

# 非均匀介质中弹性波动方程的参数摄动法\*

牛玉清<sup>1</sup> 马兴瑞<sup>1</sup> 黄文虎<sup>1</sup>

(1996年1月22日收到)

## 摘 要

本文通过对非均匀介质弹性波动方程中的介质参数引入背景场量和摄动量, 得到以摄动项为次生源的均匀介质中的波动方程, 利用Green函数理论化微分方程为积分方程; 然后把均匀介质中的位移波场做为第一次迭代结果, 代入积分方程进行位移波场的求解; 当扰动量达50%时, 此方法仍然有效, 分析数值结果, 从而对一般非均匀介质中的波场性质有了一个定性了解, 结果与一般非均匀介质中的声波局部理论基本一致。

**关键词** 弹性波动方程 摄动参数 积分方程 积分迭代

## 一、引 言

弹性波因其衍射、散射、波型转换等复杂性, 除对一些简单规则的介质模型外, 对于一般介质模型其精确解仍未解决。目前弹性散射理论大多集中于声波形式的理论研究<sup>[1],[2]</sup>, 量子力学 Born 摄动方法用于解决弹性动力学问题, 给出了弱散射条件下三维散射问题远场的近似解<sup>[3],[4]</sup>。基于Born近似思想, Rose和Krumhans<sup>[5]</sup>提出逆 Born 算法, 并研究了强散射条件下的逆散射问题。马兴瑞<sup>[6]</sup>等人研究了强散射条件下二维逆散射问题, 提出了一种局部区域的Born近似方法, 并考虑了强散射条件下的逆 Born 散射理论, 研究了散射振幅与入射角及波数的关系曲线, 利用Born近似方法对缺陷进行了计算机仿真。

本文在上述研究的基础上, 对一般非均匀介质的弹性波动方程引入全局的 Born 近似方法, 得到由于介质不均匀性引起的散射位移场的积分迭代形式; 然后利用均匀介质Green函数的性质, 对几种介质模型进行位移场的求解。从数值结果分析可见, 介质不均匀性对位移场的影响主要体现在波速的梯度上, 基本趋势为: 梯度越大, 位移场的振幅变大, 并产生相位延迟。结果与Harry Gingold<sup>[7]</sup>等人对声波函数的局部理论进行的理论分析基本一致。

## 二、波动方程中介质参数摄动

对于一般各向同性的非均匀介质, 其弹性波动方程为:

$$\partial_i(\lambda\partial_k u_k) + \partial_j[\mu(\partial_j u_i + \partial_i u_j)] = \rho u_i \quad (2.1)$$

\* 国家重点自然科学基金、国家教委博士点基金和国家教委跨世纪优秀人才计划资金资助课题。

1 哈尔滨工业大学航天工程与力学系, 哈尔滨 150001。

式中  $\lambda, \mu$  为拉梅系数;  $\rho$  为介质密度;  $u_i$  为位移分量 ( $i=1, 2, 3$ ).

对  $\lambda, \mu, \rho$  用均匀介质质量与摄动量表示为:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \delta\lambda \\ \mu &= \mu_0 + \delta\mu \\ \rho &= \rho_0 + \delta\rho \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

式中  $\lambda_0, \mu_0, \rho_0$  为已知的均匀介质参数值,  $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\rho$  为摄动值, 且为位置矢量的函数.

式(2.1)变换到频域, 且式(2.2)代入式(2.1)中, 有:

$$\lambda_0 \partial_i (\partial_k u_k) + \mu_0 \partial_j (\partial_j u_i + \partial_i u_j) + \rho_0 \omega^2 u_i = -f_i \quad (2.3)$$

式中

$$f_i = \delta\rho \omega^2 u_i + \partial_i (\delta\lambda \partial_k u_k) + \partial_j [\delta\mu (\partial_j u_i + \partial_i u_j)]$$

此时,  $u_i$  为频域  $\omega$  中的位移场分量.

考虑二维变化的介质情况, 把位移波场分解为:

$$u_i = u_i^{(t)} + u_i^{(s)} \quad (2.4)$$

式中  $u_i^{(t)}$  表示在均匀介质中的位移场, 且有:

$$\lambda_0 \partial_i (\partial_k u_k^{(t)}) + \mu_0 \partial_j (\partial_j u_i^{(t)} + \partial_i u_j^{(t)}) + \rho_0 \omega^2 u_i^{(t)} = 0 \quad (2.5)$$

$u_i^{(s)}$  表示由于介质的不均匀性引起的散射位移场.

利用Green函数理论, 有:

$$u_i^{(s)}(\mathbf{r}_0) = \int d\mathbf{r} G_{ij}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) f_j(\mathbf{r}) \quad (2.6)$$

此积分对整个介质所占空间进行.

(2.6)式的物理意义表示,  $\mathbf{r}_0$  点的散射位移场是由于整个介质空间的不均匀性引起的,  $f_j(\mathbf{r})$  为  $\mathbf{r}$  点的次生波源.

$G_{ij}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$  表示二维均匀介质中的Green函数, 有

$$\left. \begin{aligned} G_{ij}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) &= \frac{i}{4\rho_0\omega^2} \{ \kappa_{s0}^2 H_0^{(1)}(\kappa_{s0}\sigma) \delta_{ij} + [H_0^{(1)}(\kappa_{s0}\sigma) - H_0^{(1)}(\kappa_{p0}\sigma)] \delta_{ij} \} \\ G_{i3}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) &= G_{3j}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = 0 \\ G_{33}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) &= \frac{i}{4\rho_0\omega^2} \kappa_{s0}^2 H_0^{(1)}(\kappa_{s0}\sigma) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

式中  $\sigma = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ ,  $i, j=1, 2$

$$\kappa_{p0} = \frac{\omega}{C_{p0}}, \quad C_{p0} = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}}$$

$$\kappa_{s0} = \frac{\omega}{C_{s0}}, \quad C_{s0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}$$

### 三、积分迭代法求介质中的位移波场

分析式(2.6),  $f_j(\bar{\mathbf{r}})$  中的位移场可用式(2.4)表示, 则由此构成一种迭代形式:

$$u_i^{(s)} = \int d\mathbf{r} G_{ij}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) f_j(u_i^{(t)}, u_i^{(s)}) \quad (3.1)$$

为避免出现Hankel函数的导数计算情况, 利用Hankel函数的性质, 化简Green函数

有:

$$G_{11}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{i}{4\rho_0\omega^2} \kappa_{s_0}^2 H_0^{(1)}(\kappa_{s_0}\sigma) + \frac{i}{4\rho_0\omega^2\sigma} [\kappa_{p_0} H_1^{(1)}(\kappa_{p_0}\sigma) - \kappa_{s_0} H_1^{(1)}(\kappa_{s_0}\sigma)] - \frac{(x-x_0)^2 i}{4\rho_0\omega^2\sigma^2} [\kappa_{p_0}^2 H_2^{(1)}(\kappa_{p_0}\sigma) - \kappa_{s_0}^2 H_2^{(1)}(\kappa_{s_0}\sigma)] \quad (3.2)$$

$$G_{12}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{(x-x_0)(z-z_0)i}{2\rho_0\omega^2\sigma^3} [\kappa_{p_0} H_1^{(1)}(\kappa_{p_0}\sigma) - \kappa_{s_0} H_1^{(1)}(\kappa_{s_0}\sigma)] - \frac{(x-x_0)(z-z_0)i}{4\rho_0\omega^2\sigma^2} [\kappa_{p_0}^2 H_2^{(1)}(\kappa_{p_0}\sigma) - \kappa_{s_0}^2 H_2^{(1)}(\kappa_{s_0}\sigma)] \quad (3.3)$$

$$G_{22}(\bar{\mathbf{r}}|\mathbf{r}_0) = \frac{i}{4\rho_0\omega^2} \kappa_{s_0}^2 H_0^{(1)}(\kappa_{s_0}\sigma) + \frac{i}{4\rho_0\omega^2\sigma} [\kappa_{p_0} H_1^{(1)}(\kappa_{p_0}\sigma) - \kappa_{s_0} H_1^{(1)}(\kappa_{s_0}\sigma)] - \frac{(z-z_0)^2 i}{4\rho_0\omega^2\sigma^2} [\kappa_{p_0}^2 H_2^{(1)}(\kappa_{p_0}\sigma) - \kappa_{s_0}^2 H_2^{(1)}(\kappa_{s_0}\sigma)] \quad (3.4)$$

对于式(3.1)的迭代方程, 取初始位移场为均匀介质中的柱面波形式, 即

$$u_1 = -\frac{x}{r} \kappa_{p_0} H_1^{(1)}(\kappa_{p_0}r), \quad u_2 = -\frac{z}{r} \kappa_{p_0} H_1^{(1)}(\kappa_{p_0}r) \quad (3.5)$$

#### 四、几种介质模型的计算结果

为研究介质变化对位移波场的影响, 本文对式(3.5)表示的入射波进行了几种一维介质模型的计算机模拟。

取背景场参数为:

$$\rho_0 = 2500 \text{ kg/m}^2, \quad C_{p_0} = 2500 \text{ m/s}, \quad C_{s_0} = 1500 \text{ m/s} \quad (4.1)$$

图1为此均匀介质中入射位移场式(3.5)的图形。介质模型的变化按此公式进行:

$$C_p = C_{p_0} + \delta C_p \cdot z, \quad C_s = C_{s_0} + \delta C_s \cdot z \quad (4.2)$$

$z$ 的变化范围取纵向0~256m, 图2、3、4、5、6分别表示当介质波速按表1变化时的位移场图形。

表 1

介质模型的变化规律

	$\delta C_p$	$\delta C_s$
图2	1.0	0.5
图3	3.0	1.5
图4	4.5	2.5
图5	6.0	3.0
图6	10.0	5.0

从上述数值结果可见, 当介质摄动量达50%时, 次方法仍能反映出位移波场的基本趋势, 证明了次方法的有效性。

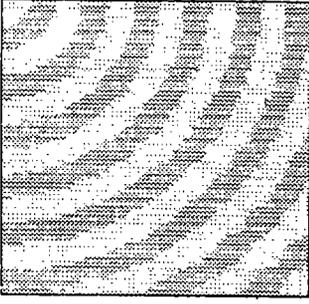


图1(a) 入射场  $u_1^{(i)}$  的图形

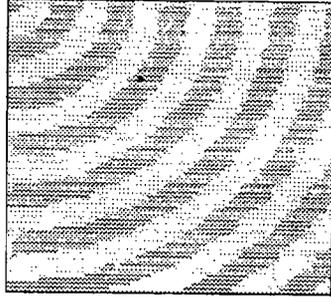


图1(b) 入射场  $u_2^{(i)}$  的图形

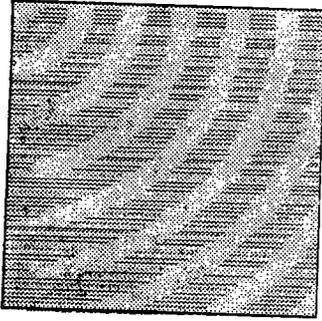


图2(a) 位移场  $u_1^{(t)}$  的图形

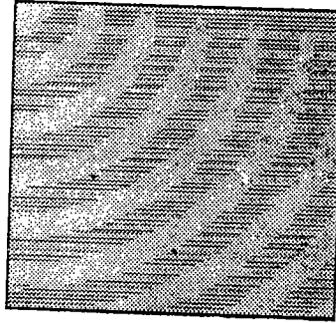


图2(b) 位移场  $u_2^{(t)}$  的图形

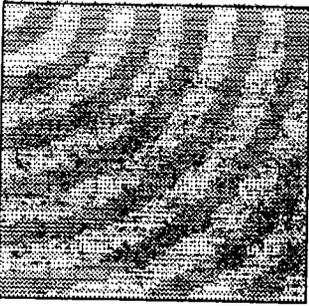


图3(a) 位移场  $u_1^{(t)}$  的图形

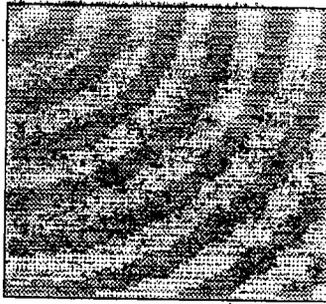


图3(b) 位移场  $u_2^{(t)}$  的图形

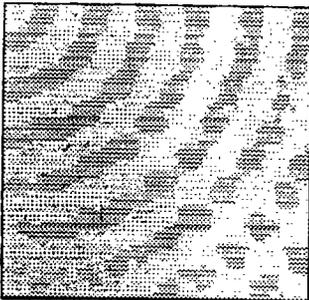


图4(a) 位移场  $u_1^{(t)}$  的图形

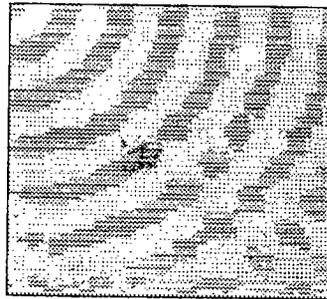
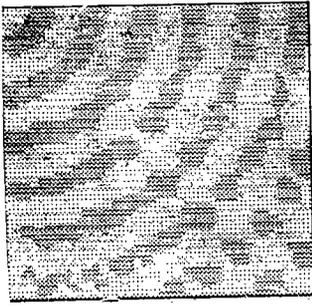
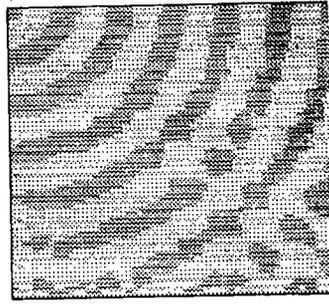
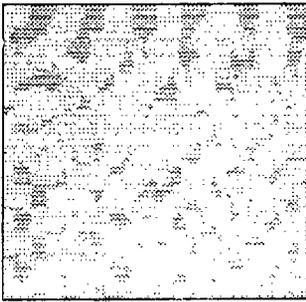
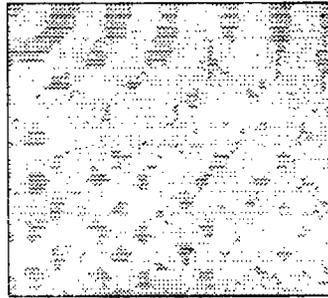


图4(b) 位移场  $u_2^{(t)}$  的图形

图5(a) 位移场 $u_1^{(t)}$ 的图形图5(b) 位移场 $u_2^{(t)}$ 的图形图6(a) 位移场 $u_1^{(t)}$ 的图形图6(b) 位移场 $u_2^{(t)}$ 的图形

## 五、结果分析与讨论

从上述的几种介质模型计算结果来看，波速的变化对位移场的影响体现在波幅值与相位上。分析计算所得的数值可以得到，波速的正梯度，使位移场的幅值变大，并产生相应的相位延迟。文献[7]中从理论上对非均匀介质一维声波进行了介质变化对声波函数的影响研究，提出了一般非均匀介质波函数的局部理论，本文的计算结果与其理论分析基本一致。

弹性波的散射理论研究，目前对一般非均匀介质波场性质的研究大多集中于定性分析，在数学上归结为波动方程的性质分析。本文以Born近似方法为基础，引入参数摄动量，提出一种全局参数摄动方法，对几种介质模型进行了位移场的求解，结果表明，对大扰动参数此方法也具有很强的适用性。

## 参 考 文 献

- [1] Alvin J. Rbbins, Exact solutions of the Helmholtz equation for plane wave propagation in a medium with variable density and sound speed, *J. Acoust Soe. Am.*, 93(3) (1993).
- [2] Zhu Tianfei, A Ray-Kirchhoff method for body-wave calculation in inhomog-

- geneous media: theory, *Geophysical Journal*, **92** (1988), 181—193.
- [ 3 ] J. E. Gubernatis, E. Domany and J. A. Krumhansl, Formal aspects of the theory of the scattering of ultrasound by flaws in elastic materials, *J. Appl. Phy.*, **48** (1977), 2804—2811.
- [ 4 ] J. E. Gubernatis, E. Domany, J. A. Krumhansl and M. Huberman, The Born approximation in the theory of the scattering of elastic waves by flaws, *J. Appl. Phy.*, **48** (1977), 2812—2819.
- [ 5 ] J. H. Rose and J. A. Krumhansl, Determination of flaws characteristics from ultrasonic scattering data, *J. Appl. Phy.*, **50** (1979), 2951—2952.
- [ 6 ] 朱瑾、马兴瑞、黄文虎, 二维弹性波几何反问题中的逆 Born 方法, 哈尔滨工业大学学报, (1988), 8—14.
- [ 7 ] Harry Gingold, Jianming She and William E. Iorumski, Local principles wave propagation in inhomogeneous media, *J. Acoust. Soc. Am.*, **93**(2) (1993).

## The Parameter Perturbation Method on Elastic Wave Equation in Inhomogeneous Medium

Niu Yuqing    Ma Xingrui    Huang Wenhua

(Harbin University of Technology, Harbin 150001, P. R. China)

### Abstract

In this paper, the medium parameters of the elastic wave equation in inhomogeneous medium are rewritten by introducing the referential variables and the perturbational variables, and the wave equation whose sources are the medium parameter perturbational term in homogeneous medium is obtained. By using the Green function theory, the integral equation of the perturbational parameters is obtained. Then the displacement field in homogeneous medium is considered the result of the first iteration, and the displacement field is solved by this integral equation. When the perturbations of medium parameters are about 50 percent, this method can solve the displacement field effectively. From the analysis of the numerical results, the characteristics of wave field in inhomogeneous medium are obtained. The results conform with the local principles of wave function in inhomogeneous medium.

**Key words** elastic wave equation, perturbational parameters, integral equation, integral iteration