\langle A\rangle v^{(1)}>0$，故$|\mathscr{L}_{r,\omega}|v^{(1)}<v^{(1)}$，从而存在一正数$\beta^{(1)}<1$，使得

$$|\mathscr{L}_{r,\omega}|v^{(1)}\leqslant\beta^{(1)}v^{(1)} \tag{2.4}$$

(ii) 当$0\leqslant r<\omega$，$1<\omega<2/(1+\rho(|D|^{-1}|B|))$时

由文献[5,Th7.2]知，当$1<\omega<2/(1+\rho(|D|^{-1}|B|))$时，$(2-\omega)|D|-\omega|B|$为$M$矩阵，故存在正向量$v^{(2)}>0$，使得$((2-\omega)|D|-\omega|B|)v^{(2)}>0$，记

$$\begin{aligned}\tilde{C}&=(\omega-1)|D|+(\omega-r)|L|+\omega|U|\\&=(|D|-r|L|)-(2-\omega)|D|+\omega|B|=\bar{B}-[(2-\omega)|D|-\omega|B|]\end{aligned}$$

由(2.3)有

$$\begin{aligned}|\mathscr{L}_{r,\omega}|v^{(2)}&\leqslant\bar{B}^{-1}\tilde{C}v^{(2)}=\bar{B}^{-1}(\bar{B}-(2-\omega)|D|+\omega|B|)v^{(2)}\\&=v^{(2)}-\bar{B}^{-1}[(2-\omega)|D|+\omega|B|]v^{(2)}\end{aligned}$$

与(i)同理可得：存在一正数$\beta^{(2)}<1$，使得

$$|\mathscr{L}_{r,\omega}|v^{(2)}\leqslant\beta^{(2)}v^{(2)} \tag{2.5}$$

取$\beta=\max\{\beta^{(1)},\beta^{(2)}\}$，$v=\max\{v^{(1)},v^{(2)}\}$(依分量取最大)，由(2.4)和(2.5)即得(2,2)成立。

定理1 在引理1的条件下，对任意初始向量$x^{(0)}$，异步松驰迭代法(1,7)收敛于(1,1)的

解$x^*=A^{-1}b$。

证明 由于误差向量$e^{(k)}=x^{(k)}-x^*$满足$b=0$时的(1.7)式，故我们将假设$x^*=0$，并证明当$k\to+\infty$时，$x^{(k)}\to 0$。

任给初始向量$x^{(0)}$，选取正数α，使得$|x^{(0)}|\leqslant\alpha v$，下面将证明，存在序列$k_p$，$p=0,1,2,\cdots$，使得

$$|x^{(k)}|\leqslant\alpha\beta^q v \qquad 当k\geqslant k_p时 \tag{2.6}$$

由于$0<\beta<1$，因此，当$k\to+\infty$时，$x^{(k)}\to 0$，定理可证。

我们首先证明：如果取$k_0=0$，(2.6)式对$p=0$成立，亦即对$k\geqslant 0$，我们有

$$|x^{(k)}|\leqslant\alpha v \tag{2.7}$$

由α的选取可知，不等式(2.7)对$k=0$成立。由数学归纳法，假设(2.7)对$0\leqslant k<t$成立并考虑$x^{(t)}$。设$x^{(t)}$由(1.7)给出，由(1.7)，$x^{(t)}$的分量当$i\overline{\in}J_t$时为$x_i^{(t)}=x_i^{(t-1)}$，此时，$|x_i^{(t)}|=|x_i^{(t-1)}|\leqslant\alpha v_i$。当$i\in J_t$时为$x_i^{(t)}=[\mathscr{L}_{r,\omega}z^{(t)}]_i$，此时，由于$s_i(t)<t$（定义1之条件1），我们有

$$|x_i^{(t)}|=|[\mathscr{L}_{r,\omega}z^{(t)}]_i|\leqslant\alpha\beta v_i$$

由于$0<\beta<1$，仍成立$|x_i^{(t)}|\leqslant\alpha v_i$，由数学归纳法知(2.7)成立，从而如果取$k_0=0$，则(2.6)对$p=0$成立。

现假设对$0\leqslant p<q$，k_p已找到且使(2.6)成立，以下将确定k_p，使得(2.6)式对$p=q$也成立。

首先定义$m=\min\{j\,|\,k\geqslant j,\ s_i(k)\geqslant k_{q-1},\ i=1,2,\cdots,n\}$，由定义1之条件2）知，$m$是存在的。又由条件1)知，$m>k_{q-1}$，故$|x^{(m)}|\leqslant\alpha\beta^{q-1}v$。

取$k\geqslant m$，考察$x^{(k)}$的分量。由m的选取可知，对$i=1,2,\cdots,n$，$s_i(k)\geqslant k_{q-1}$，故$|z^{(k)}|\leqslant\alpha\beta^{q-1}v$。若$i\in J_k$，则由(2.6)和引理1可得

$$|x_i^{(k)}|=|[\mathscr{L}_{r,\omega}z^{(k)}]_i|\leqslant\alpha\beta^{q-1}[\mathscr{L}_{r,\omega}v]_i\leqslant\alpha\beta^q v_i \tag{2.8}$$

若$i\overline{\in}J_k$，则$x_i^{(k)}=x_i^{(k-1)}$，即$x^{(k)}$的第i个分量没有被校正过。因此，只要第i个分量在第m和第k次迭代间被校正过，则有$|x_i^{(k)}|\leqslant\alpha\beta^q v_i$，现定义

$$k_q=\min\{k\,|\,k\geqslant m,\ 且\{1,2,\cdots,n\}=\{J_m,\cdots,J_k\}\}$$

由定义1之条件3)知上述k_q存在，故当$k\geqslant k_q$时，在第m和第k次迭代间，每一分量至少被校正过一次，因此对任意$i=1\cdots,n$，(2.8)均成立，从而(2.6)式对$p=q$成立。 证毕

由此定理，我们可得如下推论：

推论1 设$A\in R^{n\times n}$为H矩阵，$\langle A\rangle=|D|-|L|-|U|=|D|-|B|$，则当因子$\omega$满足

$$0\leqslant\omega\leqslant 2/[1+\rho(|D|^{-1}|B|)]$$

时，对任意初始向量$x^{(0)}$异步SOR迭代法收敛于$x^*=A^{-1}b$。

推论2 条件同推论1，JOR迭代法是异步收敛的。

推论3 设$A\in R^{n\times n}$为H矩阵，$\langle A\rangle=|D|-|L|-|U|=|D|-|B|$，则对任意初始向量$x^{(0)}$，Gauss-Seidel迭代法异步收敛于$x^*=A^{-1}b$。

推论4 条件同推论3，Jacobi迭代法是异步收敛的。

评注 相应于这4个推论，文献[3]中的收敛性定理为：定理3、4、5。在那里，要求系数矩阵A为M矩阵或严格对角占优矩阵，且收敛性区域为$0<\omega\leqslant 1$，本文仅要求A为H矩阵，从而降低了对A的要求，另外，我们给出的收敛性区域为（2.1），这比文献[3]的宽得多。可见我们提出的异步松驰迭代法比文献[3]中的方法适应面广，灵活性强，收敛速度快。

参 考 文 献

[1] D. Chazan and W. Miranker, Chaotic relaxation, *Lin. Alg. Appl.*, 2 (1969), 199—222.

[2] G. Baudet, Asynchronous iterative methods for multiprocessors, *J. ACM*, 25 (1978), 226—244.

[3] 迟学斌，线性方程组的异步迭代法，计算数学，14(3) (1992), 330—333.

[4] 谷同祥等，一类多分裂迭代法，《全国第三届并行算法学术会议论文集》，武汉，华中理工大学出版社 (1992), 186—190.

[5] D. M. Young, *Iterative Solution of Large Linear Systems*, Academic Press, New York (1971).

Asynchronous Relaxed Iterative Methods for Solving Linear Systems of Equations

Gu Tongxiang

(Department of Mathematics, Henan Normal University, Xinxiang, Henan 453002, *P. R. China)*

Abstract

In this paper, the asynchronous versions of classical iterative methods for solving linear systems of equations are considered. Sufficient conditions for convergence of asynchronous relaxed processes are given for H-matrix by which not only the requirements of [3] on coefficient matrix are lowered, but also a larger region of convergence than that in [3] is obtained.

Key words asynchronous iterative method, relaxed method, linear systems of equations