

弹性圆板在一侧受均载而四周固定的条件下 不用克希霍夫-拉夫假设的一级近似 理论(Ⅲ) 数值计算结果

钱伟长¹ 盛尚仲¹

(1996年10月5日收到)

摘 要

本文在前文[1]、[2]所得的微分方程和有关边界条件的基础上, 采用一种新的整体插值法, 求得了弹性圆板在一侧受均载而四周固定的条件下弯曲问题的不用克希霍夫-拉夫假设的一级近似理论的数值结果, 并与经典的克希霍夫-拉夫理论^[3]和Reissner修正理论^[4,5]的结果进行了比较。

关键词 弹性圆板 Kirchhoff-Love假设 整体插值法

九、一级近似理论的微分方程和边界条件的无量纲化

为便于数值计算, 以下对弹性圆板在一侧受均载而四周固定的条件下不用克希霍夫-拉夫假设的一级近似理论的微分方程和边界条件进行无量纲化。为此, 引入下列无量纲参数:

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{r}{a}, \quad z = \frac{z}{a}, \quad \bar{h} = \frac{h}{a} \\ \bar{w} &= \frac{w}{h}, \quad \bar{A}_0 = A_0, \quad \bar{A}_1 = h A_1, \quad \bar{u} = \frac{u}{h} \\ \bar{S}_0 &= h^2 S_0, \quad \bar{S}_1 = h^3 S_1, \quad \bar{q} = \frac{q a^4}{D_1 h} \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

并引入无量纲记号:

$$\bar{\nabla}_R^2(\dots) = \frac{1}{R} \frac{d}{dR} R \frac{d}{dR}(\dots) \quad (9.2)$$

这样方程(6.4)~(6.6)可以化成如下的无量纲化形式:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_R^2 \bar{\nabla}_R^2 \bar{w} - \frac{\nu_1}{\bar{h}^2} \bar{\nabla}_R^2 \bar{A}_1 + \frac{1}{40} \bar{\nabla}_R^2 \bar{\nabla}_R^2 \bar{A}_1 - \frac{2}{5\bar{h}} \bar{\nabla}_R^2 \frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R \bar{S}_0) &= \bar{q} \\ \nu_1 \bar{h}^2 \bar{\nabla}_R^2 \bar{w} - \frac{1}{40} \bar{h}^4 \bar{\nabla}_R^2 \bar{\nabla}_R^2 \bar{w} - \bar{A}_1 + \frac{1}{20} \nu_1 \bar{h}^2 \bar{\nabla}_R^2 \bar{A}_1 - \frac{1}{1344} \bar{h}^4 \bar{\nabla}_R^2 \bar{\nabla}_R^2 \bar{A}_1 \end{aligned} \quad (9.3)$$

¹ 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072.

$$-\frac{2}{5}\nu_1\bar{h}\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\bar{S}_0)+\frac{1}{105}\bar{h}^3\nabla_R^2\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\bar{S}_0)+\frac{1}{8}\bar{h}^4\bar{q}=0 \quad (9.4)$$

$$\bar{h}^3\frac{d}{dR}\nabla_R^2\bar{w}-\nu_1\bar{h}\frac{d\bar{A}_1}{dR}+\frac{1}{42}\bar{h}^3\frac{d}{dR}\nabla_R^2\bar{A}_1-\frac{17}{42}\bar{h}^2\frac{d}{dR}\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\bar{S}_0)+2(1-\nu_1)\bar{S}_0=0 \quad (9.5)$$

还有涉及 u , A_0 , S_1 的三个微分方程的无量纲化形式是:

$$\bar{h}\frac{d}{dR}\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\bar{u})+\nu_1\frac{d\bar{A}_0}{dR}-\frac{1}{24}\bar{h}^2\frac{d}{dR}\nabla_R^2\bar{A}_0+\frac{7}{480}\bar{h}\frac{d}{dR}\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\bar{S}_1)=0 \quad (9.6)$$

$$\bar{h}\frac{d}{dR}\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\bar{u})+\nu_1\frac{d\bar{A}_0}{dR}-\frac{27}{392}\bar{h}^2\frac{d}{dR}\nabla_R^2\bar{A}_0-\frac{8(1-\nu_1)}{49\bar{h}}\bar{S}_1 \\ +\frac{107}{4704}\bar{h}\frac{d}{dR}\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\bar{S}_1)=0 \quad (9.7)$$

$$-\nu_1\bar{h}\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\bar{u})+\frac{1}{24}\bar{h}^3\nabla_R^2\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\bar{u})-\bar{A}_0+\frac{1}{12}\nu_1\bar{h}^2\nabla_R^2\bar{A}_0 \\ -\frac{1}{320}\bar{h}^4\nabla_R^2\nabla_R^2\bar{A}_0-\frac{7}{480}\nu_1\bar{h}\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\bar{S}_1) \\ +\frac{9}{8960}\bar{h}^3\nabla_R^2\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\bar{S}_1)-\frac{1}{24}\bar{h}^4\bar{q}=0 \quad (9.8)$$

与微分方程(9.3)~(9.8)对应的边界条件的无量纲形式为:

$$(a) \quad \bar{w}(1)+\frac{1}{40}\bar{A}_1(1)=0; \quad (b) \quad \bar{w}'(1)=-\frac{1}{8(1-\nu_1)}\bar{h}^2\bar{q};$$

$$(c) \quad \bar{A}_1'(1)=\frac{1}{(1-\nu_1)}\bar{h}^2\bar{q}; \quad (d) \quad \bar{S}_0(1)=-\frac{1}{4(1-\nu_1)}\bar{h}^3\bar{q};$$

$$(e) \quad \bar{u}(1)=0; \quad (f) \quad \bar{A}_0(1)=0;$$

$$(g) \quad \bar{A}_0'(1)=0; \quad (h) \quad \bar{S}_1(1)=0;$$

$$(i) \quad \bar{h}^2\frac{d}{dR}\nabla_R^2\bar{w}-\nu_1\frac{d\bar{A}_1}{dR}+\frac{5\bar{h}^2}{168}\frac{d}{dR}\nabla_R^2\bar{A}_1-\frac{8\bar{h}}{21}\frac{d}{dR}\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\bar{S}_0) \\ +2(1-\nu_1)\frac{\bar{S}_0}{\bar{h}}=0 \quad (R=1)$$

$$(j) \quad \bar{h}\frac{d}{dR}\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\bar{u})+\nu_1\frac{d\bar{A}_0}{dR}-\frac{3\bar{h}^2}{40}\frac{d}{dR}\nabla_R^2\bar{A}_0+\frac{27\bar{h}}{1120}\frac{d}{dR}\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\bar{S}_1) \\ -\frac{(1-\nu_1)\bar{S}_1}{5\bar{h}}=0 \quad (R=1) \quad (9.9)$$

十、一种新的整体插值法

如图1所示,我们把弹性圆板按半径划分成五等分的同心圆和圆环单元,并用 R_0 , R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , R_5 顺序表示圆心和各单元节点:

$$R_0=0, R_1=\frac{1}{5}, R_2=\frac{2}{5}, R_3=\frac{3}{5}, R_4=\frac{4}{5}, R_5=1 \quad (10.1)$$

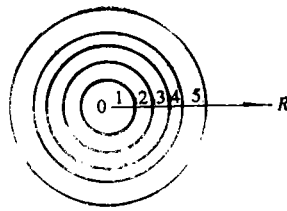


图 1 插值单元划分示意图

取插值函数:

$$\begin{aligned}
 N_0 &= \frac{(R_1^2 - R^2)(R_2^2 - R^2)(R_3^2 - R^2)(R_4^2 - R^2)(R_5^2 - R^2)}{R_1^2 R_2^2 R_3^2 R_4^2 R_5^2} \\
 N_1 &= \frac{R^2(R_2^2 - R^2)(R_3^2 - R^2)(R_4^2 - R^2)(R_5^2 - R^2)}{R_1^2(R_2^2 - R_1^2)(R_3^2 - R_1^2)(R_4^2 - R_1^2)(R_5^2 - R_1^2)} \\
 N_2 &= \frac{R^2(R_1^2 - R^2)(R_3^2 - R^2)(R_4^2 - R^2)(R_5^2 - R^2)}{R_2^2(R_1^2 - R_2^2)(R_3^2 - R_2^2)(R_4^2 - R_2^2)(R_5^2 - R_2^2)} \\
 N_3 &= \frac{R^2(R_1^2 - R^2)(R_2^2 - R^2)(R_4^2 - R^2)(R_5^2 - R^2)}{R_3^2(R_1^2 - R_3^2)(R_2^2 - R_3^2)(R_4^2 - R_3^2)(R_5^2 - R_3^2)} \\
 N_4 &= \frac{R^2(R_1^2 - R^2)(R_2^2 - R^2)(R_3^2 - R^2)(R_5^2 - R^2)}{R_4^2(R_1^2 - R_4^2)(R_2^2 - R_4^2)(R_3^2 - R_4^2)(R_5^2 - R_4^2)} \\
 N_5 &= \frac{R^2(R_1^2 - R^2)(R_2^2 - R^2)(R_3^2 - R^2)(R_4^2 - R^2)}{R_5^2(R_1^2 - R_5^2)(R_2^2 - R_5^2)(R_3^2 - R_5^2)(R_4^2 - R_5^2)} \\
 N^* &= R^2(R_1^2 - R^2)(R_2^2 - R^2)(R_3^2 - R^2)(R_4^2 - R^2)(R_5^2 - R^2) \quad (10.2)
 \end{aligned}$$

对第一组方程(9.3)~(9.5), 设:

$$\bar{S}_0(R) = \frac{d\bar{\Omega}(R)}{dR} \quad (10.3)$$

并记:

$$\begin{aligned}
 [L] &= [N_0, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N^*], \quad \{\bar{w}\} = [\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega^*]^T \\
 \{\bar{A}_1\} &= [\bar{A}_{10}, \bar{A}_{11}, \bar{A}_{12}, \bar{A}_{13}, \bar{A}_{14}, \bar{A}_{15}, \bar{A}^*]^T, \\
 \{\bar{\Omega}\} &= [\bar{\Omega}_0, \bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2, \bar{\Omega}_3, \bar{\Omega}_4, \bar{\Omega}_5, \bar{\Omega}^*]^T \quad (10.4)
 \end{aligned}$$

其中 $w_i, A_i, \Omega_i (i=0, 1, 2, 3, 4, 5)$ 分别是 $\bar{w}(R), \bar{A}_1(R)$ 和 $\bar{\Omega}(R)$ 在圆板中心 R_0 和节点 R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 上的值。

这样可以把 $\bar{w}, \bar{A}_1, \bar{S}_0$ 用插值函数表示为:

$$\bar{w} = [L]\{\bar{w}\}, \bar{A}_1 = [L]\{A_1\}, \bar{S}_0 = \frac{d}{dR}[L]\{\bar{\Omega}\} \quad (10.5a, b, c)$$

方程(9.3)~(9.5)可以积分简化。对方程(9.3)积分两次, 得:

$$\nabla_{\frac{1}{2}k}^2 \bar{w} - \frac{\nu_1}{h^2} \bar{A}_1 + \frac{1}{40} \nabla_{\frac{1}{2}k}^2 \bar{A}_1 - \frac{2}{5h} \nabla_{\frac{1}{2}k}^2 \bar{\Omega} = \frac{1}{4} q R^2 + C_1 \quad (10.6)$$

从上式和方程(9.4)中消去 \bar{A}_1 项, 得:

$$\left\{ \bar{h}^2 \frac{d}{dR} \nabla_R^2 [L] \{ \bar{w} \} - \left(\nu_1 - \frac{5\bar{h}^2}{168} \nabla_R^2 \right) \frac{d}{dR} [L] \{ \bar{A}_1 \} + \left[\frac{2(1-\nu_1)}{\bar{h}} - \frac{8\bar{h}}{21} \nabla_R^2 \right] \frac{d}{dR} [L] \{ \bar{\Omega} \} \right\} \Big|_{R=R_1} = 0 \quad (10.11e)$$

构成了求解弹性圆板的第一组二十三个中心和节点变形位移分量 $\bar{w}_0, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{w}_4, \bar{w}_5, \bar{w}^*, \bar{A}_{10}, \bar{A}_{11}, \bar{A}_{12}, \bar{A}_{13}, \bar{A}_{14}, \bar{A}_{15}, \bar{A}^*, \bar{\Omega}_0, \bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2, \bar{\Omega}_3, \bar{\Omega}_4, \bar{\Omega}_5, \bar{\Omega}^*, C_1, C_2$ 的二十三个线性代数方程。这二十三个线性代数方程组成的线性代数方程组可表示成:

$$[D_1] \{X_1\} = \{Q_1\} \quad (10.12)$$

其中 $[D_1]$ 是上述线性代数方程组的 23×23 系数矩阵, 而:

$$\{X_1\} = [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w^*, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A^*, \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5, \Omega^*, C_1, C_2]^T \quad (10.13a)$$

$$\{Q_1\} = \left[0, 0, 0, \frac{\bar{q}}{100}, \frac{\bar{q}}{80} \left(\frac{1}{25} + \nu_1 \bar{h}^2 \right), \frac{\bar{q}}{800} \left(\frac{1}{50} + \nu_1 \bar{h}^2 \right), \frac{\bar{q}}{25}, \frac{\bar{q}}{40} \left(\frac{4}{25} + \nu_1 \bar{h}^2 \right), \frac{\bar{q}}{200} \left(\frac{2}{25} + \nu_1 \bar{h}^2 \right), \frac{9\bar{q}}{100}, \frac{3\bar{q}}{80} \left(\frac{9}{25} + \nu_1 \bar{h}^2 \right), \frac{9\bar{q}}{800} \left(\frac{9}{50} + \nu_1 \bar{h}^2 \right), \frac{4\bar{q}}{25}, \frac{\bar{q}}{20} \left(\frac{16}{25} + \nu_1 \bar{h}^2 \right), \frac{\bar{q}}{50} \left(\frac{8}{25} + \nu_1 \bar{h}^2 \right), \frac{\bar{q}}{4}, \frac{\bar{q}}{16} (1 + \nu_1 \bar{h}^2), \frac{\bar{q}}{64} \left(\frac{1}{2} + \nu_1 \bar{h}^2 \right), -\frac{\bar{h}^2 \bar{q}}{8(1-\nu_1)}, -\frac{\bar{h}^2 \bar{q}}{1-\nu_1}, -\frac{\bar{h}^3 \bar{q}}{4(1-\nu_1)}, 0, 0 \right]^T \quad (10.13b)$$

对第二组方程(9.6)~(9.8), 设:

$$\bar{u}(R) = \frac{d\phi(R)}{dR}, \quad \bar{S}_1(R) = \frac{d\varphi(R)}{dR} \quad (10.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \{A_0\} &= [A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04}, A_{05}, A^*]^T \\ \{\phi\} &= [\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi^*]^T \\ \{\varphi\} &= [\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi^*]^T \end{aligned} \right\} \quad (10.15a, b, c)$$

其中 $A_{0i}, \phi_i, \varphi_i (i=0, 1, 2, 3, 4, 5)$ 分别是 $\bar{A}_0(R), \phi(R)$ 和 $\varphi(R)$ 在圆板中心 R_0 和节点 R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 上的值。

我们将 $\bar{A}_0(R), \bar{u}(R), \bar{S}_1(R)$ 用插值函数表示为:

$$\bar{A}_0 = [L] \{A_0\}, \quad \bar{u} = \frac{d}{dR} [L] \{\phi\}, \quad \bar{S}_1 = \frac{d}{dR} [L] \{\varphi\} \quad (10.16a, b, c)$$

把方程(9.6)和(9.7)各积分一次, 可得:

$$\nu_1 \bar{A}_0 - \frac{1}{24} \bar{h}^2 \nabla_R^2 \bar{A}_0 + \bar{h} \nabla_R^2 \phi + \frac{7}{480} \bar{h} \nabla_R^2 \varphi = C_3 \quad (10.17a)$$

$$\nu_1 \bar{A}_0 - \frac{27}{392} \bar{h}^2 \nabla_R^2 \bar{A}_0 + \bar{h} \nabla_R^2 \phi - \frac{8(1-\nu_1)}{49\bar{h}} \varphi + \frac{107}{4704} \bar{h} \nabla_R^2 \varphi = C_4 \quad (10.17b)$$

把(10.16a, b, c)代入方程(10.17a, b), (9.8), 得:

$$\left(\nu_1 - \frac{1}{34} \bar{h}^2 \nabla_R^2 \right) [L] \{A_0\} + \bar{h} \nabla_R^2 [L] \{\phi\} + \frac{7}{480} \bar{h} \nabla_R^2 [L] \{\varphi\} - C_3 = 0 \quad (10.18a)$$

$$\left(\nu_1 - \frac{27}{392} \bar{h}^2 \nabla_R^2 \right) [L] \{A_0\} + \bar{h} \nabla_R^2 [L] \{\phi\} - \left[\frac{8(1-\nu_1)}{49\bar{h}} - \frac{107}{4704} \bar{h} \nabla_R^2 \right] [L] \{\varphi\} - C_4 = 0 \quad (10.18b)$$

$$\begin{aligned} & \left(-1 + \frac{1}{12}\nu_1\bar{h}^2\nabla_R^2 - \frac{1}{320}\bar{h}^4\nabla_R^2\nabla_R^2\right)[L]\{A_0\} - \left(\nu_1\bar{h}\nabla_R^2 - \frac{1}{24}\bar{h}^3\nabla_R^2\nabla_R^2\right)[L]\{\phi\} \\ & - \left(\frac{7}{480}\nu_1\bar{h}\nabla_R^2 - \frac{9}{8960}\bar{h}^3\nabla_R^2\nabla_R^2\right)[L]\{\varphi\} = \frac{1}{24}\bar{h}^4\bar{q} \end{aligned} \quad (10.18c)$$

方程组(10.18a, b, c)在 $R=R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ 时均成立, 将 $R=R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ 分别代入(10.18a, b, c)得到十八个线性代数方程, 加上在 $R=R_5$ 处涉及 $\bar{A}_0, \bar{u}, \bar{S}_1$ 的五个边界条件(9.9e, f, g, h, j):

$$\bar{A}_0(1) = [L]\{A_0\}|_{R=1} = 0 \quad (10.19a)$$

$$\bar{A}'_0(1) = \frac{d}{dR}[L]\{\bar{A}_0\}|_{R=1} = 0 \quad (10.19b)$$

$$\bar{u}(1) = \frac{d\phi}{dR}\Big|_{R=1} = \frac{d}{dR}[L]\{\phi\}|_{R=1} = 0 \quad (10.19c)$$

$$\bar{S}_1(1) = \frac{d\varphi}{dR}\Big|_{R=1} = \frac{d}{dR}[L]\{\varphi\}|_{R=1} = 0 \quad (10.19d)$$

$$\begin{aligned} & \left(\nu_1 - \frac{3\bar{h}^2}{40}\nabla_R^2\right)\frac{d}{dR}[L]\{\bar{A}_0\} + \bar{h}\nabla_R^2\frac{d}{dR}[L]\{\phi\} \\ & - \left[\frac{(1-\nu_1)}{5\bar{h}} - \frac{27\bar{h}}{1120}\nabla_R^2\right]\frac{d}{dR}[L]\{\phi\} = 0 \quad (R=1) \end{aligned} \quad (10.19e)$$

是求解弹性圆板的第二组二十三个中心和节点变形位移分量 $A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04}, A_{05}, A^*, \phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi^*, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi^*$ 的二十三个线性代数方程. 这二十三个线性代数方程组成的线性代数方程组可表示成:

$$[D_2]\{X_2\} = \{Q_2\} \quad (10.20)$$

其中 $[D_2]$ 是线性代数方程组的 23×23 系数矩阵, 而:

$$\begin{aligned} \{X_2\} &= [A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04}, A_{05}, A^*, \phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \\ & \quad \phi_5, \phi^*, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi^*, C_3, C_4]^T \\ \{Q_2\} &= \left[0, 0, \frac{1}{24}\bar{h}^2\bar{q}, 0, 0, \frac{1}{24}\bar{h}^2\bar{q}, 0, 0, \frac{1}{24}\bar{h}^2\bar{q}, 0, 0, \frac{1}{24}\bar{h}^2\bar{q}, 0, 0, \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{24}\bar{h}^2\bar{q}, 0, 0, \frac{1}{24}\bar{h}^2\bar{q}, 0, 0, 0, 0, 0\right]^T \end{aligned} \quad (10.21a, b)$$

十一、数值计算结果与讨论

我们通过调用Mathematica软件包编程完成数值计算. 以下给出 $\nu=0.3$ 时弹性圆板的挠度、应力和弯矩的数值计算结果. 以下图中除注明外, 实线(—)表示本文算例的计算结果, 短虚线(---)表示Reissner修正理论^[4]的计算结果.

图2给出了弹性圆板外表面($z=-h/2$)的挠度曲线, 外表面的挠度一般即是实验所能测定的数据^[6], 本文算例中的外表面也是受载面; 图3给出了弹性圆板外表面和中性面的中心挠度随厚跨比 h/a 的变化曲线; 图4给出了弹性圆板中心点挠度沿厚度方向的变化曲线. 由图2~图4可以看到, Reissner修正板理论的中心最大挠度较相应的经典板理论中心最大挠度为大, 而与本文算得的弹性圆板中性面中心挠度相近, 但较本文的外表面中心最大挠度计算

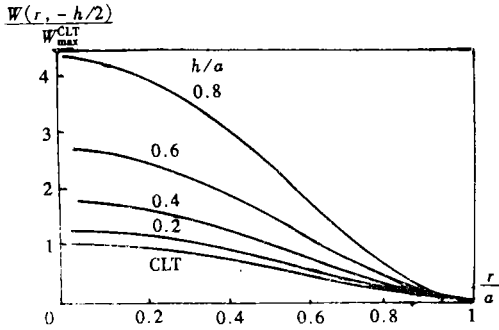


图2 弹性圆板外表面($z = -h/2$)的
挠度曲线

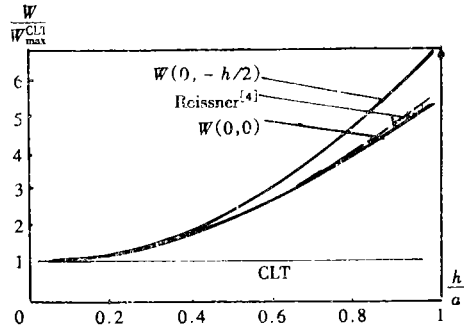


图3 弹性圆板外表面和中性面的中心挠度
随 h/a 的变化曲线

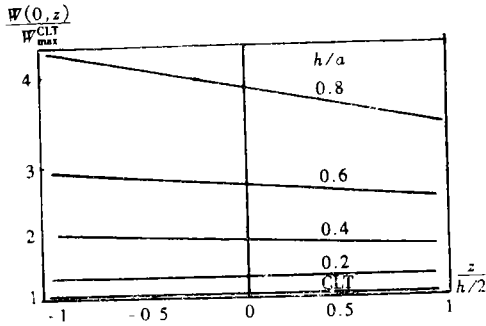


图4 弹性圆板中心点($r=0$)挠度
沿厚度方向的分布图

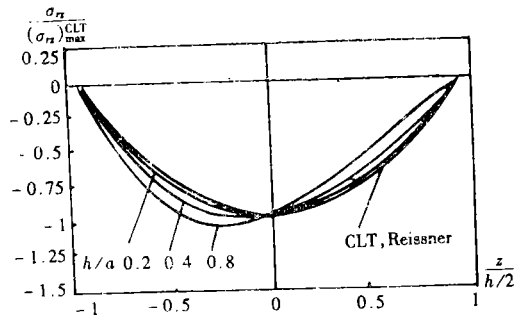


图5 弹性圆板固定边界处的横向剪应力
 τ_{rz} 沿厚度方向的分布图

结果小。经典的克希霍夫-拉夫板理论假设板的横向剪切变形和横向挤压变形为零，也即是假设板的横向剪切刚度和横向挤压刚度都为无穷大。Reissner 理论考虑了平均意义上的横向剪切变形作用，略去了横向剪切变形对计算面内应变的影响，较经典理论降低了板的横向剪切刚度，导致产生附加剪切挠度。本文的理论全面考虑了横向剪切变形和横向挤压变形的作用，因而不仅产生附加剪切挠度，还将产生由横向挤压变形引起的附加挤压挠度。因此，本文理论的最大挠度计算结果较经典理论和 Reissner 理论都大，并且随着厚跨比 h/a 的增加，经典理论和 Reissner 理论的误差变大。与本文理论的计算结果相比，当 $h/a=0.2$ 时，经典理论的最大挠度误差达到20%，而当 $h/a=0.5$ 时，Reissner 理论的计算结果误差也将超过10%。值得注意的是，随着厚跨比 h/a 的增大，挠度沿厚度方向偏离常量分布（图4），最大挠度出现在受载面中心。

图5给出了弹性圆板固定边界处的横向剪应力 τ_{rz} 沿厚度方向的分布曲线。可以看到， τ_{rz} 沿厚度方向基本上仍呈抛物线分布，随着厚跨比 h/a 的增大，将出现近载半区偏大的非对称分布，这种非对称分布是由横向挤压变形引起的。而在经典理论和 Reissner 理论中，这种对称的抛物线分布是不会改变的。

图6给出了弹性圆板固定边界处的弯曲应力 σ_r 沿厚度方向分线的布曲；图7、图8分别给出了弹性圆板的弯矩 M_r 、 M_θ 沿半径方向的分布图。图6表明，随着 h/a 的增大，固定边界

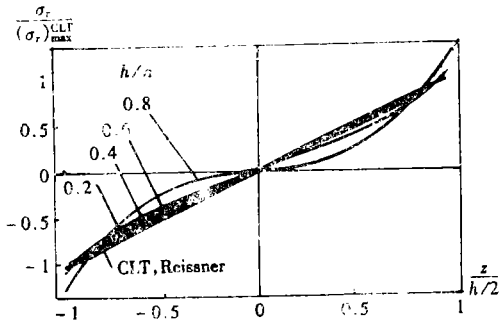


图6 弹性圆板固定边界处的弯曲应力 σ_r 沿厚度方向的分布图

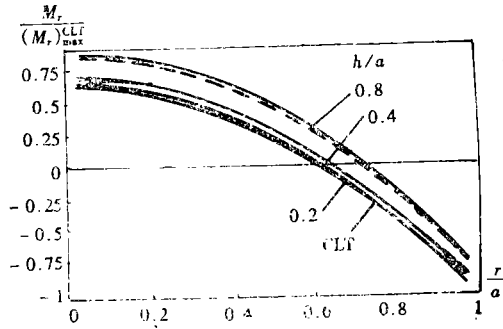


图7 弹性圆板的弯矩 M_r 沿半径方向的分布图

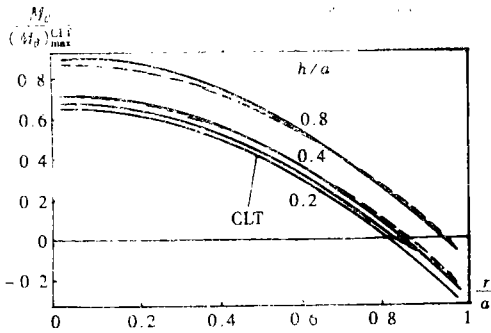


图8 弹性圆板的弯矩 M_θ 沿半径方向的分布图

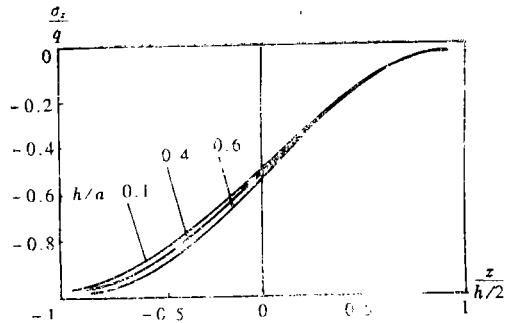


图9 弹性圆板横向正应力 σ_z 沿厚度方向的分布图

上弯曲应力 σ_r 沿厚度方向偏离反对称线性分布，最大弯曲应力出现在表面，并较经典理论和Reissner理论大。这一现象应引起重视，因为最大应力是工程中强度设计的依据，经典理论和Reissner理论认为 σ_r 沿厚度方向是反对称线性分布，显然随着 h/a 的增大，这两种理论的计算结果都要失效。由图7、图8可以看到，对弯矩 M_r 、 M_θ ，Reissner理论与本文的计算结果接近，随着 h/a 的增大，固定边上的弯矩绝对值减小，而中心弯矩变大，同时，经典理论的误差增加。

图9给出了弹性圆板横向正应力 σ_z 沿厚度方向的分布曲线。这种分布基本上接近三次曲线，当厚跨比 h/a 较大时，由于横向剪力的作用而有所偏离。

至此，我们可以得到这样的结论：对于均质弹性圆板，随着厚跨比的增大，挠度、横向剪应力和弯曲应力在板的厚度方向的分布规律将发生变化。当厚跨比 $h/a \geq 0.5$ 时，采用克希霍夫-拉夫假设的经典理论和部分不用克希霍夫-拉夫假设的Reissner修正理论的挠度和弯曲应力的计算结果都有较大的误差，而采用本文理论可以得到比较精确的计算结果。

参 考 文 献

[1] W. Z. Chien, Non-Kirchhoff-Love theory of elastic circular plate fixed in the boundary and loaded on one of the surfaces, *Proc. of the Inter. Conf. on Computational Methods in Structural and Geotechnical Engineering*, Vol. 1:1-6, Hong

Kong(1995).

- [2] 钱伟长, 弹性圆板在一侧受均载而四周固定条件下不用 Kirchhoff-Love 假设的一级近似理论 (I), 应用数学和力学, 18(2) (1997), 95—104.
- [3] 钱伟长、叶开沅, 《弹性力学》, 科学出版社 (1956).
- [4] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic Plates, *J. Appl. Meth.*, 12(2) (1945), 69—77.
- [5] 曹志远等著, 《厚板动力学理论及其应用》, 科学出版社 (1983).
- [6] A. McPherson, W. Ramberg and S. Levy, Normal pressure tests of circular plates with clamped edges, *Rep. NACA*, (744) (1942).

The First-Order Approximation of Non-Kirchhoff-Love Theory for Elastic Circular Plate with Fixed Boundar under Uniform Surface Loading (III) -- Numerical Results

Chien Weizang Sheng Shangzhong

(Shanghai University; Shanghai Institute of Applied Mathematics
and Mechanics, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract

Based upon the differential equations and their related boundary condions given in the previous paper [1,2], using a global interpolation method, this paper presents a numerical solution to the axisymmetric bending problem of non-Kirchhoff-Love theory for elastic circular plate with fixed boundary under uniform surface loading. All the numerical results obtained in this paper are compared with that of Kirchhoff-Love classical theory [3] and E. Reissoer's modified theory [4,5].

Key words elasticity, circular palte, non-Kirchhoff-Love thoery, global interpolation method