应用数学和力学，第18卷 第3期（1997年3月）
Applied Mathematatics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

含非均匀界面相碳/碳纤维复合材料等效热传导性质的研究

何陵辉[1] 成振强[1] 刘人怀[2]

（1995年11月3日收到，1996年8月5日收到修改稿）

摘　要

本文研究含非均匀界面相碳/碳纤维复合材料的热传导性质.将非均匀界面相近似模拟为由许多性质均匀的薄层构成的层状结构，并应用 Mori-Tanaka 平均场概念得到了该复合材料等效热传导系数封闭形式的解析解.

关键词　复合材料　热传导系数　非均匀界面相　Mori-Tanaka方法

一、引　言

复合材料宏观等效热传导性质的研究是一个经典的课题．早期的研究工作主要涉及了各向同性相构成的复合材料，其中各组分间的界面假设为理想的，即温度场和热流场是连续的．相关文献可见Wiuis[1]和Klements[2]等人的详细综述．近期的研究则着重考虑了由温度应力引起的界面缺陷对复合材料宏观等效热传导性质的影响．例如，Hatta和Taya[3]以及Benveniste[4]将界面缺陷用第三相薄层来模拟，而Hasselmann等[5,6]则采用非连续的温度和热流条件来刻划界面缺陷．

近年来，随着新型材料工艺的发展和复合材料在高温环境下的重要应用，出现了一些微结构形式新颖而复杂的先进复合材料.例如，在高温条件下广泛使用的碳/碳纤维复合材料，其基体是横观各向同性的，而纤维则往往是圆柱正交各向异性的．此外，在界面区域还常呈现材料性质逐层均匀或连续变化的非均匀相．这种非均匀的界面相结构可能因高温情况下热扩散加剧所致，也可能是为缓解热膨胀系数失配所引起的界面热应力而人为引入，如多涂层复合材料和功能梯度复合材料[7,8]等． 本文将研究此类含非均匀界面相复合材料的宏观等效热传导性质．

本文首先对含非均匀界面相碳/碳纤维复合材料的微结构特征和相应的物理模型进行了详细描述，并导出了关于其等效传导性质的一些基本关系，然后在 Mori-Tanaka平均场概念[9,10]的基础上得到了等效热传导系数的解析公式.Mori-Tanaka平均场概念首先由 Mori

1 中国科学技术大学，合肥　230026．

2 暨南大学，广州　510632．

和 Tanaka[9]在研究合金硬化问题时提出，后由 Benveniste[10]进行了更加简单明晰地阐述，目前已被广泛应用于复合材料细观力学问题的研究。其主要优点是可以给出封闭形式的显式解。

为方便起见，本文采用矩阵记法。以小写黑体字母表示3×1矩阵，大写黑体字母表示3×3矩阵。矩阵$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{A}$的转置以$\boldsymbol{a}^T$和$\boldsymbol{A}^T$表示，而复合材料所占空间中的场量和s相空间中的场量，如B和$\boldsymbol{T}_s$，关于复合材料体积V和s相体积V_s的体积平均分别由$\bar{B}$和$\bar{\boldsymbol{T}}_s$表示。$\boldsymbol{A}$的逆阵为$\boldsymbol{A}^{-1}$。

二、物理模型

在直角坐标系(x_1, x_2, x_3)中考虑一含非均匀界面相的单向碳/碳纤维复合材料。每一纤维半径相同，且均沿x_3轴方向排列。在垂直于x_3轴的平面x_1Ox_2中，纤维则是随机分布的。纤维与基体之间的界面相厚度均等，其材料性质沿厚度方向连续变化（如图1(a)中实线所示）。对于这样一种复杂的界面相结构，为了数学处理的方便可用多层界面相模型进行模拟（见图1(b)）：用$n-1$个同心圆柱面将界面相划分为n层，再将每一层用相应的均匀层代替。这样复合材料便可视为由$n+2$个均匀相构成。记基体为第0相，纤维为第$n+1$相，其间的n层均匀层由外至里分别记为第1，2，…，n相，并记第s相$(s=1, 2, \cdots, n+1)$的外半径为R_s。第s层均匀层的材料性质取为非均匀界面相在半径为R_s和R_{s+1}处材料性质的代数平均（如图1(a)虚线所示）。显然，n取得越大多层界面相模型的模拟结果越精确。

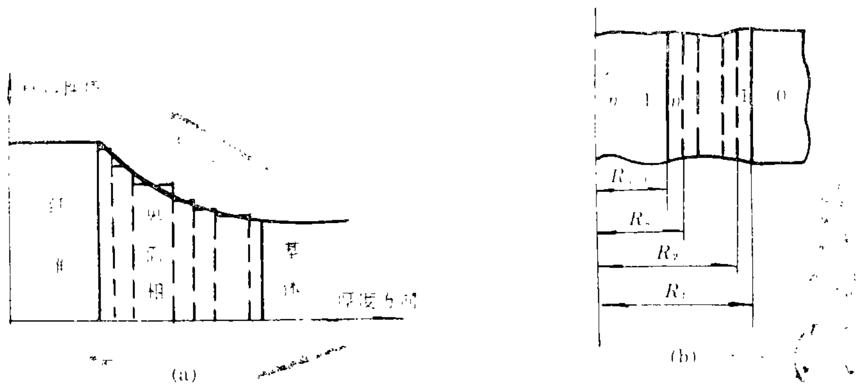

图1 多层界面相模型示意图

通常，基体材料为关于x_3轴横观各向同性的，其热传导本构关系可表示为下式之一：

$$\boldsymbol{q}_0=\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{h}_0, \quad \boldsymbol{h}_0=\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{q}_0 \tag{2.1a,b}$$

其中 $\boldsymbol{q}_0$和$\boldsymbol{h}_0$分别为基体中的热流和温度梯度，$\boldsymbol{K}_0$和$\boldsymbol{R}_0$分别表示基体的热导系数和热阻系数矩阵，并且有

$$\boldsymbol{h}_0=-\left[\frac{\partial T_0}{\partial x_1}, \frac{\partial T_0}{\partial x_2}, \frac{\partial T_0}{\partial x_3}\right]^T, \quad \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{I},$$

$$\boldsymbol{K}_0=\begin{bmatrix} K_1^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & K_1^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & K_3^{(0)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_0=\begin{bmatrix} R_1^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & R_1^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{(0)} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

这里 T_0为基体中的温度,$\boldsymbol{I}$为单位矩阵, $K_i^{(0)}$和 $R_i^{(0)}$分别为基体在 x_i方向的热导系数和热阻系数. 碳纤维及其外围的n层均匀层均假设为圆柱正交各向异性的, 在通常的柱坐标(r, θ, z)中其热传导本构方程可以写为以下两组方程之一:

$$\boldsymbol{q}_s'=\boldsymbol{K}_s'\boldsymbol{h}_s', \quad \boldsymbol{h}_s'=\boldsymbol{R}_s'\boldsymbol{q}_s' \quad (s=1, 2, \cdots, n+1) \tag{2.3a,b}$$

其中 $\boldsymbol{K}_s'\boldsymbol{R}_s'=\boldsymbol{I}$, 且

$$\boldsymbol{K}_s'=\begin{bmatrix} K_r^{(s)} & 0 & 0 \\ 0 & K_\theta^{(s)} & 0 \\ 0 & 0 & K_z^{(s)} \end{bmatrix}, \boldsymbol{R}_s'=\begin{bmatrix} R_r^{(s)} & 0 & 0 \\ 0 & R_\theta^{(s)} & 0 \\ 0 & 0 & R_z^{(s)} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

这里z轴与纤维的对称轴重合, 方向与x_3轴相同, $K_r^{(s)}$, $K_\theta^{(s)}$和$K_z^{(s)}$分别表示第s相的径向、环向和轴向热导系数, 而 $R_r^{(s)}$, $R_\theta^{(s)}$和 $R_z^{(s)}$为相应的热阻系数. 借助于关系式

$$\boldsymbol{q}_s=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{q}_s', \quad \boldsymbol{h}_s=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{h}_s' \tag{2.5}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{I} \tag{2.6}$$

可将式(2.3a, b)变换到(x_1, x_2, x_3)坐标系中:

$$\boldsymbol{q}_s=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{K}_s'\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{h}_s, \quad \boldsymbol{h}_s=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}_s'\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{q}_s \quad (s=1, 2, \cdots, n+1) \tag{2.7a,b}$$

从微结构特点可以知道, 所考虑的复合材料宏观上可等效为关于x_3轴横观各向同性的均匀体, 其热传导本构方程可表示为下式之一:

$$\bar{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{h}}, \quad \bar{\boldsymbol{h}}=\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{q}} \tag{2.8a,b}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{q}}$和$\bar{\boldsymbol{h}}$分别为体平均热流和体平均温度梯度

$$\bar{\boldsymbol{q}}=\frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{q}dV, \quad \bar{\boldsymbol{h}}=\frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{h}dV \tag{2.9a,b}$$

V为复合材料的体积, $\boldsymbol{K}$和$\boldsymbol{R}$分别表示复合材料的等效热导系数和热阻系数矩阵, 且有

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

本文的目的即是在复合材料微结构特征和组分性质的基础上确定$\boldsymbol{K}$和$\boldsymbol{R}$.

三、基本关系

在复合材料外表面Ω上给定边界条件

$$T(\Omega)=-\hat{\boldsymbol{h}}^T\boldsymbol{x} \tag{3.1}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{h}}$为一定常温度梯度. 此时由Gauss定理可以证明, 复合材料中温度梯度关于体积 V 的平均值为$\hat{\boldsymbol{h}}$, 即

$$\bar{\boldsymbol{h}}=\hat{\boldsymbol{h}} \tag{3.2}$$

而各组分中的局部温度梯度是不均匀的. 引入影响函数$\boldsymbol{A}_s$, 使得各组分局部温度梯度可形式地表示为

$$\boldsymbol{h}_s=\boldsymbol{A}_s\hat{\boldsymbol{h}} \tag{3.3}$$

则由式(2.9b)关于$\bar{\boldsymbol{h}}$的定义经分域积分可得

$$\bar{\boldsymbol{h}}=\sum_{s=0}^{n+1}c_s\bar{\boldsymbol{A}}_s\hat{\boldsymbol{h}} \tag{3.4}$$

其中 c_s表示第s相的体积分数，$\sum_{s=0}^{n+1}c_s=1$，而$\bar{\boldsymbol{A}}_s$表示$\boldsymbol{A}_s$在s相体积V_s上的平均.比较式(3.2)和(3.4)有

$$\sum_{s=0}^{n+1}c_s\bar{\boldsymbol{A}}_s=\boldsymbol{I} \tag{3.5}$$

另一方面，从式(2.9a)关于$\bar{\boldsymbol{q}}$的定义经分域积分再利用式(2.1a)，(2.7a)和(3.3)可得

$$\bar{\boldsymbol{q}}=\left[c_0\boldsymbol{K}_0\bar{\boldsymbol{A}}_0+\sum_{s=0}^{n+1}c_s\left(\frac{1}{V_s}\int_{V_s}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{K}_s'\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}_s dV\right)\right]\hat{\boldsymbol{h}} \tag{3.6}$$

于是，将式(3.2)和(3.6)代入(2.8a)并利用式(3.5)有

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_0+\sum_{s=1}^{n+1}c_s\left(\frac{1}{V_s}\int_{V_s}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{K}_s'\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}_s dV-\boldsymbol{K}_0\bar{\boldsymbol{A}}_s\right) \tag{3.7}$$

如在复合材料外表面Ω上给定边界条件

$$q_n(\Omega)=\hat{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{n} \tag{3.8}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{q}}$为一定常热流，$\boldsymbol{n}$为Ω的单位外法线矢量，由Gauss定理也可以证明

$$\bar{\boldsymbol{q}}=\hat{\boldsymbol{q}} \tag{3.9}$$

类似地，引入影响函数$\boldsymbol{B}_s$使s相中的局部热流$\boldsymbol{q}_s$可形式地表示为

$$\boldsymbol{q}_s=\boldsymbol{B}_s\hat{\boldsymbol{q}} \tag{3.10}$$

则由式(2.9a)关于$\bar{\boldsymbol{q}}$的定义及式(3.9)可导出

$$\sum_{s=0}^{n+1}c_s\bar{\boldsymbol{B}}_s=\boldsymbol{I} \tag{3.11}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{B}}_s$表示$\boldsymbol{B}_s$关于V_s的体积平均.因此,按式(2.9b)关于$\bar{\boldsymbol{h}}$的定义并利用式(2.1b),(2.7b),(2.8b)及(3.11)可以得到

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_0+\sum_{s=0}^{n+1}c_s\left(\frac{1}{V_s}\int_{V_s}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}_s'\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{B}_s dV-\boldsymbol{R}_0\bar{\boldsymbol{B}}_s\right) \tag{3.12}$$

式(3.7)和(3.12)分别为由影响函数$\boldsymbol{A}_s$和$\boldsymbol{B}_s$表示的复合材料等效热导和热阻系数矩阵的表达式. 对特定的复合材料，求得$\boldsymbol{A}_s$和$\boldsymbol{B}_s$，即可得$\boldsymbol{K}$和$\boldsymbol{R}$.

四、Mori-Tanaka近似

一般地，对于给定的复合材料微结构，要精确地确定边界条件(3.1)或(3.8)下的影响函数 $\boldsymbol{A}_s$ 和 $\boldsymbol{B}_s$ 是不可能的. 为此，我们采用 Mori-Tanaka[9,10] 方法来确定$\boldsymbol{A}_s$和$\boldsymbol{B}_s$的近似解.相应于本文的问题，Mori-Tanaka方法的基本假设为：边界条件(3.1)和(3.8)下第s相

中的平均热流$\bar{\boldsymbol{q}}_s$和温度梯度$\bar{\boldsymbol{h}}_s$等同于将单根碳纤维及其外的 n 层均匀层置于无穷大基体材料中并在无穷远处分别给定如下边界条件时第s相中的$\bar{\boldsymbol{q}}_s$和$\bar{\boldsymbol{h}}_s$:

$$T=-\bar{\boldsymbol{h}}_0^T\boldsymbol{x},\quad q_n=\bar{\boldsymbol{q}}_0^T\boldsymbol{n} \tag{4.1a,b}$$

先考虑边界条件(4.1a)下的情况. 假设此时在坐标系$(r,\ \theta,\ z)$中可得到第s相中的局部温度梯度为

$$\boldsymbol{h}'_s=\boldsymbol{T}'_s\bar{\boldsymbol{h}}_0 \qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1) \tag{4.2}$$

变换到$(x_1,\ x_2,\ x_3)$坐标系中有

$$\boldsymbol{h}_s=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}'_s\bar{\boldsymbol{h}}_0 \qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1) \tag{4.3}$$

由于$\bar{\boldsymbol{h}}=\sum\limits_{s=0}^{n+1}c_s\bar{\boldsymbol{h}}_s$, 将式(4.3)代入(3.2)可得

$$\bar{\boldsymbol{h}}_0=\left[c_0\boldsymbol{I}+\sum_{s=1}^{n+1}c_s\left(\frac{1}{V_s}\int_{V_s}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}'_s dV\right)\right]^{-1}\hat{\boldsymbol{h}} \tag{4.4}$$

于是从式(3.3), (4.3)和(4.4)可知

$$\boldsymbol{A}_s=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}'_s\left[c_0\boldsymbol{I}+\sum_{p=1}^{n+1}c_p\left(\frac{1}{V_p}\int_{V_p}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}'_p dV\right)\right]^{-1} \tag{4.5}$$

将式(4.5)代入(3.7)便得

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_0+\sum_{s=1}^{n+1}c_s\left[\frac{1}{V_s}\int_{V_s}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{K}'_s-\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{Q})\boldsymbol{T}'_s dV\right]\left[c_0\boldsymbol{I}\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{n+1}c_p\left(\frac{1}{V_p}\int_{V_p}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}'_p dV\right)\right]^{-1} \tag{4.6}$$

类似地, 在边界条件(4.1b)之下, 可假设在$(r,\ \theta,\ z)$坐标系中解得第s相中的局部热流为:

$$\boldsymbol{q}'_s=\boldsymbol{W}'_s\boldsymbol{q}_0 \qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1) \tag{4.7}$$

转换到$(x_1,\ x_2,\ x_3)$坐标系中有

$$\boldsymbol{q}_s=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}'_s\bar{\boldsymbol{q}}_0 \qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1) \tag{4.8}$$

由式(3.9), (4.8) 以及关系式 $\bar{\boldsymbol{q}}=\sum\limits_{s=0}^{n+1}c_s\bar{\boldsymbol{q}}_s$可得:

$$\bar{\boldsymbol{q}}_0=\left[c_0\boldsymbol{I}+\sum_{s=1}^{n+1}c_s\left(\frac{1}{V_s}\int_{V_s}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}'_s dV\right)\right]^{-1}\hat{\boldsymbol{q}} \tag{4.9}$$

因而将式(4.9)代入(4.8)并与(3.10)比较可见

$$\boldsymbol{B}_s=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}'_s\left[c_0\boldsymbol{I}+\sum_{p=1}^{n+1}c_p\left(\frac{1}{V_p}\int_{V_p}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}'_p dV\right)\right]^{-1} \tag{4.10}$$

再将式(4.10)代入(3.12)即得

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_0+\sum_{s=1}^{n+1}c_s\left[\frac{1}{V_s}\int_{V_s}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}'_s-\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{Q})\boldsymbol{W}'_s dV\right]\left[c_0\boldsymbol{I}\right.$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1} c_p\left(\frac{1}{V_p}\int_{V_p} \boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}'_p dV\right)\Bigg]^{-1} \tag{4.11}$$

式(4.6)和(4.11)即为按 Mori-Tanaka 平均场概念导出的复合材料等效热导和热阻系数矩阵的表达式。需要指出的是，所得到的$\boldsymbol{K}$和$\boldsymbol{R}$满足一致性条件

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I} \tag{4.12}$$

为了证明这一点，首先将式(4.6)和(4.11)改写为如下形式：

$$\boldsymbol{K}\left[c_0\boldsymbol{I}+\sum_{s=1}^{n+1} c_s\left(\frac{1}{V_s}\int_{V_s}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}'_s dV\right)\right]=c_0\boldsymbol{K}_0+\sum_{s=1}^{n+1} c_s\left(\frac{1}{V_s}\int_{V_s}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{K}'_s\boldsymbol{T}'_s dV\right)$$

$$\boldsymbol{R}\left[c_0\boldsymbol{I}+\sum_{s=1}^{n+1} c_s\left(\frac{1}{V_s}\int_{V_s}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}'_s dV\right)\right]=c_0\boldsymbol{R}_0+\sum_{s=1}^{n+1} c_s\left(\frac{1}{V_s}\left(\int_{V_s}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}'_s\boldsymbol{W}'_s dV\right)\right.$$

(4.13a,b)

由基体材料的热传导本构关系(2.1a)可知，对于无穷基体包含单根纤维及n层均匀层的情况，无穷远处边界条件(4.1a)引起的s相局部温度梯度应等同于在无穷远处给定边界条件(4.1b)所引起的s相局部温度梯度。利用式(4.2)，(4.7)和(2.3b)即有

$$\boldsymbol{T}'_s\bar{\boldsymbol{h}}_0=\boldsymbol{R}'_s\boldsymbol{W}'_s\bar{\boldsymbol{q}}_0 \tag{4.14}$$

从式(2.1b)可知(4.14)等价于

$$\boldsymbol{T}'_s=\boldsymbol{R}'_s\boldsymbol{W}'_s\boldsymbol{K}_0 \tag{4.15}$$

将式(4.15)代入(4.13a)并利用条件$\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{I}$和$\boldsymbol{K}'_s\boldsymbol{R}'_s=\boldsymbol{I}$可得

$$\boldsymbol{K}\left[c_0\boldsymbol{R}_0+\sum_{s=1}^{n+1} c_s\left(\frac{1}{V_s}\int_{V_s}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}'_a\boldsymbol{W}'_s dV\right)\right]=c_0\boldsymbol{I}+\sum_{s=1}^{n+1} c_s\left(\frac{1}{V_s}\int_{V_s}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}'_s dV\right) \tag{4.16}$$

比较式(4.16)和(4.13b)即知式(4.12)的一致性条件成立。

五、辅助问题与热传导性质的解

由于$\boldsymbol{K}$和$\boldsymbol{R}$满足关系(4.12)，只要求得$\boldsymbol{K}$和$\boldsymbol{R}$中任一量，另一量便可由式(4.12)导出。本文将给出$\boldsymbol{K}$的解，为此先求$\boldsymbol{T}'_s$。

考虑无穷大基体材料包含单根纤维及n层均匀层的情况，在无穷远处给定边界条件(4.1a)。在柱坐标(r, θ, z)中，(4.1a)相当于在无穷远处给定温度条件

$$T=-r(\bar{h}_1^{(0)}\cos\theta+\bar{h}_2^{(0)}\sin\theta)-\bar{h}_3^{(0)}z \tag{5.1}$$

于是不妨设第s相中的温度为

$$T_s=-\Phi_s(\bar{h}_1^{(0)}\cos\theta+\bar{h}_2^{(0)}\sin\theta)-\bar{h}_3^{(0)}z \tag{5.2}$$

其中 $\Phi_s=\Phi_s(r)$为待定函数。此时s相中的温度梯度为

$$\begin{bmatrix} h'^{(s)}_r \\ h'^{(s)}_\theta \\ h'^{(s)}_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{d\Phi_s}{dr}\cos\theta & \dfrac{d\Phi_s}{dr}\sin\theta & 0 \\ -\dfrac{\Phi_s}{r}\sin\theta & \dfrac{\Phi_s}{r}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{h}_1^{(0)} \\ \bar{h}_2^{(0)} \\ \bar{h}_3^{(0)} \end{Bmatrix} \tag{5.3}$$

而热流为

$$\begin{Bmatrix} q'^{(s)}_r \\ q'^{(s)}_\theta \\ q'^{(s)}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K^{(s)}_r \dfrac{d\Phi_s}{dr}\cos\theta & K^{(s)}_r \dfrac{d\Phi_s}{dr}\sin\theta & 0 \\ -K^{(s)}_\theta \dfrac{\Phi_s}{r}\sin\theta & K^{(s)}_\theta \dfrac{\Phi_s}{r}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & K^{(s)}_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}^{(0)}_1 \\ \bar{h}^{(0)}_2 \\ \bar{h}^{(0)}_3 \end{Bmatrix} \tag{5.4}$$

需要指出，当$s=0$时应有：$K^{(0)}_r=K^{(0)}_\theta=K^{(0)}_1$，$K^{(0)}_z=K^{(0)}_3$.

将式(5.4)代入s相的热流平衡方程

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{q}_s=0 \tag{5.5}$$

可得

$$\frac{d^2\Phi_s}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Phi_s}{dr}-\frac{\alpha_s^2}{r^2}\Phi_s=0 \tag{5.6}$$

其中 $\alpha_s^2=K^{(s)}_\theta/K^{(s)}_r$. 解之有

$$\Phi_s=D^{(s)}_1 r^{\alpha_s}+D^{(s)}_2 r^{-\alpha_s} \tag{5.7}$$

其中 $D^{(s)}_1$和$D^{(s)}_2$为待定常数. 利用式(5.2)，(5.3)，(5.4)，(5.7)以及以下边界条件

$$\left.\begin{array}{l} r\to\infty\text{时}，h'^{(0)}_r=\bar{h}^{(0)}_1\cos\theta+\bar{h}^{(0)}_2\sin\theta, h'^{(0)}_\theta=-\bar{h}^{(0)}_1\sin\theta+\bar{h}^{(0)}_2\cos\theta，h'^{(0)}_z=\bar{h}^{(0)}_3 \\ r\to 0\text{时}，h'^{(n+1)}_r，h'^{(n+1)}_\theta\text{有限} \\ r=R_s\text{时}，T_{s-1}=T_s，h'^{(s-1)}_r=h'^{(s)}_r \end{array}\right\} \tag{5.8}$$

可知$D^{(s)}_1$和$D^{(s)}_2$满足下列关系

$$\begin{aligned} &D^{(0)}_1=1, \\ &D^{(n+1)}_2=0, \\ &R_s^{\alpha_s}D^{(s)}_1-R_s^{\alpha_{s-1}}D^{(s-1)}_1+R_s^{-\alpha_s}D^{(s)}_2-R_s^{-\alpha_{s-1}}D^{(s-1)}_2=0 \\ &R_s^{\alpha_s-1}D^{(s)}_1-\frac{\alpha_{s-1}}{\alpha_s}R_s^{\alpha_{s-1}-1}D^{(s-1)}_1-R_s^{-\alpha_s-1}D^{(s)}_2+\frac{\alpha_{s-1}}{\alpha_s}R_s^{-\alpha_{s-1}-1}D^{(s-1)}_2=0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

式中共有$2(s+2)$个方程，其中包含$2(s+2)$个未知量$D^{(s)}_1$和$D^{(s)}_2$。联立这些方程可解出$D^{(s)}_1$和$D^{(s)}_2$.

得到$D^{(s)}_1$和$D^{(s)}_2$的解，Φ_s便被确定. 将式(5.7)代入(5.3)可得

$$\begin{Bmatrix} h'^{(s)}_r \\ h'^{(s)}_\theta \\ h'^{(s)}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi^{(s)}_1\alpha_s\cos\theta & \Psi^{(s)}_1\alpha_s\sin\theta & 0 \\ -\Psi^{(s)}_2\sin\theta & \Psi^{(s)}_2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}^{(0)}_1 \\ \bar{h}^{(0)}_2 \\ \bar{h}^{(0)}_3 \end{Bmatrix} \tag{5.10}$$

其中

$$\Psi^{(s)}_1=D^{(s)}_1 r^{\alpha_s-1}-D^{(s)}_2 r^{-\alpha_s-1},\quad \Psi^{(s)}_2=D^{(s)}_1 r^{\alpha_s-1}+D^{(s)}_2 r^{-\alpha_s-1} \tag{5.11}$$

比较(5.8)和(4.2)可知

$$
T'_s=\begin{bmatrix} \Psi_1^{(s)}\alpha_s\cos\theta & \Psi_1^{(s)}\alpha_s\sin\theta & 0 \\ -\Psi_2^{(s)}\sin\theta & \Psi_2^{(s)}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.12}
$$

将式(5.12)代入(4.6)，经适当运算后得到复合材料等效热导系数矩阵 K 的表达式为：

$$
K=\begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \tag{5.13}
$$

其中

$$
K_1=K_1^{(0)}+\frac{\sum\limits_{s=1}^{n+1}c_s\lambda_s}{c_0+\sum\limits_{s=1}^{n+1}c_s\delta_s},\quad K_3=\sum_{s=1}^{n+1}c_sK_z^{(s)} \tag{5.14}
$$

这里　δ_s和$\alpha_s\neq1$时λ_s的表达式由下式给出：

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda_s=&\frac{(R_s^{1+\alpha_s}-R_{s+1}^{1+\alpha_s})[\alpha_s(K_r^{(s)}-K_1^{(0)})+K_\theta^{(s)}-K_1^{(0)}]}{(R_s^2-R_{s+1}^2)(1+\alpha_s)}D_1^{(s)}\\
&-\frac{(R_s^{1-\alpha_s}-R_{s+1}^{1-\alpha_s})[\alpha_s(K_r^{(s)}-K_1^{(0)})-K_\theta^{(s)}+K_1^{(0)}]}{(R_s^2-R_{s+1}^2)(1-\alpha_s)}D_2^{(s)}\\
\delta_s=&\frac{R_s^{1+\alpha_s}-R_{s+1}^{1+\alpha_s}}{R_s^2-R_{s+1}^2}D_1^{(s)}+\frac{R_s^{1-\alpha_s}-R_{s+1}^{1-\alpha_s}}{R_s^2-R_{s+1}^2}D_2^{(s)}
\end{aligned}\right\} \tag{5.15}
$$

当$\alpha_s=1$时，λ_s则为

$$
\begin{aligned}
\lambda_s=&\frac{\alpha_s(K_r^{(s)}-K_1^{(1)})+K_\theta^{(s)}-K_1^{(0)}}{2}D_1^{(s)}\\
&-\frac{\alpha_s(K_r^{(s)}-K_1^{(0)})-K_\theta^{(s)}+K_1^{(0)}}{2}D_2^{(s)}\ln\frac{R_s}{R_{s+1}}
\end{aligned} \tag{5.16}
$$

六、结　束　语

本文将非均匀界面相模拟为逐层均匀的多层结构，并利用Mori-Tanaka平均场概念给出了含非均匀界面相碳/碳纤维复合材料等效热导系数和热阻系数矩阵的解析表达式。所得结果满足互为逆阵的一致性条件。通过适当选取多层界面结构的尺寸和材料性质，本文公式也可用于分析界面相缺陷对复合材料宏观热传导性质的影响。

参　考　文　献

[1] J. R. Willis, Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites, *J. Mech. Phys. Solids*, **25** (1977), 185.

[2] P. G. Klements, Thermal conductivity of inhomogeneous materials, *Int. J. Thermophysics*, **10** (1989), 1213.

[3] H. Hatta and M. Taya, Thermal conductivity of coatedfiller-composites, *J. Appl. Phys.*, **59** (1986), 1851.

[4] Y. Benveniste, et al., The effective thermal conductivity of composites rein-

forced by coated cylindrically orthotropic fibers, *J. Appl. Phys.*, 67 (1990), 2878.
[5] D. P. H. Hasselmann and L. F. Johnson, Effective thermal conductivity of composites with interfacial thermal barrier resistance, *J. Comp. Mat.*, 21 (1987), 508.
[6] D. P. H. Hasselmann, et al., Effective thermal conductivity of uniaxial composite with cylindrically orthotropic carbon fibers and interfacial thermal barrier, *J. Comp. Mat.*, 27 (1993), 637.
[7] M. J. Pindera, et al., Effects of fiber and interfacial layer morphologies on the thermoelastic response of metal matrix composites, *Int. J. Solids Struct.*, 30 (1993), 1213.
[8] K. Jayaraman and K. L. Reifsnider, Residual stresses in a composite with continously varying Young's modulus in the fiber/matrix interphase, *J. Comp. Mat.*, 26 (1992), 770.
[9] T. Mori and K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, 21 (1973), 571.
[10] Y. Benveniste, A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials, *Mech. Mater.*, 6 (1987), 147.

Investigation on the Effective Conductivities of Carbon/Carbon Fiber Composites with Inhomogeneous Interphase

He Linghui Cheng Zhenqiang

(University of Science and Technology of China, Hefei 230000, P. R. China)

Liu Renhuai

(Ji'nan University, Guangzhou 510632, P. R. China)

Abstract

Thermal conductivities of carbon/carbon fiber composites with inhomogeneous interphase are studied in this paper. The inhomogeneous interphase is modeled approximately as a multilayered structure consisting of many thin layers having homogeneous properties, and close-formed solution of the effective conductivities of the composites is obtained by using the Mori-Tanaka mean-field concept.

Key words composite, thermal conductivity, inhomogeneous interphase, Mori-Tanaka method