应用数学和力学，第18卷 第3期（1997年3月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

粘弹性薄板动力响应的边界元方法（Ⅰ）*

丁　睿[1]　朱正佑[1,2]　程昌钧[1,2]

（1996年1月15日收到）

摘　要

本文中我们给出了粘弹性薄板动力响应的边界元方法．在Laplace 变换区域中，给出了基本解的两种近似方法，运用这些近似基本解建立了边界元方法，再利用改进的 Bellman 反变换技术，求得问题的解，计算表明该方法具有较高精度和较快收敛性．

关键词　动力响应　粘弹性　边界元法

一、引　　言

粘弹性结构的动力响应是固体力学中重要的研究方向之一．由于粘弹性材料本构关系的复杂性，其动力响应问题的求解是十分困难的，通常是采用有限元，差分法等数值方法求解．边界元方法是近年来发展起来的一种有效的数值方法．边界元法将问题简化到边界上来讨论，这与有限元相比则具有明显的优越性．目前，许多学者对于弹、塑性静力问题的边界元方法进行了大量的讨论，而结构动力问题的边界元方法就比较困难了，其主要困难在于含有时间项的基本解或是经过Laplace变换后方程的基本解很难求得．对于粘弹性结构，则问题就变得更复杂．粘弹性结构动力响应问题边界元方法的处理一般是先利用Laplace变换将原问题变换到拉氏空间中讨论，得到粘弹性结构动力问题的基本方程，再利用边界元法求得拉氏空间中基本方程的解，最后进行Laplace逆变换或数值Laplace逆变换，得到原问题的解．为使这种方法实际可行必须要给出一个便于计算的基本解以及一种便于实施数值 Laplace逆变换的有效方法．文[1]中讨论了粘弹性结构动力响应的边界元法，文中边界元法的基本解是由几个第二类n阶Bessel 函数组成的．这种基本解的形式异常复杂，不便于计算，尤其在实施Durbin 数值逆变换时就显得更加困难．为了克服基本解的计算及求解困难，本文中我们采用了近似基本解，避免了上述诸多麻烦．数值拉氏逆变换在动力粘弹性问题中是至关重要的．目前数值拉氏变换主要有Durbin反变换技术[5]，Miller的数值逆变换[6]等，但这些方法并不适合我们的问题．这里我们给出了一种改进的 Bellman 反变换技术，使得数值拉氏变换更易实现．全文结构如下，第二节中提出了粘弹性薄板动力响应在拉氏空间中

* 国家教委博士点基金资助项目．

1 兰州大学力学系，兰州 730000．

2 上海市应用数学和力学研究所，上海　200072．

的基本方程，并建立了相应的边界积分方程．第三节中给出了双三角级数形式的近似基本解以及修正的近似基本解．第四节中讨论了改进的 Bellman 逆变换技术．第五节中给出了数值算例及结语．

二、粘弹性薄板动力响应的边界积分方程

粘弹性薄板动力问题在拉氏空间中的方程为[3]：

$$s\bar{D}\nabla^4\bar{W}+\rho hs^2\bar{W}=\bar{q} \tag{2.1}$$

其中 W，h分别为板的挠度和厚度，$q(x, y, t)$是板受的横向载荷；$\bar{W}$和$\bar{q}$分别为W和q的拉氏变换值．s为变换参量

$$\left.\begin{aligned}&\bar{D}=\bar{E}h^3/12(1-s^2\bar{\mu}^2),\quad \bar{E}=9\bar{G}\bar{K}/(3\bar{K}+\bar{G})\\&s\bar{\mu}=(3\bar{K}-2\bar{G})/2(3\bar{K}+\bar{G})\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

其中 $G(t)$和$K(t)$分别表示材料的剪切松弛函数和体积松弛函数．

令$\bar{W}^*(P, Q, s)$为(2.1)的基本解，它满足方程

$$s\bar{D}\nabla^4\bar{W}^*+\rho hs^2\bar{W}^*=\delta(P-Q) \tag{2.3}$$

其中 P，Q点坐标分别为(x, y)，(ξ, η)．应用Green 公式，可导出如下边界积分方程：

$$\begin{aligned}C_m\bar{W}(P')=&\iint_\Omega\bar{q}(Q)\bar{W}^*(P', Q)d\Omega+\int_\Gamma\Big[\bar{R}_n(Q')\bar{W}^*(P', Q')\\&-\bar{M}_n(Q')\frac{\partial\bar{W}^*(P',Q')}{\partial n(Q')}+\bar{M}_n^*(P', Q')\frac{\partial\bar{W}(Q')}{\partial n(Q')}-\bar{W}(Q')\bar{R}_n^*(P',Q')\Big]d\Gamma(Q')\\&+\sum_{i=1}^{m}\left([\bar{M}_{n,t}\cdot\bar{W}^*]_{\lambda_i}-[\bar{M}_{n,t}^*\cdot\bar{W}]_{\lambda_i}\right)\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}C_m\frac{\partial\bar{W}(P')}{\partial n(P')}=&\iint_\Omega\bar{q}(Q)\frac{\partial\bar{W}^*(P',Q)}{\partial n(P')}d\Omega+\int_\Gamma\Big[\bar{R}_n(Q')\frac{\partial\bar{W}^*(P',Q')}{\partial n(P')}-\bar{M}_n(Q')\\&\cdot\frac{\partial^2\bar{W}^*(P',Q')}{\partial n(P')\partial n(Q')}+\frac{\partial\bar{M}_n^*(P',Q')}{\partial n(P')}\cdot\frac{\partial\bar{W}(Q')}{\partial n(Q')}-\bar{W}(Q')\frac{\partial\bar{R}_n^*(P',Q')}{\partial n(P')}\Big]d\Gamma(Q')\\&+\sum_{i=1}^{m}\left(\left[\bar{M}_{n,t}\cdot\frac{\partial\bar{W}^*}{\partial n(P')}\right]_{\lambda_i}-\left[\frac{\partial\bar{M}_{n,t}^*}{\partial n(P')}\cdot\bar{W}\right]_{\lambda_i}\right)\end{aligned} \tag{2.5}$$

式中 M_n，R_n分别为弯矩、剪力，$M_{n,t}=\partial M_n/\partial t$，$M_{n,t}^*=\partial M_n^*/\partial t$，$n$ 为边界法向，t 为边界切向．$[\varphi]_{\lambda_i}$ $(i=1, 2, \cdots, m)$表示φ在角点λ_i的跳跃值．

$$C_m=\begin{cases}1 & (\forall P'\in\Omega)\\ \theta_m/2\pi & (\forall P'\in\Gamma)\\ 0 & (\forall P'\notin\Omega及P'\notin\Gamma)\end{cases} \tag{2.6}$$

m为边界上角点数．一旦边界值求得就可利用内部积分公式求得任一点的值[8]．

三、近似基本解

为了计算方便起见，本文中我们采用两种近似基本解（即(3.1)中的解$\bar{W}_1^*$和(3.2)中的

解$\overline{W}_2^*$)来逼近基本解$\overline{W}^*$[9]. 不失一般性，设薄板为$[-\pi,\ \pi]\times[-\pi,\ \pi]$的方板，把基本解(3.1)和(3.2)分别代入方程(2.3)中，利用三角级数的正交性来确定系数，则可以计算出如下两种形式的近似基本解.

(i) 双三角形式的近似基本解

$$W_1^*(P,\ Q)=\frac{1}{4\pi\overline{m}}+\frac{1}{2\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos m(\xi-x)}{(s\overline{D}m^4+\overline{m})}+\frac{1}{2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\eta-y)}{(s\overline{D}n^4+\overline{m})}$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos m(\xi-x)\cos n(\eta-y)}{[s\overline{D}(m^2+n^2)^2+\overline{m}]}\tag{3.1}$$

(ii) 修正的近似基本解

$$W_2^*(P,\ Q)=W_3^*(P,\ Q)+W_4^*(P,\ Q)\tag{3.2}$$

其中 W_3^*为方程$\overline{D}\nabla^4W=0$的基本解，即

$$W_3^*(P,\ Q)=(1/8\pi D)r^2\ln r,\quad r=|P-Q|=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

$W_4^*(P,\ Q)$为级数形式的修正部分，其形式为:

$$W_4^*(P,\ Q)=\frac{1-s-d_0}{4\pi^2\overline{m}}+\sum_{m=1}^{\infty}[(1-s)\cos m(\xi-x)-(d_m^{(1)}\sin mx$$

$$+d_m^{(2)}\cdot\cos mx)]/2\pi^3[s\overline{D}m^4+\overline{m}]+\sum_{n=1}^{\infty}[(1-s)\cos n(\eta-x)-(d_n^{(1)}\cdot\sin ny$$

$$+d_n^{(2)}\cos ny)]/2\pi^3[s\overline{D}n^4+\overline{m}]+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[(1-s)\cos m(\xi-x)\cos n(\eta-y)$$

$$-(d_{mn}^{(1)}\sin mx\cdot\sin ny+d_{mn}^{(2)}\sin mx\cos ny+d_{mn}^{(3)}\cos mx\cdot\sin ny$$

$$+d_{mn}^{(4)}\cos mx\cdot\cos ny)]/\pi^2[s\overline{D}(m^2+n^2)^2+\overline{m}]\tag{3.3}$$

其中

$$\overline{m}=\rho hs^2,\quad L=\frac{\overline{m}}{8\pi\overline{D}},\quad d_0=L\iint_\Omega r^2\ln r\,dxdy,$$

$$d_m^{(1)}=L\iint_\Omega r^2\ln r\cdot\sin mx\,dxdy,\quad d_m^{(2)}=L\iint_\Omega r^2\ln r\cos mx\,dxdy,$$

$$d_n^{(1)}=L\iint_\Omega r^2\ln r\sin ny\,dxdy,\qquad d_n^{(2)}=L\iint_\Omega r^2\ln r\cos ny\,dxdy,$$

$$d_{mn}^{(1)}=L\iint_\Omega r^2\ln r\sin mx\sin ny\,dxdy,\ d_{mn}^{(2)}=L\iint_\Omega r^2\ln r\sin mx\cos ny\,dxdy,$$

$$d_{mn}^{(3)}=L\iint_\Omega r^2\ln r\cos mx\cdot\sin ny\,dxdy,\ d_{mn}^{(4)}=L\iint_\Omega r^2\ln r\cos mx\cos ny\,dxdy.$$

这里 $\Omega:=[-\pi,\ \pi]\times[-\pi,\ \pi]$.

将$W_1^*(W_2^*)$代入边界积分方程(2.4)、(2.5)，并利用常数单元离散方程，若$\overline{W}$, $\partial\overline{W}/\partial n$, $\overline{M}_n$和$\overline{R}_n$中两个已知，两个未知，则可由此离散边界积分方程求得未知边界量，再利用离散积分方程可以计算出某一固定s值时板中任意点的挠度值$\overline{W}(x,\ y,\ s)$.

四、数值逆变换

第三节中利用边界元方法得到了原方程在Laplace区域中的解．为了求得时间区域内的解，必须应用有效的Laplace逆变换．这里我们采用如下Bellman反变换技术[7]．

设$\bar{f}(s)$为$f(t)$ 的拉氏变换，即

$$\bar{f}(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{4.1}$$

引入变换$x=e^{-t}$，则(4.1)式变为

$$\bar{f}(s)=\int_0^1 X^{s-1}f(-\ln X)dX \tag{4.2}$$

对(4.2)式，采用Gauss-Legendre数值积分公式，有

$$\bar{f}(s)=\sum_{i=1}^{n} W_i X_i^{s-1} f(-\ln X_i) \tag{4.3}$$

其中 W_i为权函数，X_i为n阶Legendre多项式的根．分别取$s_j=j+1$；$j=1$，2，…，n，代入(4.3)式，联立可求得：

$$f(-\ln X_i)=\sum_{j=1}^{n} C_n(i,\ j)\bar{f}(s_j) \tag{4.4}$$

其中 $C_n(i,\ j)$的数值见[7]．

一旦X_i给定由(4.4)可计算出$t_i=-\ln X_i$时的$f(t_i)$的值．为了能求出任一时刻 f 的值，我们采用如下技巧：由$\mathscr{L}[f(ct)]=(1/c)\bar{f}(s/c)$，其中$c$为任意常数，则(4.4)式变为：

$$f(-c\ln X_i)=\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} C_n^*(i,\ j)\bar{f}\left(\frac{\hat{s}_j}{c}\right) \tag{4.5}$$

其中 $\hat{s}_j=C(j+1)$，$C_n^*(i,j)$可由类似(4.4)中$C_n(i,j)$的计算得到．此时，通过调节c的值，即可计算出所需时间的f值，我们称(4.5)为改进的Bellman反变换公式．

五、数值算例和结语

为了便于核验两种近似基本解以及改进的 Bellman 反变换的正确性，我们将原问题退化为弹性薄板的动力响应问题．

算例1 设简支方板的动力载荷为 $q=q_0\cos\omega t$， 其中 $q_0=9.8\times10^4\text{N/m}^2$，$\omega=1.5$，板的尺寸为$1\text{m}\times1\text{m}\times0.01\text{m}$，$\rho=8.9\times10^6\text{kg/m}^3$，$E=2\times10^{11}\text{kg/m}^3$，$\mu=0.3$，双三角级数形式的近似基本解中项数为$25\times25$($m=n=25$)，修正近似基本解中项数为$15\times15$($m=n=15$)，边界被划分为12个单元，则原问题经Laplace变换后，板中点的挠度值见表1，而原问题中板中心挠度值见表2．

从表1中可看出采用修正形式的基本解得到的结果是比较理想的．从表1和表 2 中可看到采用8点Bellman反变换方法即可得到比较满意的结果．

算例2 设薄板材料呈标准线性固体的剪切与体积变形，即[3]

表 1　拉氏空间中板中心点的挠度值($\times 10^{-4}$)

s	1	2	3	4
(双三角)$\overline{W}$	5.4414840503	5.4678126800	3.9885647020	3.3128875701
(修　正)$\overline{W}$	5.0791690684	5.1330503011	4.0848440445	3.1577130013
理　论　值	5.0775998270	5.1314181148	4.0834580610	3.1565945217
s	5	6	7	8
(双三角)$\overline{W}$	2.2541158946	2.7024161959	1.2541158946	1.6212769861
(修　正)$\overline{W}$	2.4551429810	1.9301422197	1.5341463825	1.2317618857
理　论　值	2.4542126253	1.9293434646	1.5334510047	1.2311482326

表 2　板中点处不同时刻的挠度值($\times 10^{-4}$)

t	0.5247262	0.2708037	0.1072142	1
x	0.5917173	0.1627662	0.8983332	$c=1.9057555$*
(双三角)$\overline{W}$	1.6708366562	37.975554911	8.0468341437	19.923697543
(修　正)$\overline{W}$	1.3998491862	31.610838602	9.2137149367	13.608177173
理　论　值	1.4744787777	32.105399955	9.1937096506	13.895545331

*：$t=-c\ln X$，这里$x=0.5917173$。

$$2G(t)=q_0+\left(\frac{q_1}{P_1}-q_0\right)\exp\left[-\frac{t}{P_1}\right],\quad 3K(t)=\frac{1+\mu_0}{1-2\mu_0}2G(t)$$

各参量取为：

$P_1=5\times10^{-2}$s，$q_0=3\times10^3$MPa，$q_1=5\times10^2$MPa·s，$\mu_0=0.3$，薄板为$[-\pi,\pi]_m\times[-\pi,\pi]_m$的方板，厚度为$h=0.01$m，$\rho=2.4\times10^3$kg/m^3，$q(x,y,t)=P_0H(t)$，$P_0=0.5$MPa，$H(t)$为Heaviside函数，板的周边自由。各边划分为 12 个单元，则不同时刻板中点的挠度见表3。

表 3　不同时刻板中点的挠度值

t	0.10721421	0.21080367	0.47826953
(修正)W	6.4878982333	6.90596032176	7.4764339074
t	0.52472626	0.89579543	1.4387094
(修正)W	7.6571918140	8.05074118857	8.5919364711

本文中提出了粘弹性结构动力问题的边界元方法。在Laplace变换区域中，给出了基本解的两种近似方法。利用改进的 Bellman 变换求得原问题的解。这套方法与现有方法相比较则由于采用了近似基本解，避免了计算及求逆变换时的困难。采用了改进的 Bellman 反变换技术，使得数值逆变换更易实现。文中的这种方法同样也可以处理更为复杂的动力问题，如粘弹性基支粘弹性板的动力问题等等。在下文中我们将给出采用近似基本解的粘弹性结构动力问题边界元方法的理论分析和误差估计。

参考文献

[1] 孙炳南等，二维粘弹性结构动力响应的边界元方法分析，上海力学，11(1) (1990)。

[2] 孙炳南等，多相粘弹性结构的动力响应边界元分析，计算结构力学及其应用，7(3) (1990)，19—21。

[3] 杨挺青等，粘弹性基支粘弹性板轴对称问题的动力响应，力学学报，22(2) (1990).

[4] 顾萍等，动力边界元法的正交多项式函数的近似基本解研究，计算结构力学及其应用，1(4) (1990).

[5] F. Durbin, Numerical Inversion of Laplace transform: An efficient improvement to dubher and abate's method, *The Computer Journal*, 17 (1974), 371—376.

[6] M. K. Miller and W. T. Guy, Numerical Inversion of the Laplace transform by use of Jacobi Polynomials, *SIAM L. Numer. Anal*, 3(4) (1966), 624—635.

[7] R. Bellman, R. E. Kalaba and J. Lockett, *Numerical Inversion of the Laplace Transform*, Amer. Elsevier Publ. Co., (1966).

[8] C. A. Brebbia, *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag (1984).

Boundary Element Method for Solving Dynamical Response of Viscoelastic Thin Plate (I)

Ding Rui

(*Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou* 730000, *P. R. China*)

Zhu Zhengyou Cheng Changjun

(*Lanzhou University, Lanzhou* 730000; *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai* 200072, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, a boundary element method for solving dynamical response of viscoelastic thin plate is given. In Laplace domain, we propose two methods to approximate the fundamental solution and develop the corresponding boundary element method. Then using the improved Bellman's numerical inversion of the Laplace transform, the solution of the original problem is obtained. The numerical results show that this method has higher accuracy and faster convergence.

Key words dynamic respones, viscoelasticity, BEM