

一种裂纹梁振动响应分析的近似方法*

陈梦成¹ 汤任基¹

(1995年6月20日收到)

摘 要

本文以线弹簧模型为基础提出了一种近似分析裂纹梁振动响应的方法。把该方法同 Euler-Bernoulli 梁理论、模态分析方法以及断裂力学原理等结合起来运用, 导出裂纹梁振动的特征方程。作为应用实例, 本文考核了简支裂纹梁和悬臂裂纹梁的固有频率响应。结果表明, 本文所获得的解与现有文献中的解或实验结果取得很好的一致。

关键词 裂纹梁 线弹簧模型 固有频率响应

一、引 言

关于裂纹梁的动态响应研究, 已经有很多人作了这方面的工作。然而, 到目前为止, 就作者所知, 在他们的工作中, 以数值方法作为主要研究手段的文章居多, 而有关解析方法的论文则报道得非常少。概括起来, 在解析法中, 用得最多的模型就是把裂纹看作是一个扭转弹簧^[1-3], 然而这个模型有个缺点, 即它只能适用于研究受纯弯曲的裂纹梁。所以, 以前的研究局限于悬臂梁和两端自由梁等这样一些可产生纯弯的裂纹梁, 但对于有耦合工况的梁, 比如简支梁, 它既承受弯矩又承受剪力, 有时还可承受轴力, 此时, 这个模型就不适用。除上述方法外, 还有 Laplace 变换法^[4], 摄动法^[5]。然而, 这些方法应用起来既不简单又不实用。

本文使用断裂力学中常用的线弹簧模型来分析裂纹梁的振动响应。该模型最初是由 Rice 和 Levy^[6] 提出来的, 用于评价部分贯穿表面裂纹板在拉伸和弯矩载荷作用下的应力强度因子。为了简单起见, 在不计结构阻尼的情况下, 我们采用 Euler-Bernoulli 梁理论结合模态分析和断裂力学原理来推导裂纹梁振动的特征方程。然后使用 Newton-Raphson 方法求解这个方程, 从而确定固有频率。为了验证本文的方法, 将给出两个应用实例。

二、分析原理

2.1 修正的线弹簧模型

为了研究裂纹梁的横向振动(见图1(a)), 原有的 Rice-Levy 线弹簧模型需要作一些

1 上海交通大学工程力学系, 上海 200030.

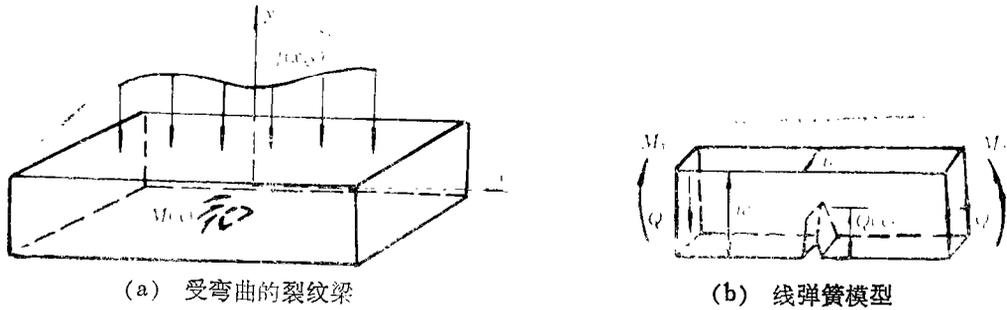


图1 修正的线弹簧模型构成

修正。图1(b)描绘了修正后的线弹簧模型及作用在其上力和力的方向。

由于线弹簧模型只反映裂纹处韧带的效应，放片没有质量和长度，因而其两端的 x 坐标也就相同。线弹簧上的静力平衡条件为，

$$M_1 = M_2 = M \quad (2.1)$$

$$Q_1 = Q_2 = Q \quad (2.2)$$

因为在零长度的线弹簧模型中剪力 Q 与 M 并不产生交互作用，由此，线弹簧模型上力与变形的关系，根据Hooke定律，表为，

$$\Delta\theta = \lambda_{mm} M \quad (2.3)$$

$$\Delta y = \lambda_{qq} Q \quad (2.4)$$

其中 $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ ， $\Delta y = y_2 - y_1$ ； θ_2 ， θ_1 和 y_2 ， y_1 是线弹簧两侧的广义位移； λ_{mm} 和 λ_{qq} 是分别相应于弯矩 M 和剪力 Q 的柔度系数。基于能量释放率 G 和应力强度因子的关系，有

$$G_M = \frac{K_{IM}^2}{E} = \frac{M^2}{2b} \frac{d\lambda_{mm}}{da} \quad (2.5)$$

$$G_Q = \frac{K_{IQ}^2}{E} = \frac{Q^2}{2b} \frac{d\lambda_{qq}}{da} \quad (2.6)$$

对(2.5)式和(2.6)式两边分别进行积分，得

$$\lambda_{mm} = \frac{2b}{E} \int_0^a \left(\frac{K_{IM}}{M} \right)^2 da \quad (2.7)$$

$$\lambda_{qq} = \frac{2b}{E} \int_0^a \left(\frac{K_{IQ}}{Q} \right)^2 da \quad (2.8)$$

这里 E 为Young模量； b 为裂纹梁厚度； a 为裂纹长度； K_{IM} 和 K_{IQ} 分别是由弯矩 M 引起的 I 型应力强度因子和剪力 Q 产生的 II 型应力强度因子，它们是，

$$K_{IM} = \frac{bM}{w^2} \sqrt{\pi a} F_M(\xi) \quad (2.9)$$

$$F_M(\xi) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi\xi}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \left\{ \begin{array}{l} 0.923 + 0.199 \left[1 - \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \right]^4 \\ \cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \end{array} \right\}}$$

$$K_{IQ} = \frac{Q}{b\sqrt{w-a}} F_Q(\xi) \quad (2.10)$$

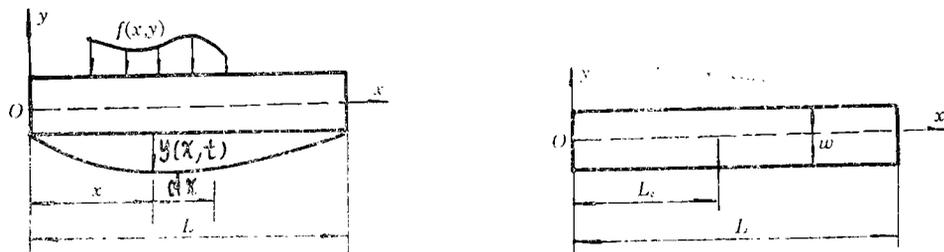
$$F_Q(\xi) = 1.993\xi + 4.513\xi^2 - 9.516\xi^3 + 4.482\xi^4$$

其中 $\xi = a/w$ 为无量纲裂纹长； w 是裂纹梁宽度。式(2.9)由Tada等人⁽⁷⁾给出，而式(2.10)

由Tharp^[8]获得。

2.2 裂纹梁振型

现在让我们来研究一自由梁的振动，如图2(a)所示



(a) 受弯的梁自由体

(b) 自由梁裂纹梁

图2 自由梁示意图

根据Euler-Bernoulli梁的初等理论，在没有外力($f(x, y) = 0$)的作用下，梁作自由振动的运动控制方程为

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.11)$$

其中 EI 为梁的抗弯刚度； ρ 是梁的质量密度以及 A 为梁的横截面面积。根据模态分析和规则，式(2.11)的解如下：

$$y(x, t) = \sum_{n=1} Y_n(x) \exp(i\omega_n t) \quad (2.12)$$

这里 $Y_n(x)$ 为梁的第 n 个振型； ω_n 为梁的第 n 个固有圆频率； x 为沿梁轴线的坐标。把(2.12)式代入(2.11)式，得

$$\frac{d^4 Y_n(x)}{dx^4} - \lambda_n^4 Y_n(x) = 0 \quad (2.13)$$

其中

$$\lambda_n^4 = \frac{\rho A \omega_n^2}{EI} \quad (2.14)$$

方程(2.13)的通解为

$$Y_n(x) = A_n \cosh(\lambda_n L \beta) + B_n \sinh(\lambda_n L \beta) + C_n \cos(\lambda_n L \beta) + D_n \sin(\lambda_n L \beta) \quad (2.15)$$

这里 A_n, B_n, C_n 和 D_n 为由边界条件确定的常数； $\beta = x/L$ ， L 为梁的长度。由于裂纹处的线弹簧模型把原裂纹梁分割而成两根较短的梁，因此，相应于每根较短梁的振型，则由(2.15)式可分别表为

$$Y_{n1}(x) = A_{n1} \cosh(\lambda_n L \beta) + B_{n1} \sinh(\lambda_n L \beta) + C_{n1} \cos(\lambda_n L \beta) + D_{n1} \sin(\lambda_n L \beta) \quad (0 \leq \beta \leq L_c/L) \quad (2.16)$$

$$Y_{n2}(x) = A_{n2} \cosh(\lambda_n L \beta) + B_{n2} \sinh(\lambda_n L \beta) + C_{n2} \cos(\lambda_n L \beta) + D_{n2} \sin(\lambda_n L \beta) \quad (L_c/L \leq \beta < 1) \quad (2.17)$$

其中 常数 A_{ni}, B_{ni}, C_{ni} 和 D_{ni} ($i=1, 2$) 由边界条件确定，而 L_c 为裂纹沿梁所在的位置，如图2(b)所示。

三、裂纹梁的应用举例

为了验证上节所描述的原理的有效性,下面给出两个算例。一个是关于简支裂纹梁的,另一个是关于悬臂裂纹梁的,如图3所示。本文结果将与现有解答或实验数据作一比较。

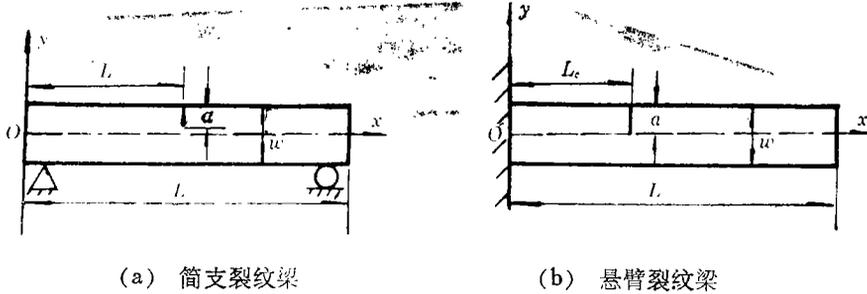


图3 两种裂纹梁

3.1 简支裂纹梁

Nash^[4]研究了裂纹在跨中时的简支梁的动态响应。他用Laplace变换法结合模态分析导出了简支裂纹梁振动的特征方程。然而,在他的模型中,要求裂纹具有一定的宽度,而且不能得到反对称振型。

使用本文前节给出的方法,简支裂纹梁的端部边界条件(见图3(a))为

$$Y_{n1}(x)=0, \quad Y_{n1}''(x)=0 \quad (\text{当}\beta=0)$$
 (3.1)

$$Y_{n2}(x)=0, \quad Y_{n2}''(x)=0 \quad (\text{当}\beta=1)$$
 (3.2)

其中撇表示 Y 对 x 的导数。下同。

把(2.16)式和(2.17)式代入式(3.1)和(3.2),则线性齐次方程组的系数矩阵为

$$[A_1]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
 (3.3)

$$[A_2]=\begin{bmatrix} \cosh(\lambda_n L) & \sinh(\lambda_n L) & \cos(\lambda_n L) & \sin(\lambda_n L) \\ \cosh(\lambda_n L) & \sinh(\lambda_n L) & -\cos(\lambda_n L) & -\sin(\lambda_n L) \end{bmatrix}$$
 (3.4)

再利用裂纹处的线弹簧联结条件式(2.1)、(2.2)和(2.3)、(2.4),则一般解 $Y(x)$ 应满足

$$Y_{n1}''(x)=Y_{n2}''(x), \quad Y_{n1}'''(x)=Y_{n2}'''(x) \quad (\text{当}\beta=L_c/L)$$
 (3.5)

和

$$Y_{n2}'(x)-Y_{n1}'(x)=\lambda_{mm}EIY_{n1}''(x), \quad Y_{n2}(x)-Y_{n1}(x)-\lambda_{qq}EIY_{n1}'''(x) \quad (\text{当}\beta=L_c/L)$$
 (3.6)

将一般解(2.16)和(2.17)代入上式(3.5)和(3.6)则得到线性齐次方程组的系数矩阵为

$$[A_3]=\{\lambda_{mm}EI[U_1]+\lambda_{qq}EI\lambda_n^2[U_2]\}\lambda_n+[A_4]$$
 (3.7)

其中

$$[U_1]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cosh(\lambda_n L_c) & \sinh(\lambda_n L_c) & -\cos(\lambda_n L_c) & -\sin(\lambda_n L_c) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 (3.8)

$$[U_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sinh(\lambda_n L_c) & \cosh(\lambda_n L_c) & \sin(\lambda_n L_c) & -\cos(\lambda_n L_c) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$[A_4] = \begin{bmatrix} \cosh(\lambda_n L_c) & \sinh(\lambda_n L_c) & -\cos(\lambda_n L_c) & -\sin(\lambda_n L_c) \\ \sinh(\lambda_n L_c) & \cosh(\lambda_n L_c) & \sin(\lambda_n L_c) & -\cos(\lambda_n L_c) \\ \sinh(\lambda_n L_c) & \cosh(\lambda_n L_c) & -\sin(\lambda_n L_c) & \cos(\lambda_n L_c) \\ \cosh(\lambda_n L_c) & \sinh(\lambda_n L_c) & \cos(\lambda_n L_c) & \sin(\lambda_n L_c) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

因此，裂纹梁振动的特征方程可用下面行列式表示：

$$|A| = \begin{vmatrix} [A_1] & 0 \\ [A_2] & -[A_4] \\ 0 & [A_2] \end{vmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

或简写为 $\det A = 0$ (3.12)

行列式 A 是 8×8 的方阵，式 (3.12) 的特征值可以通过 Newton-Raphson 方法而求得。由方程 (3.12) 所得的、带有跨中 ($\beta = 1/2$) 裂纹的简支梁对应于不同裂纹长的第一固有圆频率列于表 1，同时表 1 还给出了 Nash^[4] 的结果，可以看出，两者吻合得很好。另外，表 1 也说明，裂纹越长，振动固有圆频率的减少就越多，这从物理意义上来讲，也是符合逻辑的。

表 1 第一固有圆频率 (ω_{1c}/ω_{10}) 比较

方 法	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
本文方法	0.9767	0.9183	0.8364	0.7373	0.6261
Nash's 法 ^[4]	0.975	0.912	0.830	0.728	0.623

注 ω_{1c} 是由方程 (3.12) 确定的简支裂纹梁振动的第一固有圆频率；
 ω_{10} 为相应于无裂纹简支梁振动的第一固有圆频率。

3.2 悬臂裂纹梁

关于悬臂裂纹梁的动态响应问题，已经有很多人作了研究，其中最为系统的工作之一，要首推 Gudmundson^[5] 的工作。他从理论和实验两个方面，全面地考察了不同裂纹长度和不同裂纹位置对悬臂梁固有频率的影响。作为考核例，本文只引证了 Gudmundson 的一些结果。

仿前面 3.1 节，相应于悬臂裂纹梁的端部边界条件（见图 3(b)）为

$$Y_{n1}(x) = 0, \quad Y'_{n1}(x) = 0 \quad (\text{当 } \beta = 0) \quad (3.13)$$

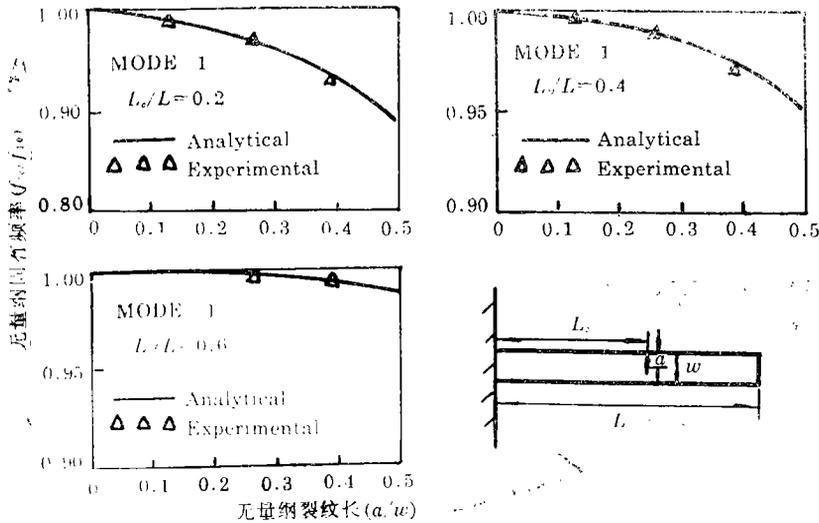
$$Y_{n2}(x) = 0, \quad Y''_{n2}(x) = 0 \quad (\text{当 } \beta = 1) \quad (3.14)$$

把 (2.16) 和 (2.17) 式代入上面 (3.13) 和 (3.14) 式，则相应线性齐次方程组的系数矩阵是

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} \cosh(\lambda_n L) & \sinh(\lambda_n L) & -\cos(\lambda_n L) & -\sin(\lambda_n L) \\ \sinh(\lambda_n L) & \cosh(\lambda_n L) & \sin(\lambda_n L) & -\cos(\lambda_n L) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

至于悬臂裂纹梁在裂纹处的线弹簧联结条件和相应的系数矩阵, 则分别和简支裂纹梁的(3.5)~(3.10)式相同, 这里不再重复列出。把式(3.7)、(3.10)、(3.15)和(3.16)代入(3.11)式, 我们同样可得到悬臂裂纹梁振动的特征方程。然后解这个方程, 就得到悬臂裂纹梁振动的特征值, 从而确定其固有频率。对应于各种裂纹长度和裂纹位置时的第一固有频率描绘于图4(实线), 同时, 图4还绘出了Gudmundson^[5]的结果(三角形)。



f_{1c} 为悬臂裂纹梁的第一固有频率; f_{10} 为无裂纹悬臂梁的第一固有频率。

图4 不同裂纹长度和裂纹位置时悬臂裂纹梁的第一固有频率比较

从图中可看出, 本文的结果与Gudmundson的实验结果取得很好一致; 随着裂纹位置与悬臂裂纹梁固定端之间的距离增加, 裂纹对固有频率的影响减弱。

四、结 束 语

本文利用线弹簧模型提出了一种裂纹梁振动响应分析的近似方法, 经与现有解和实验结果考核, 证明了本文提出的方法是可行的。另外, 本文虽然只讨论了单根裂纹, 但实际上, 对于多根裂纹, 只要他们彼此不产生交互影响, 本文的方法仍然是适用的。

参 考 文 献

- [1] I. G. Chondros and A. D. Dimarogonas, Identification of cracks in welded joints of complex structures, *J. Sound & Vib.*, **69** (1980), 531—538.
- [2] 沈亚鹏、唐照干, 裂纹对悬臂板频谱的影响, *固体力学学报*, **3** (1982), 247—251.
- [3] P. F. Rizos, N. Aspragathos and A. D. Dimarogonas, Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes, *J. Sound & Vib.*, **138** (1990), 381—388.
- [4] G. E. Nash, Bending deflections and moments in a notched beam, *Engng. Fract. Mech.*, **3** (1971), 139—150.
- [5] P. Gudmundson, Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes, *J. Mech. Phys. Solids*, **30** (1982), 339—353.

- [6] J. R. Rice and N. Levy, The part-through surface crack in an elastic plate, *J. Appl. Mech.*, **39** (1972), 185—194.
- [7] H. Tada, P. C. Paris and G. R. Irwin, *The Stress Analysis of Crack Handbook*, Del Research Corp., Hellerton, PA (1973).
- [8] T. M. Tharp, A finite element for edge-crack beam columns, *Int. J. Numer. Methods Engng.*, **24** (1987), 1941—1950.

An Approximate Method of Response Analysis of Vibrations for Cracked Beams

Chen Mengcheng Tang Renji

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P. R. China)

Abstract

In this paper a method based on a line-spring model was proposed to analyze approximately vibration responses of cracked beams. The method in conjunction with the Euler-Bernoulli beam theory, modal analysis and fracture mechanics principle was applied to derive a characteristic equation for the cracked beam vibration. As application examples, natural frequency responses for a cracked hinged beam and a cracked cantilever beam were examined. It is shown that the present solutions obtained are in quite an agreement with the solutions or experimental results in available references.

Key words cracked beam, line-spring model, response of natural frequency