应用数学和力学，第18卷 第5期（1997年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

SIM在使用中应注意的条件*

魏毅强[1] 李庆士[1] 蔡中民[1]

（杨桂通推荐，1995年5月1日收到，1996年10月15日收到修改稿）

摘　要

本文介绍了Hausdorff与Box分形维数及测度，首次引入了周积规范比的概念，给出了SIM的正确数学描述及证明，提出了使用SIM的充分条件，并将该方法进行了修正。

关键词　Hausdorff测度　Hausdorff维数　Box维数　周积规范比　SIM

一、引　言

自从Mandelbrot提出了测量金属断口分维的Slit Island Method（简称SIM）以来，人们对此进行了大量的研究，在工程和物理问题中获得广泛应用。但不少实验给出与常识相反的结果，这种现象一直使人们困惑不解，因而导致各种解说。文[2]发现，按SIM测出的分形维随测量码尺(yardstick)的减少而增加，据此该文作者认为只有当测量码尺小于某一临界值时，测出的才是真正分维；文[3，4]对此作了进一步的分析，认为问题的实质在于分形图形的分维是与分形演化次数相关的变量，并随演化次数增大而趋于一定值，故必然存在临界码尺；文[5，6]根据缺陷规范场理论认为临界测量码尺应为1μm；文[2，3，7]则认为临界码尺与金属断裂时裂纹扩展的最小步长或Koch曲线的起始步长有关；又[8]从量纲的角度，指出SIM具有量纲错误以及面积效应等，作者认为上述众多观点从不同侧面反映了问题的所在但都不全面，其实质原因在于未注意到SIM中符号的真实含义，忽视了使用SIM的条件。

本文首先介绍了两种常用的Hausdorff与Box分形维数及测度，讨论了它们之间的关系，对几何图形定义了周积规范比的概念，给出了SIM的正确数学描述及证明，对SIM中符号进行了详细的阐述，提出了使用SIM的充分条件，并指出了产生码尺效应的原因，将该方法进行了修正。

二、分形维数与测度

设$U\subset R^n$是非空子集，$|U|=\sup\{|x-y|: x, y\in U\}$称为的直径。假设$F\subset R^n$，$\{U_i\}$是可

---

* 山西省青年科学基金资助课题．

1 太原工业大学数学力学系，太原　030024．

数或有限个子集构成的集族，如果$F\subset\bigcup U_i$且$0<|U_i|<\delta(i=1,2,\cdots)$，则称$\{U_i\}$为$F$的一个$\delta$-覆盖．取定实数$s\geqslant0$，$\delta>0$，记

$$H_\delta^s(F)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s:\{U_i\}\text{是}F\text{的}\delta\text{-覆盖}\right\}$$

显然，当δ减少时，$H_\delta^s(F)$单调增加，因此当$\delta\to0$时极限存在，记．

$$H^s(F)=\lim_{\delta\to0}H_\delta^s(F) \tag{2.1}$$

称为F的s维Hausdorff测度，简称H测度．可以证明[10]：H^s满足（外）测度的一切性质，为了方便，特别指出：

命题1 设$F\subset R^n$，实数$\lambda>0$，则对一切$s\geqslant0$

$$H^s(\lambda F)=\lambda^sH^s(F) \tag{2.2}$$

其中 $\lambda F=\{\lambda x:x\in F\}$．

命题2 设$F\subset R^n$，f：$F\to R^n$为等距变换，即对任意$x,y\in F$，$|f(x)-f(y)|=|x-y|$，则对一切$s\geqslant0$恒有

$$H^s[f(F)]=H^s(F) \tag{2.3}$$

命题3 设$F\subset R^n$为Borel子集，则当$s=m$为正整数时，

$$H^m(F)=C_mL^m(F) \tag{2.4}$$

其中 L^m为m维Lebesgue测度，$C_m=\left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)$．

命题4 设$F\subset R^n$，则存在实数$s^*(0\leqslant s^*\leqslant n)$，使得

$$H^s(F)=\begin{cases}+\infty & (0\leqslant s<s^*)\\ 0 & (s^*<s)\end{cases} \tag{2.5}$$

由命题4，记

$$\dim_HF=\sup\{s:H^s(F)=+\infty\}=\inf\{s:H^s(F)=0\} \tag{2.6}$$

称为F的Hausdorff维数，简称H维数．由此可知，只有当$s=\dim_HF$时，$H^s(F)$才可能是一个正的有限值，如果$F\subset R^n$是一个Borel子集，而且$0<H^s(F)<+\infty$，则称F是一个s-集．

H测度与维数虽然有很好的性质，但在实际中很难实现，因而通常采用下面的定义．

设$F\subset R^n$是非空有界集，$N_\delta(F)$是F的δ-覆盖中的集合的最小个数，记

$$\underline{\dim}_BF=\underline{\lim}_{\delta\to0}\frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta} \tag{2.7}$$

$$\overline{\dim}_BF=\overline{\lim}_{\delta\to0}\frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta} \tag{2.8}$$

分别称为F的下、上Box维数，若它们相等，则将此公共值记为$\dim_BF$称为F的Box维，即

$$\dim_BF=\lim_{\delta\to0}\frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta} \tag{2.9}$$

Box维的几个等价定义见文[10]．

定理1　设$F\subset R^n$，则

$$\underline{\lim_{\delta\to0}}N_\delta(F)\delta^s=\begin{cases}+\infty & (0\leqslant s<\underline{\dim}_B F)\\ 0 & (s>\underline{\dim}_B F)\end{cases}\tag{2.10}$$

$$\overline{\lim_{\delta\to0}}N_\delta(F)\delta^s=\begin{cases}+\infty & (0\leqslant s<\overline{\dim}_B F)\\ 0 & (s>\overline{\mathrm{dm}}_B F)\end{cases}\tag{2.11}$$

如果Box维存在，则

$$\lim_{\delta\to0}N_\delta(F)\delta^s=\begin{cases}+\infty & (0\leqslant s<\dim_B F)\\ 0 & (s>\dim_B F)\end{cases}\tag{2.12}$$

由定理 1 可知：

$$\begin{aligned}\underline{\dim}_B F&=\sup\{s:\underline{\lim_{\delta\to0}}N_\delta(F)\cdot\delta^s=+\infty\}\\&=\inf\{s:\underline{\lim_{\delta\to0}}N_\delta(F)\cdot\delta^s=0\}\end{aligned}\tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}\overline{\dim}_B F&=\sup\{s:\overline{\lim_{\delta\to0}}N_\delta(F)\cdot\delta^s=+\infty\}\\&=\inf\{s:\overline{\lim_{\delta\to0}}N_\delta(F)\cdot\delta^s=0\}\end{aligned}\tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\dim_B F&=\sup\{s:\lim_{\delta\to0}N_\delta(F)\cdot\delta^s=+\infty\}\\&=\inf\{s:\lim_{\delta\to0}N_\delta(F)\delta^s=0\}\end{aligned}\tag{2.15}$$

定理2　设$F\subset R^n$，则

i）对于一切实数$s\geqslant0$，

$$H^s(F)\leqslant\underline{\lim_{\delta\to0}}N_\delta(F)\cdot\delta^s\leqslant\overline{\lim_{\delta\to0}}N_\delta(F)\delta^s\tag{2.16}$$

ii）$\dim_H F\leqslant\underline{\dim}_B F\leqslant\overline{\dim}_B F$　　(2.17)

这里应该注意到，即使$\lim\limits_{\delta\to0}N_\delta\cdot\delta^s$存在也不是测度，它不满足测度的性质，如果 Box 维不存在，当$\underline{\dim}_B F<s<\overline{\dim}_B F$时，则$N_\delta(F)\delta^s$可以取到从0到$+\infty$的一切值．即对任意的$c(0\leqslant c\leqslant+\infty)$总存在$\delta_k(\delta_k\to0)$，使得$\lim\limits_{k\to+\infty}N_{\delta_k}\delta_k^s=c$．而此时$H^s(F)=0$．

集合的H维与其Box维是两个不同的概念，前者是由测度定义的，对于s-集它有一个非零的正的有限测度，对于一切$F\subset R^n$，$\dim_H F$总是存在的，但是 Box维$\dim_B F$却不一定存在，即使存在，两者也未必相等．因此我们在讨论分形图形的维数时一定要分清它指的是什么维数．另一方面，H测度与维数具有很好的性质，但不便于计算，而 Box 维的计算却较为方便，如果要想两者兼顾，既要有很好的性质，又要使运算方便和计算简单，则必然要求下列条件成立．

1）H维数与其Box维数相等，即$\dim_H F=\dim_B F$

2）H测度等于$\lim\limits_{\delta\to0}N_\delta\cdot\delta^s$，即$H^s(F)=\lim\limits_{\delta\to0}N_\delta\cdot\delta^s$，

分形维数是按极限定义的，但在实测中，并不能取极限，根据极限思想，只有当测量码尺充分小时才能得到维数的近似，这就是所谓尺码效应的真实原因．

三、SIM的数学原理

SIM原理[9] 对于一般非分形图形或物体其周长L，面积A与体积V有关系式

$$L\propto A^{\frac{1}{2}}, \quad A^{\frac{1}{2}}\propto V^{\frac{1}{3}} \tag{3.1}$$

如圆的周长与面积满足关系：$L=2\sqrt{\pi}A^{\frac{1}{2}}$；正方形的周长与面积满足关系：$L=4A^{\frac{1}{2}}$；更一般地，对于每一族具有几何相似的二维形状，其比值$L/A^{1/2}$是由它们共同形状完全确定的，不受测度单位支配的形状特征数，它是一个无量纲数，我们建议将此特征数称为该图形的**周积规范比**。这个关系式有必要进一步阐述，以免将此关系推广时产生一些混乱的思维。

将此类推到分形，有

$$L^{\frac{1}{s}}\propto A^{\frac{1}{2}}, \quad A^{\frac{1}{t}}\propto V^{\frac{1}{3}} \tag{3.2}$$

其中 s，t分别为分形边界曲线与边界曲面的分维。这样的类推，其L及A早已不是原来的Lebesgue意义下的测度了。在定理3和定理4中将对此作出正确的叙述。如果将第一式取对数则

$$\ln L=c+\frac{s}{2}\ln A \tag{3.3}$$

其中 c为常数，利用图象分析仪测出一系列周长与面积的值，在双对数坐标图上通过线性回归求出直线，该直线斜率的两倍即为分形边界的分维。

为正确理解SIM原理，并给出严格的论证，我们给出下面的定理。

定理3 设F为t-集，其边界E为s-集，则存在常数c，使一切与F相似的集F_1，与边界E_1，满足：

$$[H^s(E_1)]^{\frac{1}{s}}=c\cdot[H^t(F_1)]^{\frac{1}{t}} \tag{3.4}$$

证明 因为F_1与F相似，所以存在正数λ与等距变换f，使得$F_1=\lambda f(F)$，同时$E_1=\lambda f(E)$，由H测度的比例性质（命题1）与等距不变性（命题2），可知

$$H^t(F_1)=\lambda^t H^t(f(F))=\lambda^t H^t(F)$$

$$H^s(E_1)=\lambda^s H^s(f(E))=\lambda^s H^s(E)$$

所以F_1与E_1分别为t-集与s-集，取

$$c=\frac{[H^s(E)]^{1/s}}{[H^t(F)]^{1/t}} \tag{3.5}$$

则 $$[H^s(E_1)]^{1/s}=c\cdot[H^t(F_1)]^{1/t}$$

由H测度的定义可知：H^s的量纲为L^s，其中L为通常意义下的'长度'单位，从而(3.5)式的比值是一个无量纲数，它由相似集族中集合F的共同形状完全确定，而与F的选取无关，它是一个不受测度单位支配的刻划相似集的形状特征数，所以我们把它称为该分形图形的**周积规范比**。由H测度与Lebesgue测度的关系不难推得：

定理4 设$F\subset R^n$内部非空，其边界集E为s-集，则F是一个n-集($n-1\leqslant s\leqslant n$)，且

$$[H^s(E)]^{\frac{1}{s}}\propto[L^n(F)]^{\frac{1}{n}} \tag{3.6}$$

其中 $L^n(F)$为F的n维Lebesgue测度。

如果取$n=2$，则$F\subset R^2$为内部非空的平面图形，$L^2(F)$是F在通常意义下的面积，记为A；当$s=1$时，边界E为一维曲线，此时有

$$L^{\frac{1}{s}} \propto A^{\frac{1}{2}}$$

其中 $L=H^s(E)$也等于E在通常意义下的长度即F的周长，而当$1<s<2$时，边界为s维分形曲线，此时只能有

$$[H^s(E)]^{\frac{1}{s}} \propto A^{\frac{1}{2}}$$

注意到$H^s(E)$已不再是通常意义下集合F的周长．此式即为(3.2)的正确表达，如果从量纲来看，两边都取‘长度’量纲，所以并不存在文[8]中指出的面积效应．但如果把$H^s(E)$作为通常意义下的周长，即采用$H^s(E)=N_\delta(F)\cdot\delta$则必然会产生量纲错误，正如文[8]所指出的那样．

四、SIM的充分条件

由上面讨论，不难看出，在关系式$L^{\frac{1}{s}} \propto A^{\frac{1}{2}}$中$L$应与$s$是一致的，即如果$s$是$H$维数，则$L$就是$s$维$H$测度；如果$s$是Lebesgue维数，则$L$就是$s$维Lebesgue测度，绝不能$s$采用一种维数，而$L$却采用另一种测度，因此，在这里不能采用Box维，或者说，如果s是边界集E的Box维数，必然要求

$$s=\dim_B E=\dim_H E$$

实际上，此时s仍是E的H维数，而L仍是E的s维H测度．

在实际测量时，双对数等式(3.3)中的L与A的值与测量码尺δ有关．A为通常意义下的边界集所成的面积，记为$A=A_\delta$，用普通的方法即可求得．而L已不是通常意义下的周长，应是分形边界E的s维H测度$H^s(E)$的对应值，记为$L=L_\delta$．当$1<s<2$时，如果仍然在通常意义下测量周长，即采用$L_\delta=N_\delta\cdot\delta$，其中$N_\delta$为由码尺$\delta$等分边界$E$所得个数，则相当于求它的1维测度，由维数性质（命题4）必然有$L_\delta\to+\infty(\delta\to 0)$，产生一种所谓面积有限而边界无限的错误，这一错误文[8]误认为是SIM本身的．

根据定理2以及上面讨论，计算$L=L_\delta$的值，我们建议采用

$$L_\delta=N_\delta\cdot\delta^s \tag{4.1}$$

其中 s为E的Box维，显然，这必然要求E的Box维存在，由(2.16)式知，L_δ一般略大于s维H测度，但多数情形下两者是相同的，即期望

$$H^s(E)=\lim_{\delta\to 0}N_\delta\cdot\delta^s$$

从而既可避免难以测量的$H^s(E)$值，又纠正了目前通用的越来越不正确的值$N_\delta\cdot\delta$．

总之，由以上讨论可知，使用SIM要求边界集E满足条件：

1) E具有自相似性；
2) Box维$\dim_B F$存在，且$\dim_B E=\dim_H E=s$；
3) E为s-集，且$H^s(E)=\lim_{\delta\to\infty}N_\delta\cdot\delta^s$

五、SIM的修正

在双对数等式(3.3)与(4.1)中，$L=L_\delta$实际上受s所制约，在确定L的同时，已经隐含了s的值，因此，在s未知的情况下，根据(4.1)式L的值不可能真正给出，所以也就不能通过

(3.3)来计算维数，但是计算L的值并非我们的真正目的，它仅仅是一个中间参量，所以我们将(4.1)代入(3.3)消去L，得

$$(N_\delta\cdot\delta^s)^{\frac{1}{s}}\propto(A_\delta)^{\frac{1}{2}} \tag{5.1}$$

即

$$\ln N_\delta=c+s\cdot\ln\frac{(A_\delta)^{\frac{1}{2}}}{\delta} \tag{5.2}$$

在$\ln N_\delta$与$\ln\frac{(A_\delta)^{\frac{1}{2}}}{\delta}$的双对数图上，其直线的斜率为所求维数，如果取$A_\delta=M_\delta\cdot\delta^2$，则

$$\ln N_\delta=c+\frac{s}{2}\ln M_\delta \tag{5.3}$$

所以在$\ln N_\delta$与$\ln M_\delta$的双对数图上，其直线斜率的2倍为所求维数。故我们建议采用(5.2)或(5.3)代替(3.2)进行线性回归，以期求得维数s。

当然这样求出来的s实际上是边界集E的Box维数：$s=\dim_B E$（E仍然要求满足上述三个条件）。

事实上，将(5.2)变形为

$$\ln N_\delta=c+\frac{s}{2}\ln A_\delta-s\ln\delta$$

然后两边同除以$-\ln\delta$，得

$$\frac{\ln N_\delta}{-\ln\delta}=\frac{c+\frac{s}{2}\ln A_\delta}{-\ln\delta}+s \tag{5.4}$$

由于A_δ是通常意义下边界E所围成的面积，它是一个有限值，δ对它的影响很小，因此，当$\delta\to0$时上式右边极限存在，且等于s，而根据Box维的定义，可知上式左边的极限为$\dim_B E$，故$s=\dim_B E$，这样我们证明了由(5.2)或(5.3)确定出的是Box维。

在(5.2)的两边同时加$\ln\delta$，则

$$\ln N_\delta\cdot\delta=c+\frac{s}{2}\ln A_\delta+\ln\delta^{1-s} \tag{5.5}$$

当$s>1$时，对充分小的$\delta>0$，上式右边的值取决于$\ln\delta^{1-s}$，因此，在(3.3)中，如果取$L=N_\delta\cdot\delta$，则(3.3)实际上丢掉了主要项：$\ln\delta^{1-s}$，δ越小，$\ln\delta^{1-s}$越大，完全掩盖了我们所需要的项$\frac{s}{2}\ln A_\delta$，这正是文[2，3，4，5，6]采用(3.3)所得：维数s与码尺δ有关，并随δ的减小而增大，维数越高则增加越大等码尺效应的本质原因。事实上那儿测得的分维值早已是面目皆非了。

六、结　论

本文提出了SIM的充分条件和确定维数的修正公式(5.2)与(5.3)，它可以为确定工程和物理问题中分形维数提供依据，而且还可以澄清分维应用中的反常现象。

参考文献

[1] B. B. Mandelbrot, et al., Fractal charater of fracture surfaces of metals. *Nature*, **308** (1984), 721—722.

[2] C. W. Lang and Z. Q. Mu, Fractal dimension measured with perimeter-area

relation and toughness of materials, *Physical Review* B., 38(16)(1988).

[3] C. W. Lang, et al., Fractal dimension of the fractured surface of materials, *Physica D*., 38 (1989), 242—245.

[4] 谢和平，大理岩微观断裂的分形模型研究，科学通报，5 (1989).

[5] 董连科、王晓伟，分形维数与临界扩展力，金属学报，26(2) (1990).

[6] 董连科等，分形用于材料断裂韧性研究的不定性问题，高压物理学报，4(2) (1990).

[7] 穆在勤、龙期威，由面积-周长关系测量的分形维数与材料韧性的关系，材料科学进展，3(2) (1989), 110—114.

[8] 何宗彦，材料微结构数学描述的特征单元理论及其在细观力学分析中的应用，博士学位论文，重庆大学，(1992).

[9] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, New York, Freeman(1982).

[10] J. K. Falconer, *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons Ltd. (1990).

The Condition for Applying Slit Island Method

Wei Yiqiang Li Qingshi Cai Zhongmin

(*Taiyuan University of Technology, Taiyuan* 030024, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, in view of the discussion of the Hausdorff and Box fractal dimensions and measures which are frequently applied, the concept of the girth to avea normal ratio is introduced for tha first time and the the correct mathematical description of SIM is given together with its proof, the sufficient condition for applying SIM and the improvement version of SIM.

Key words Hausdorff dimensions, Hausdorff measures, Box dimensions, Girth to area normal ratio, SIM