应用数学和力学，第18卷 第7期（1997年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 只含两个独立变量的扁壳大挠度问题修正的海林格-赖斯内变分泛函

钱伟勋[1]

（刘人怀推荐，1995年7月24日收到，1996年10月7日收到修改稿）

**摘　　要**

本文首先用海林格-赖斯内变分原理建立任意形状扁壳大挠度问题的泛函，然后用修正的变分原理导出适合于有限单元法的变分泛函表达式。泛函中只包含应力函数$F$和挠度$w$两个独立变量。其中也导出了在边界上用上述两个变量表示的中面位移的表达式。推导中考虑了边界的曲率，所以适用于任意形状的边界。

**关键词**　变分原理　扁壳　大挠度　有限元

## 一、引　　言

在板壳结构及其他复杂结构分析中，有限元法目前已得到广泛的应用。有限单元法的数学基础是变分原理，而在有限元法的发展进程中也促使变分原理本身有了新的发展。例如卞学鐄（T.H.H.Pian）和董平（P.Tong）提出的在有限单元间放松连续性要求的变分原理就是其中之一。这就是所谓修正的变分原理。用有限元法进行结构分析时，结构被离散后为保证解的收敛性，变分泛函中的独立变量在单元间边界上要求连续。修正的变分原理就是用拉格朗日乘子把这些连续性条件引入泛函，从而建立没有辅助条件的泛函。这样，在边界上便放松了连续性的要求。泛函中增加的这一项实际上就是由于泛函中的独立变量在单元间不连续而在积分时所产生的附加项。本文首先用海林格-赖斯内(Hellinger-Reissner)变分原理和扁壳的基本微分关系建立扁壳大挠度问题的泛函，然后用修正的变分原理导出适合于有限单元法的变分泛函表达式。在泛函中只包含扁壳挠度$w$和应力函数$F$两个独立变量。这对问题的求解比较方便，尤其在用有限元法求解时更显出它的优越性。本文还导出了边界上中面位移用上述两个独立变量表示的具体表达式，从而使边界积分中每一项都有明显的物理意义，对边界条件的处理也比较方便。关于用拉格朗日乘子寻求广义变分泛函的方法及其所代表的物理意义的论述，见参考文献[2]和[3]。

1 上海交通大学一系，上海 200000．

## 二、扁壳大挠度问题的赖斯内变分泛函

大挠度分析的非线性性质主要可归因于刚体转动．对于扁壳常常可作一些近似，即忽略面内位移梯度的乘积而保留所有重要的有限转动项．此外，根据扁壳受力变形的特点，在建立位移与变形间关系时保留中面外位移对中面内变形的影响，忽略中面内位移对中面外变形的影响．于是大挠度扁壳的应变-位移表达式通常可写为[4,6]：在中面内

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon^0_{xx}&=u_{,x}-k_x w+\frac{1}{2}w^2_{,x}\\ \varepsilon^0_{yy}&=v_{,y}-k_y w+\frac{1}{2}w^2_{,y}\\ 2\gamma^0_{xy}&=u_{,y}+v_{,x}-2k_{xy}w+w_{,x}w_{,y}\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

式中 $\varepsilon^0_{ij}$是中面内的应变．

处在离中面法线方向上，距离中面为$\zeta$的一些点的应变为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{xx}&=\varepsilon^0_{xx}-\zeta\chi_x\\ \varepsilon_{yy}&=\varepsilon^0_{yy}-\zeta\chi_y\\ \gamma_{xy}&=\gamma^0_{xy}-\zeta\chi_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

式中 $\zeta$为中曲面法线方向的坐标（图1）．

$\chi_{ij}$为当壳体弯曲时的曲率：

$$\chi_x=w_{,xx},\quad \chi_y=w_{,yy},\quad \chi_{xy}=w_{,xy}\tag{2.3}$$

$k_i$ 为扁壳的曲率：

$$k_x=z_{,xx},\quad k_y=z_{,yy},\quad k_{xy}=z_{,xy}\tag{2.4}$$

壳体中面外点的位移为

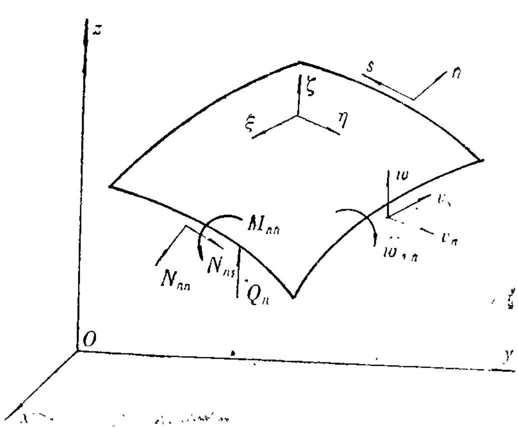


**图1 扁壳的坐标系统**

$$U=u-\zeta w_{,x},\quad V=v-\zeta w_{,y},\quad W=w\tag{2.5}$$

我们讨论的问题还是小应变的，假定它符合虎克定律．此外，由于壳体是扁而薄的，因此，法向应力$\sigma_\zeta$可以忽略，而变形后的坐标系统$(x,y,\zeta)$近似地认为仍然是直角的．因此应力-应变关系式可写为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0&=\frac{1}{Eh}(N_x-\nu N_y)\\ \varepsilon_{yy}^0&=\frac{1}{Eh}(N_y-\nu N_x)\\ \gamma_{xy}^0&=\frac{1+\nu}{Eh}N_{xy}\end{aligned}\right\} \quad 或 \quad \left.\begin{aligned} N_x&=\frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx}^0+\nu\varepsilon_{yy}^0)\\ N_y&=\frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy}^0+\nu\varepsilon_{xx}^0)\\ N_{xy}&=2Gh\gamma_{xy}^0\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

式中　$h$为壳体的厚度；$\nu$为泊桑比；$E$ 为杨氏模量；$G$ 为剪切模量，$G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$；$N_x,N_y$和$N_{xy}$为壳体中面单位长度上的合力；$M_x$，$M_y$和 $M_{xy}$ 为壳体内单位长度上弯矩．它们与壳体弯曲曲率之间的关系为

$$\left.\begin{aligned} M_x&=-D(\chi_x+\nu\chi_y)\\ M_y&=-D(\chi_y+\nu\chi_x)\\ M_{xy}&=-D(1-\nu)\chi_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

式中　$D$是壳体的弯曲刚度，$D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$．

在壳体表面垂直于中面的分布载荷 $q$ 的势函数为

$$\iint_{S_m} qw\,dx\,dy$$

引入应力函数：

$$N_x=F_{,yy},\quad N_y=F_{,xx},\quad N_{xy}=-F_{,xy} \tag{2.8}$$

在边界上应力函数为

$$\left.\begin{aligned} N_{nn}&=F_{,ss}+\frac{1}{r}F_{,n}\\ N_{ns}&=-F_{,ns}+\frac{1}{r}F_{,s}\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

式中　$r$为边界的曲率半径．

薄扁壳大位移的海林格-赖斯内变分泛函可表达为[5]：

$$\begin{aligned} \Pi_R=&\iint_{S_m}\Big\{-\frac{1}{2Eh}[(F_{,xx}+F_{,yy})^2+2(1+\nu)(F_{,xy}^2-F_{,xx}F_{,yy})]\\ &+\frac{1}{2}(w_{,x}^2F_{,yy}+w_{,y}^2F_{,xx}-2w_{,x}w_{,y}F_{,xy}\\ &-2k_xwF_{,yy}-2k_ywF_{,xx}+4k_{xy}wF_{,xy})\\ &+\frac{D}{2}[(\chi_x+\chi_y)^2+2(1-\nu)(\chi_{xy}^2-\chi_x\chi_y)]-qw\Big\}dx\,dy\\ &-\int_{C_f}\Big[-(F_{,ss}-\bar F_{,ss})u_n+(F_{,ns}-\bar F_{,ns})v_s+\frac{1}{r}(\bar F_{,n}u_n+\bar F_{,s}v_s)\\ &+\bar Q_nw-\bar M_{ns}w_{,s}-\bar M_nw_{,n}\Big]ds\\ &-\int_{C_u}\Big[-\bar u_n\Big(F_{,ss}+\frac{1}{r}F_{,n}\Big)+\bar v_s\Big(F_{,ns}-\frac{1}{r}F_{,s}\Big)+u_n\cdot\frac{1}{r}F_{,n}+v_s\cdot\frac{1}{r}F_{,s}\\ &+(w-\bar w)Q_n+D(w_{,nn}+\nu w_{,ss})(w_{,n}-\bar w_{,n})\\ &+D(1-\nu)w_{,ns}(w_{,s}-\bar w_{,s})\Big]ds \end{aligned} \tag{2.10}$$

式中，上面有一横的变量表示在边界上给定的值．

(2.10)式面积分中包括壳体弯曲时的应变能、中面伸长时的应变余能以及它们两者的耦合．在中面周界$C_f$上的线积分说明所给定的力和弯矩的势函数，而在$C_u$上的线积分则表示给定的位移、边界法向转角在壳体变形时的势函数．

对泛函(2.10)求驻值，即分别对独立变量$F$和$w$作偏变分，可直接得到扁壳的平衡方程、相容方程以及所给定的力和位移的边界条件。说明这个变分泛函和扁壳的控制方程是等价的．

对泛函(2.10)关于应力函数$F$，位移$u$和$v$作一阶偏变分，并取驻值$\delta\Pi=0$。按照变量的变分为任意的条件得：

$$\left.\begin{aligned} u_n&=\int_{C_f}K_{ss}ds-\int_{C_f}\int_{C_f}K_s ds ds\\ v_s&=-\int_{C_f}K_{ns}ds\end{aligned}\right\}\qquad(2.11)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} K_s&=\frac{1}{Eh}(F_{,nnn}+F_{,nss})+\left(\frac{1}{2}w_{,ss}+k_s\right)w_{,n}-\left(\frac{1}{2}w_{,ns}+k_{ns}\right)w_{,s}\\ K_{ns}&=-\frac{1}{Eh}(F_{,nn}-\nu F_{,ss})+\frac{1}{2}w_{,s}^2-k_s w\\ K_{ss}&=-\frac{1}{Eh}(1+\nu)F_{,ns}-\frac{1}{2}w_{,n}w_{,s}+k_{ns}w\end{aligned}\right\}\qquad(2.12)$$

对泛函(2.10)关于$w$作一阶偏变分，并进行分部积分，同样可得

$$Q_n=F_{,ss}w_{,n}+F_{,ns}w_{,s}-k_sF_{,n}+k_{ns}F_{,s}+(1-\nu)w_{,nss}\qquad(2.13)$$

将(2.11)、(2.13)代入(2.10)，即得我们所要求的泛函：

$$\begin{aligned}\Pi_R=&\iint_{S_m}\Big\{-\frac{1}{2Eh}[(F_{,xx}+F_{,yy})^2+2(1-\nu)(F_{,xy}^2-F_{,xx}F_{,yy})]\\ &+\frac{1}{2}(w_{,x}^2F_{,yy}+w_{,y}^2F_{,xx}-2w_{,x}w_{,y}F_{,xy}\\ &-2k_xwF_{,yy}-2k_ywF_{,xx}+4k_{xy}wF_{,xy})\\ &+\frac{D}{2}[(\chi_x+\chi_y)^2+2(1-\nu)(\chi_{xy}^2-\chi_x\chi_y)]-qw\Big\}dxdy\\ &-\int_{C_f}\Big\{-(F_{,ss}-\bar{F}_{,ss})\Big(\int_{C_f}K_{ss}ds-\int_{C_f}\int_{C_f}K_s dsds\Big)\\ &-(F_{,ns}-\bar{F}_{,ns})\int_{C_f}K_{ns}ds\\ &+\frac{1}{r}\Big[\bar{F}_{,n}\Big(\int_{C_f}K_{ss}ds-\int_{C_f}\int_{C_f}K_s dsds\Big)-\bar{F}_{,s}\int_{C_f}K_{ns}ds\Big]\\ &+\bar{Q}_nw-\bar{M}_{ns}w_{,s}-\bar{M}_nw_{,n}\Big\}ds\\ &-\int_{C_u}\Big[-\bar{u}_n\Big(F_{,ss}+\frac{1}{r}F_{,n}\Big)+\bar{v}_s\Big(F_{,ns}-\frac{1}{r}F_{,s}\Big)+u_n\cdot\frac{1}{r}F_{,n}+\frac{1}{r}v_sF_{,s}\\ &+(w-\bar{w})Q_n+D(w_{,nn}+\nu w_{,ss})(w_{,n}-\bar{w}_{,n})\\ &+D(1-\nu)w_{,ns}(w_{,s}-\bar{w}_{,s})\Big]ds\end{aligned}\qquad(2.14)$$

式中给定的边界条件$\bar{u}$，$\bar{v}$和$\bar{Q}_n$表达形式分别为(2.11)和(2.13)式在相应的边界上积分。

于是(2.14)式就是所要求的仅含两个独立变量——应力函数$F$和挠度$w$的泛函表达式，这种形式对问题的求解比较方便，尤其在用有限元法求解时只需假定两个插值函数，不像最小位能原理那样必须用三个插值函数（$u$，$v$和$w$）。而且对于$F$和$w$可以定义相同形式的函数，这样对刚度矩阵、几何矩阵的推导可大大简化。为了表达简单起见，以后仍用(2.10)式来表示所讨论问题的泛函。

## 三、扁壳大挠度修正的海林格-赖斯内原理

在用有限单元法求解(2.10)式时，我们用

$$w^{(1)},\ w^{(2)},\cdots,\ w^{(a)},\ w^{(b)},\cdots,\ w^{(N)}$$

和

$$F^{(1)},\ F^{(2)},\cdots,\ F^{(a)},\ F^{(b)},\cdots,\ F^{(N)}$$

分别取为每个单元的挠度$w(x,y)$和应力函数$F(x,y)$的容许函数①，它们应满足如下要求：

（1） 在每个单元内连续并单值；

（2） 它们在相邻的单元间边界上连续，例如在$a$和$b$两个单元间共同边界$C_{ab}$上

$$\left.\begin{aligned}&w^{(a)}=w^{(b)},\quad w^{(a)}_{,na}=w^{(b)}_{,nb}\\&F^{(a)}=F^{(b)},\quad F^{(a)}_{,na}=F^{(b)}_{,nb}\text{②}\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

若$w$，$F$的插值函数的选择满足上述条件，则变分泛函可写成：

$$\begin{aligned}\Pi_R=\sum_{a=1}^{N}\iint_{S_a}\Big\{&\frac{1}{2Eh}[(F_{,xx}+F_{,yy})^2+2(1+\nu)(F^2_{,xy}-F_{,xx}F_{,yy})]\\&+\frac{1}{2}(w^2_{,x}F_{,yy}+w^2_{,y}F_{,xx}-2w_{,x}w_{,y}F_{,xy}\\&-2k_xwF_{,yy}-2k_ywF_{,xx}+k_{xy}wF_{,xy}\\&+\frac{D}{2}[(w_{,xx}+w_{,yy})^2+2(1-\nu)(w^2_{,xy}-w_{,xx}w_{,yy})]-qw\Big\}dxdy\\&-\int_{C_f}[-(F_{,ss}-\bar{F}_{,ss})u_n+(F_{,ns}-\bar{F}_{,ns})v_s+\bar{Q}_nw-\bar{M}_nw_{,n}-\bar{M}_{ns}w_{,s}]ds\\&-\int_{C_u}[-\bar{u}_nF_{,ss}+\bar{v}_sF_{,ns}+(w-\bar{w})Q_n+D(w_{,nn}+\nu w_{,ss})(w_{,n}-\bar{w}_{,n})\\&+D(1-\nu)w_{,ns}(w_{,s}-\bar{w}_{,s})]ds\end{aligned}\tag{2.10$'$}$$

(2.10)′式中和号$\sum$表示在所研究的壳体上对全部单元求和；$S_a$表示在第$a$个扁壳单元中面内积分；$u_n$，$v_s$和$Q_n$分别由(2.11)、(2.13)式决定。在$\Pi_R$中要进行变分的独立变量$w$和$F$还应满足辅助条件(1)和(2)。

众所周知，在用有限单元法时，所假设的插值函数第一个条件是容易被满足的，而要满

① 对所有单元可取相同形式的函数。

② 为了保证解收敛于问题的精确解，在单元间边界上变量$w$（及$F$）达到它们的$n-1$阶导数为有限值且连续，力在单元间边界上要求平衡。其中$n$为泛函中最高阶导数的阶数。

足第二个条件就不很容易了，尤其保证变量的一阶导数的连续更困难。修正的赖斯内原理可使单元间连续性要求放松，在选择单元插值函数时更方便，既保证解的收敛性又不致过多地增加计算时间。

把任意两个相邻的单元用$S_a$和$S_b$表示，它们之间共同边界$C_{ab}$用$C^*_{ab}$和$C^*_{ba}$表示分别属于单元$S_a$和$S_b$（图2）。图中$n_a$，$n_b$分别为$C^*_{ab}$，$C^*_{ba}$的外法线方向，而切线方向为$S_a$和$S_b$。

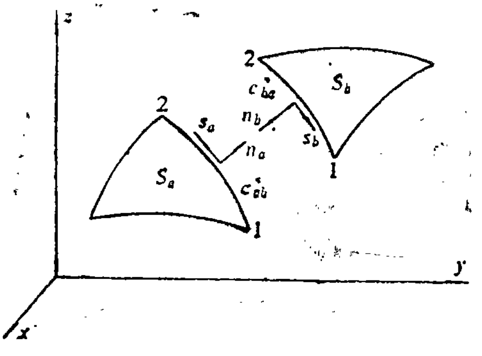


图2 三角形单元$S_a$,$S_b$间边界$C_{ab}$

假定所选择的插值函数在每个单元间边界上满足

$$w^{(a)}=w^{(b)}\text{及}F^{(a)}=F^{(b)} \qquad (\text{在}C_{ab}\text{上}) \tag{3.2}$$

而它们一阶导数的连续性条件用拉格朗日乘子把它们引入泛函。为此，使用分别在$C^*_{ab}$和$C^*_{ba}$上定义的拉格朗日乘子$\Lambda^{(a)}$，$\Gamma^{(a)}$和$\Lambda^{(b)}$，$\Gamma^{(b)}$，并令$\Lambda^{(a)}+\Lambda^{(b)}=0$及$\Gamma^{(a)}+\Gamma^{(b)}=0$，于是得到修正的泛函为

$$\Pi_{Rm}=\Pi_R-\sum H_{ab} \tag{3.3}$$

式中 $\Pi_R$由(2.10)′式给出，而

$$H_{ab}=\int_{C_{ab}}[-\Lambda^{(a)}w^{(a)}_{,na}+\Lambda^{(b)}w^{(b)}_{,nb}+\Gamma^{(a)}F^{(a)}_{,na}+\Gamma^{(b)}F^{(b)}_{,nb}$$
$$-\mu_1(\Lambda^{(a)}+\Lambda^{(b)})-\mu_2(\Gamma^{(a)}+\Gamma^{(b)})]dc \tag{3.4}$$

对(3.3)式中的独立变量作一阶变分运算，并进行分部积分即得

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{Rm}=&\cdots\\&+\int_{C_{ab}}\Big\{\Big[\frac{1}{Eh}(F^{(a)}_{,nn}-\nu F^{(b)}_{,ss})+\frac{1}{2}(w_{,s}-2k_s w)-\Gamma^{(a)}\Big]\delta F^{(a)}_{,na}\\&+\Big[\frac{1}{Eh}(F^{(b)}_{,nn}-\nu F^{(b)}_{,ss})+\frac{1}{2}(w_{,s}-2k_s w)-\Gamma^{(b)}\Big]\delta F^{(b)}_{,nb}\\&+[D(w^{(a)}_{,nn}+\nu w^{(a)}_{,ss})+\Lambda^{(a)}]\delta w^{(a)}_{,na}\\&-[D(w^{(b)}_{,nn}+\nu w^{(b)}_{,ss})+\Lambda^{(b)}]\delta w^{(b)}_{,nb}\\&-(\Lambda^{(a)}+\Lambda^{(b)})\delta\mu_1-(\Gamma^{(a)}+\Gamma^{(b)})\delta\mu_2\\&-(w^{(a)}_{,na}+\mu_1)\delta\Lambda^{(a)}+(w^{(b)}_{,nb}-\mu_1)\delta\Lambda^{(b)}\\&+(F^{(a)}_{,na}-\mu_2)\delta\Gamma^{(a)}+(F^{(b)}_{,nb}-\mu_2)\delta\Gamma^{(b)}\Big\}dc\end{aligned} \tag{3.5}$$

由此，在$C_{ab}$上我们得到$\Pi_{Bm}$的驻值条件

$$\left.\begin{aligned}\Gamma^{(a)}&=\frac{1}{Eh}\left(F^{(a)}_{,nn}-\nu F^{(a)}_{,ss}\right)+\frac{1}{2}\left(w_{,s}^{2}-2k_{s}w\right)\\ \Gamma^{(b)}&=\frac{1}{Eh}\left(F^{(b)}_{,nn}-\nu F^{(b)}_{,ss}\right)+\frac{1}{2}\left(w_{,s}^{2}-2k_{s}w\right)\\ \Lambda^{(a)}&=-D\left(w^{(a)}_{,nn}+\nu w^{(a)}_{,ss}\right)\\ \Lambda^{(b)}&=-D\left(w^{(b)}_{,nn}+\nu w^{(b)}_{,ss}\right)\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda^{(a)}=-\Lambda^{(b)},\ \Gamma^{(a)}=-\Gamma^{(b)}\\ &\mu_1=-w^{(a)}_{,na}=w^{(b)}_{,nb},\ \mu_2=F^{(a)}_{,na}=F^{(b)}_{,nb}\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

(3.6)，(3.7)式表明了拉格朗日乘子$\Lambda^{(a)}$，$\Lambda^{(b)}$，$\Gamma^{(a)}$，$\Gamma^{(b)}$和$\mu_1$，$\mu_2$的物理意义。利用驻值条件(3.6)代替(3.4)式中的乘子$\Lambda^{(a)}$，$\Lambda^{(b)}$，$\Gamma^{(a)}$和$\Gamma^{(b)}$，于是得到所要求的修正的海林格-赖斯内变分泛函

$$\Pi_{Bm2}=\Pi_B-\sum H_{ab2}\tag{3.8}$$

式中

$$\begin{aligned}H_{ab2}=&\int_{C^*_{ab}}\Big\{D\left(w^{(a)}_{,nn}+\nu w^{(a)}_{,ss}\right)\left(w^{(a)}_{,na}+\mu_1\right)\\ &+\Big[\frac{1}{Eh}\left(F^{(a)}_{,nn}-\nu F^{(a)}_{,ss}\right)+\frac{1}{2}\left(w_{,s}^{2}-2k_{s}w\right)\Big]\left(F^{(a)}_{,na}-\mu_2\right)\Big\}dc\\ &-\int_{C^*_{ba}}\Big\{D\left(w^{(b)}_{,nn}+\nu w^{(b)}_{,ss}\right)\left(w^{(b)}_{,nb}-\mu_1\right)\\ &+\Big[\frac{1}{Eh}\left(F^{(b)}_{,nn}-\nu F^{(b)}_{,ss}\right)+\frac{1}{2}\left(w_{,s}^{2}-2k_{s}w\right)\Big]\left(F^{(b)}_{,nb}+\mu_2\right)\Big\}dc\end{aligned}\tag{3.9}$$

泛函(3.8)中要进行变分的独立变量是$w$，$F$和$\mu_1$，$\mu_2$，其中$\mu_1$和$\mu_2$所代表的物理意义在(3.7)式中给出。它们所假设的插值函数在单元间边界上应满足(3.2)式外并不附带其他辅助条件。因此在泛函中放松了对$w$和$F$在单元间边界上一阶法向导数连续性的要求。

## 参 考 文 献


[1] T. H. H. Pian and P. Tong, Basis of finite element methods for solid continua, *Inter. J. for Num. Meth. in Engng.*, 1(1) (1969).

[2] Kyuichiro Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 2nd edition, Pergamon Press (1975).

[3] 钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限单元计算中的应用，力学与实践，1(1) (1977).

[4] 刘世宁，弹性扁壳的广义变分原理及扁壳理论的某些问题，力学学报，6(1) (1963).

[5] 钱伟长，扁壳大挠度问题修正的海林格-赖斯内变分原理，《1980年全国弹性塑性力学学术交流会论文选》(1980).

[6] A. C. 沃耳密尔，《柔韧板与柔韧壳》，科学出版社 (1963)

# A Modified Hellinger-Reissner Variational Functional Including Only Two Independent Variables for Large Displacement of Thin Shallow Shell

Qian Rengji

(*Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200000, *P. R. China*)

**Abstract**

The variational functional of the Hellinger-Reissner variational principle for the large displacement problem of a thin shallow shell with an arbitrary shape is first established. Then the functional of the modified principle suitable for the finite element method is derived. In the functional, only two independent variables, the deflection w and the stress function F are included. The displacement expressions in the middle surface on the boundary of the shell is also derived by means of the previous two variables.

**Key words** variational principle, shallow shell, large displacement, finite element method