应用数学和力学，第18卷 第4期（1997年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非半简分叉问题的范式*

吴志强[1] 陈予恕[1] 毕勤胜[1]

（1995年6月20日收到，1995年11月6日收到修改稿）

摘　要

根据文[1]给出了求解非半简分叉问题范式的方法．作为应用实例分析了一般非线性系统的非半简双零特征值问题的范式，给出用原系统系数表达的范式系数．

关键词　范式　非半简分叉

一、前　　言

近30年来，人们已经在非线性科学的发展中取得了一大批理论成果，并且从90年代以来，越来越迫切地希望在应用方面实现突破，以便为非线性科学的发展找到新的动力．

在范式 (Normal Form) 理论的研究领域，情况也是如此．一方面，对于范式形式的非线性动力系统，在研究其局部分叉和全局分叉方面，人们已经取得了大量的理论成果；另一方面，对于一个实际的非线性系统，往往难以引用这些结论，因为难以建立起原系统与其范式之间直接的联系．

已有的范式理论，对于非线性系统分叉的分类及其范式结构的了解，发挥了极其重要的作用．Wang Duo（王铎）曾在1990年对各种方法的发展作了很好的综述[2]．

然而，对于实际问题的分叉分析，范式理论提供的一套将一般系统化为范式的方法，往往难以胜任．因为涉及中间过程太多，尽管理论上说不存在问题，但实际操作起来却常常难以进行到底，有时甚至借助于计算机都无济于事．

因此，找到一种操作性强的方法，以建立原系统与其范式间直接的联系，就成为范式理论进一步发展和深入应用的关键．作为尝试，文[1]提出了一种新的求解范式的方法，可较为方便地建立起原系统与其范式之间直接的联系．

文[4]研究了多对相异纯虚特征值问题，即多重非内共振 Hopf 分叉问题的范式，得到的范式系数公式的规律性极强，且形式简单．从理论上讲，适用于任意重数的 Hopf 分叉．这属于系统线性部分的零实部特征值在其Jordan 标准形中对应对角阵的情况即半简分叉；当这些特征值对应 Jordan 标准形中非对角阵时，就为非半简分叉．

本文给出了非半简分叉问题范式的求解方法，并推导出一类重要的非半简分叉，即非半

---

* 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助项目

1 天津大学力学与工程测试系，天津 300072

简双零特征值问题的分叉范式，所讨论的系统是一高维非线性动力系统，其线性部分不具有Jordan 标准形，形式更一般.

二、非半简分叉问题的范式方法

考虑非线性系统

$$\dot{x}=Ax+f(x),\qquad x\in \boldsymbol{R}^n,\ f:\boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}^n \tag{2.1}$$

从文[1]推导知，经非线性变换

$$x=Tu+H(u) \tag{2.2}$$

方程(2.1)可化为范式

$$\dot{u}=Ju+C(u) \tag{2.3}$$

其中变换(2.2)非线性部分$H(u)$满足方程

$$DH\cdot Ju-AH=f(Tu+H)-DH\cdot C-TC \tag{2.4}$$

其中J是由A的零实部特征值组成的Jordan标准形$N\times N$矩阵（N为零实部特征根的个数)，因而当A的特征值不都具有零实部时，文[1]给出的方法实际上还是一种降维系统的方法，此时变换(2.2)中的T不再是方阵，而是由零实部特征值对应的特征向量及广义特征向量组成的矩阵.

在非半简分叉问题中，J可作NS分解

$$J=J_S+J_N \tag{2.5}$$

其中J_S为对角矩阵，而J_N除元素$(J_N)_{i,i+1}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$不全为0外，其余元素均为0.

通常不能对方程(2.4)精确求解，而只能求得其级数形式的近似解

$$H(u)=\sum_{|m|\geq 2}H_m u^m \tag{2.6}$$

其中m为N维指数向量，其元素为非负整数. 将(2.6)代入(2.4)，比较两端同类项u^m的系数，得

$$[\langle m,\lambda\rangle I-A]h_m+\sum_{j=1}^{N-1}(m_j+1)(J_N)_{j,j+1}h_{m_1\cdots(m_j+1)(m_{j+1}-1)\cdots m_n}=\tilde{f}_m-TC_m \tag{2.7}$$

上式左端第二项中当角标出现负数时，表示该项在上式中不存在，$\tilde{f}_m$，C_m定义为:

$$f(Tu+H)-DH\cdot C=\sum_{|m|\geq 2}\tilde{f}_m u^m,\quad C(u)=\sum_{|m|\geq 2}C_m u^m \tag{2.8}$$

可以看出，由于$(J_N)_{j,j+1}(j=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$不全为0，与半简分叉情形相比，方程(2.7)左端第二项将存在，并导致不同非线性项u^m之系数H_m的部分方程之间的耦合.

J_N导致的耦合，只存在于含有非半简变量（非半简特征值对应的范式变量）的同次非线性项的系数方程之间. 而不含有非半简变量的非线性项（包括共振项、非共振项）系数的方程组间是不耦合的，形式与半简分叉的情形相同.

耦合的系数方程组，可写成一组或多组系数矩阵为上三角阵的线性代数方程组. 因此，对非共振项的系数方程组来说，可由一系列递推公式求得；对形式共振项的系数方程组来说，仍可通过一系列递推公式，降维成一个或几个n维的奇异方程组，该方程组的解法，仍

与半简分叉的情形相同．这里我们称满足Poincaré共振条件

$$\langle m,\ \lambda\rangle-\lambda_s=0$$

的项为形式共振项，加"形式"二字主要是指在非半简分叉问题中，并非所有满足Poincaré共振条件的项都出现在范式中，这是非半简分叉问题区别于半简分叉问题的主要特征之一．

下节我们通过讨论一类重要的非半简分叉问题，即非半简双零特征值问题的范式，来说明本节所述的求解方法．

三、非半简双零特征值问题的分叉范式

矩阵A在如下的条件下，存在非半简双零特征值：

（1） $\det(A)=0$ (3.1a)

（2） $\sum_{j=1}^{n}\det(A_{jj})=0$ (3.1b)

其中A_{jj}表示矩阵A去掉第j行第j列元素后得到的矩阵．满足上述两条件时，A有双零特征值．

（3） A的秩为$\mathrm{Rank}A=n-1$（非半简条件） (3.1c)

今假定A除此之外没有零实部特征值．令φ_1，φ_2分别为A的零特征值对应的特征向量和广义特征向量，即有

$$A\varphi_1=0,\quad A\varphi_2=0 \tag{3.2}$$

这样变换(2.2)可写为

$$x=\varphi_1u_1+\varphi_2u_2+\sum_{k\geq 2}\sum_{j=0}^{k}H_{j,(k-j)}u_1^ju_2^{(k-j)}$$

而

$$J=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

于是方程(2.7)化为

$$-AH_{j(k-j)}+(j+1)H_{j+1(k-j-1)}=\tilde{f}_{j(k-j)}-TC_{j(k-j)}\qquad (j=0,1,\cdots,k-1) \tag{3.3}$$

$$-AH_{k0}=\tilde{f}_{k0}-TC_{k0} \tag{3.4}$$

或写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}-A & I & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -A & 2I & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -A & kI\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_{0k}\\ H_{1(k-1)}\\ \cdots\\ H_{(k-1)1}\\ H_{k0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{f}_{0k}-TC_{0k}\\ \tilde{f}_{1(k-1)}-TC_{1(k-1)}\\ \cdots\\ \tilde{f}_{(k-1)1}-TC_{(k-1)1}\\ \tilde{f}_{k0}-TC_{k0}\end{bmatrix} \tag{3.5}$$

在我们讨论的问题中，所有非线性项$u_1^ju_2^{k-j}$ ($j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k$)都满足Poincaré共振条件

$$\langle m,\ \lambda\rangle-\lambda_s=0$$

因而都是形式共振项．(3.5)为所有k次项系数的方程组，显然该方程组的系数矩阵是上三角

矩阵．下面的推导将表明，它可以化为一个n维的奇异代数方程组．

若把方程(3.3)视为$H_{(j+1)(k-j-1)}$的递推方程，即

$$H_{(j+1)(k-j-1)}=\frac{1}{j+1}[\mathfrak{f}_{j(k-j)}+AH_{j(k-j)}-TC_{j(k-j)}] \qquad (j=0,1,\cdots,k-1) \tag{3.6a}$$

则有

$$H_{(k-1)1}=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{k-2}j!A^{k-j}(\mathfrak{f}_{j(k-j)}-TC_{j(k-j)})+\frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}H_{0k} \tag{3.6b}$$

将(3.5)的倒数第二式乘以A/k加到最后一式，得

$$-\frac{A^2}{k}H_{(k-1)1}=\frac{A}{k}\mathfrak{f}_{(k-1)1}+\mathfrak{f}_{k0}-\frac{AT}{k}C_{(k-1)1}-TC_{k0}$$

将(3.6)代入上式，即得关于H_{0k}的奇异方程组：

$$-\frac{A^{k+1}}{k!}H_{0k}=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}j!A^{k-j}(\mathfrak{f}_{j(k-j)}-TC_{j(k-j)}) \tag{3.7}$$

注意到$A^2T=0$及$k\geqslant 2$，上式中$C_{j(k-j)}$ $(j=0,\ 1,\ \cdots,\ k-2)$不会产生影响，故可取$C_{j(k-j)}$ $(j=0,\ 1,\ \cdots,\ k-2)=0$，于是上式简化为

$$-\frac{A^{k+1}}{k!}H_{0k}=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}j!A^{k-j}\mathfrak{f}_{j(k-j)}-\frac{AT}{k}C_{(k-1)1}-TC_{k0} \tag{3.8}$$

这样就通过递推方程(3.6a)，将方程组(3.5)解耦成n维的奇异方程组(3.8)．

解出(3.8)，代入(3.6)，即可得到范式及变换(2.2)中非线性项的系数．

可以证明$A^k(k\geqslant 2)$有半简双零特征值，其特征向量分别为φ_1，φ_2，其它特征根均不为0．因此A^{k+1}为余秩为2的矩阵，H_{0k}中有两个元素可任意选取，记为$\hat{H}_{0k}=0$，而其余元素为$\hat{\hat{H}}_{0k}$．方程(3.8)是$C_{(k-1)1}$和C_{k0}中某两个元素及$\hat{\hat{H}}_{0k}$的非奇异方程组．因为

$$AT=(0,\ \varphi_1)$$

故只有两种可能：

(1) $C_{(k-1)1,2}$和$C_{k0,2}$，或

(2) C_{k0}

它们分别对应范式的k次项

$$(1)\ \begin{bmatrix} 0 \\ C_{(k-1)1,2}u_1^{k-1}u_2+C_{k0,2}u_1^k \end{bmatrix},\quad (2)\ \begin{bmatrix} C_{k0,1}u_1^k \\ C_{k0,2}u_1^k \end{bmatrix}$$

下面给出上述两种情况下，方程(3.8)的求解公式．

情形 1

记$-A^{k+1}/k!$去掉$\hat{H}_{0k}$对应的两列后得到的矩阵为A'，定义矩阵B为

$$B=\left[\frac{\varphi_1}{k},\ \varphi_2,\ A'\right]$$

则

$$[C_{(k-1)1,2}\quad C_{k0,2}\quad \hat{\hat{H}}_{0k}]^T=B^{-1}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}j!A^{k-j}\mathfrak{f}_{j(k-j)} \tag{3.9}$$

情形 2

定义B为

$$B=[\varphi_1,\ \varphi_2,\ A']$$

其中A'同情形(1)，则

$$[C_{k0}\quad \hat{H}_{0k}]^T=B^{-1}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}j!A^{k-j}\tilde{f}_{j(k-j)} \tag{3.10}$$

四、应 用 举 例

下面我们分析二维系统的非半简双零特征值问题的范式。假定A有 Jordan 标准形，即

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad A^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

则零特征值对应的特征向量和广义特征向量分别为

$$\varphi_1=[1\quad 0]^T,\ \varphi_2=[0\quad 1]^T$$

在非退化情况下，只须求解$k=2$的方程即可．

情形(1)

方程(3.9)简化为

$$\begin{bmatrix}C_{(k-1)1,2}\\ C_{k0,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\left[\frac{1}{k}A\tilde{f}_{(k-1)1}+\tilde{f}_{k0}\right]=\begin{bmatrix}\tilde{f}_{(k-1)1,2}+k\tilde{f}_{k0,1}\\ k\tilde{f}_{k0,2}\end{bmatrix}$$

$$\overset{[3]}{=}\begin{bmatrix}b_{k-1}+ka_k\\ b_k\end{bmatrix}$$

因为不求更高阶非线性项的系数，也就没有必要求$H_{j(2-j)}$ $(j=1,\ 2)$．

情形(2)

方程(3.10)简化为

$$C_{k0}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\left[\frac{1}{k}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\tilde{f}_{(k-1)1}+\tilde{f}_{k0}\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{k}\tilde{f}_{(k-1)1,2}+\tilde{f}_{k0,1}\\ \tilde{f}_{k0,2}\end{bmatrix}$$

$$\overset{[3]}{=}\begin{bmatrix}\frac{1}{k}b_{k-1}+a_k\\ b_k\end{bmatrix}$$

五、小　　结

文[1]提出的求范式的方法，适于非半简分叉问题的范式的求解，特别适于 Jacobi 矩阵不是Jordan 标准形的系统，能方便地用原系统的系数表达其范式系数．

另外，对于非半简分叉问题，并非所有满足 Poincaré 共振条件的项都会出现在其范式中，因而与相应的半简分叉问题的范式相比，其范式要简单得多．

参考文献

[1] 吴志强，一种求解高维非线性动力系统范式的新方法，天津大学博士学位论文 (1996).

[2] Wang Duo, An introduction to the normal form theory of ordinary differential equations, *Advances in Mathematics*, 19(1) (1990), 1—35.

[3] 陈予恕，《非线性振动系统的分叉和混沌理论》，高等教育出版社，北京 (1993).

[4] 陈予恕、吴志强，多重非内共振Hopf分叉范式，力学学报.(待刊出)

Normal Form of the Nonsemi-Simple Bifurcation Problem

Wu Zhiqiang Chen Yushu Bi Qinshen

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract

By the method proposed in [1], the paper gives the method for finding the normal form of nonsemi-simple bifurcation problems. As an example, it analyses the normal form of a general nonlinear dynamical system with the nonsemi-simple double zero eigenvalues, and gives out the expression for the coefficients in the normal form through those in the original system.

Key words normal form, nonsemi-simple bifurcation