应用数学和力学，第18卷 第3期（1997年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非线性弹性动力学解的存在性

郭 兴 明[1]

（钱伟长推荐，1995年11月10日收到）

摘 要

在小变形假定的前提下，本文证明具有一般非线性本构方程的弹性动力学系统在混合型边值约束下的解的存在性，同时在更弱的条件下可得到经典弹性动力学解的存在性。

关键词 非线性 本构方程 弹性动力学 存在性

一、引 言

经典弹性力学理论假定线性本构关系，此时系统的超势可看成一个正定或半正定型。在此假定下的弹性静、动力学系统的解的存在性、唯一性及相关性质的描述已有完整的结论[1,2,3]。但是如上的假定只是对小变形行为的一种近似刻划，更何况有许多材料在小变形假定下其本构关系呈非线性。有鉴于此，许多学者曾提出用次微分本构关系替代线性本构关系[4,5,6,7]。次微分本构关系的引入要求超势是凸函数。然而即使是这样一个问题其动力学问题是否可解至今没有答案[7,8]，更何况具有一般超势和非线性本构关系的弹性系统。本文便是在小变形假定下对超势满足一定条件下的具有一般非线性本构关系的弹性动力学系统给出其解的存在性。它包括次微分本构关系的情形。另外本文在更弱的条件下证明了经典弹性动力学解的存在性。

二、控制方程及其可解性定理

有界开集$\Omega\subset\mathbb{R}^3$是弹性体的参考构形，$\partial\Omega\in C^1,\partial\Omega=\Gamma=\Gamma_u\cup\Gamma_t,(\Gamma_u)^0\cap(\Gamma_t)^0=\phi$(先设$\mathrm{mes}\Gamma_t>0$)，$I=[0,\ T]$ ($T>0$)。取定位移空间$V=\{u\in(H^1(\Omega))^3|u|_{\Gamma_u}=0\}$ (若$\Gamma_u=\phi$，$V=(H^1(\Omega))^3$)；应变空间E，应力空间$S=\{v=\{v_{ij}\},\ i,\ j=1,\ 2,\ 3|\ v_{ij}=v_{ji},\ v_{ij}\in L^2(\Omega)\}$；力空间$F=F_1'\times F_2'$，$F_1=(H^1(\Omega))^3$，$F_2=(H^{1/2}(\Gamma_t))^3$，$F_1'$，$F_2'$分别是$F_1$，$F_2$在$(L^2(\Omega))^3$，$(L^2(\Gamma_t))^3$之内积意义下的共轭。

设$W:E\to\mathbb{R}$是弹性体超势，则动力学系统控制方程为：

---

1 上海大学，上海应用数学和力学研究所，上海 200072.

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{div}\sigma+f=\rho_0\ddot{u},\quad Au=\varepsilon\\ \sigma=W'(\varepsilon)\\ \sigma\cdot n|_{\Gamma_t}=f_0\quad(u\in V)\end{array}\right\}\tag{2.1}$$

其中 $A: V\to E$, $Au=\frac{1}{2}(\nabla u+u\nabla)$是小变形算子，它是线性有界的；$\rho_0$是质量密度，$\rho_0$: $\Omega\to R$是可测函数且$c_1>\rho_0>c_2>0$. 不影响以后的证明，设$\rho_0=1$.

定理1 设 i) f, $f'\in L^{p'}(I, F_1')$, f_0, $f_0'\in L^{p'}(I, F_2')$.

ii) $W(Au)+a_1|u|_H^p\geqslant c|u|_V^p+a_2$ (c, $a_1>0$, $a_2\in\mathbb{R}$, $1<p\leqslant 2$).

iii) W是G-可微的，且$W'(\cdot)$在E上连续，$\varepsilon_n\to\varepsilon$弱在$L^p(I, E)\Rightarrow W'(\varepsilon_n)\to W'(\varepsilon)$弱在$L^{p'}(I, S)$.

$$(H=(L^2(\Omega))^3,\ 1/p+1/p'=1)$$

则$\forall u_0\in V$, $u_1\in H$, 方程(2.1)有解且$u\in L^\infty(I, V)\cap C(I, H)$,

$$\dot{u}\in L^\infty(I, H)$$
$$\ddot{u}\in L^{p'}(I, V')$$

$$u(0)=u_0\ (\text{在}H)\qquad \dot{u}(0)=u_1\ (\text{在}V')$$

证明 显然$V\subset H\subset V'$, V是可分的且在H中稠密. 取$\{e_i\}_{i\in N}\subset V$, $\overline{\operatorname{span}\{e_i\}}=V$, $(e_i,e_j)_H=\delta_{ij}$. 记r: $H^1(\Omega)\to H^{1/2}(\partial\Omega)$是迹算子，它是线性，有界满的. $r_1\triangleq(r,r,r)$, $r_1u=(ru_1, ru_2, ru_3)$, $u=(u_1, u_2, u_3)\in V$, 它也是线性有界的. $\{r_1e_i\}_{i\in N}$是$r_1V\cong\{H^{1/2}(\Gamma_t)\}$的稠密集.

设 $x_n=\sum_{i=1}^n\eta_i^1e_i\to u_0$ (按V范数), $y_n=\sum_{i=1}^n\eta_i^2e_i\to u_1$ (按H范数). 考察方程组 (对给定的$n\in N$)

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{\xi}^n=F^n(\xi^n)+g^n\\ \xi^n|_{t=0}=\eta^{1n}\\ \dot{\xi}^n|_{t=0}=\eta^{2n}\end{array}\right\}\tag{2.2}$$

其中 $F^n=\{F_i^n\}_{1\times n}$, $F_i^n=-\langle W'(\xi_j^nAe_j), Ae_i\rangle_{SE}$, $\xi^n=\{\xi_i^n\}_{1\times n}$, $\eta^{1n}=\{\eta_i^1\}_{1\times n}$, $\eta^{2n}=\{\eta_i^2\}_{1\times n}$, $g^n=\{\langle f, e_i\rangle_{V'V}+\langle f_0, r_1e_i\rangle_{\Gamma_t}\}_{1\times n}$, $\langle f_0, r_1e_i\rangle_{\Gamma_t}=\langle f_0, re_i\rangle_{F_2'F_2}$. 由于$W'(\cdot)$是连续的，$F^n$是连续的. 所以存在$0<T_n\leqslant T$, 方程(2.2)在$I_n\triangleq[0, T_n]$上有解.

现在证明$I_n=I(\forall n)$. 令$\varphi^n=\sum_{i=1}^n\xi_j^ne_j$, φ^n满足

$$\langle\ddot{\varphi}^n, e_i\rangle_{V'V}=-\langle W'(A\varphi^n), Ae_i\rangle_{SE}+\langle f, e_i\rangle_{V'V}+\langle f_0, r_1e_i\rangle_{\Gamma_t}\tag{2.3}$$

$$(i=1, 2, \cdots, n)$$

两边同乘$\dot{\xi}_i^n$并相加 (注意到A, r_1均是线性的)，则有

$$\langle\ddot{\varphi}^n, \dot{\varphi}^n\rangle_{V'V}=\langle W'(A\varphi^n), A\dot{\varphi}^n\rangle_{SE}+\langle f, \dot{\varphi}^n\rangle_{V'V}+\langle f_0, r_1\dot{\varphi}^n\rangle_{\Gamma t}$$

积分上式得

$$\frac{1}{2}|\dot{\varphi}^n|_H^2+W(A\varphi^n)=W(Ax_n)+\frac{1}{2}|y_n|_H^2+\int_0^t\langle f,\dot{\varphi}^n\rangle_{V'V}+\int_0^t\langle f_0,r_1\dot{\varphi}^n\rangle_{\Gamma_t}\tag{2.4}$$

因为W在Au_0连续，从而局部有界，而$Ax_n\to Au_0$ (按E范数). 所以存在着正常数C_1, 使$W(Ax_n)+1/2|y_n|_H^2\leqslant C_1$. 设$C_2>0$, $|f(t)|_{V'}\leqslant C_2$, $|f_0(t)|_{F_2'}\leqslant C_2$, $|r_1\varphi^n(0)|_{F_2}=|r_1x_n|_{F_2}$

$\leqslant|r_1|\cdot|x_n|_V$，$|r_1|$是线性算子$r_1$的模。

$$\varphi^n(t)=\varphi^n(0)+\int_0^t\dot{\varphi}^n d\tau,\quad |\varphi^n(t)|_H^p\leqslant C_3+C_4\int_0^t|\dot{\varphi}^n|_H^p d\tau \qquad (C_3,\ C_4>0)$$

结合假设ii)，从(2.4)可进一步得到

$$C|\varphi^n|_V^p+\frac{1}{2}|\dot{\varphi}^n|_H^2\leqslant C_1+\alpha_1|\varphi^n|_H^p+\int_0^t\langle f,\dot{\varphi}^n\rangle_{V'V}+\int_0^t\langle f_0,r_1\dot{\varphi}^n\rangle_{\Gamma_t}-\alpha_2$$

$$=C_1-\alpha_2+\alpha_1|\varphi^n|_H^p+\langle f(t),\varphi^n(t)\rangle_{V'V}-\langle f(0),x_n\rangle_{V'V}-\int_t^0\langle f',\varphi^n\rangle_{V'V}d\tau$$

$$+\langle f_0(t),r_1\varphi^n(t)\rangle_{\Gamma_t}-\langle f_0(0),r_1x_n\rangle_{\Gamma_t}-\int_0^t\langle \dot{f}_0,r_1\varphi^n\rangle_{\Gamma_t}d\tau$$

$$\leqslant C_5+\alpha_1C_4\int_0^t|\dot{\varphi}^n|_H^p d\tau+\langle f(t),\varphi^n(t)\rangle_{V'V}+\langle f_0(t),r_1\varphi^n\rangle_{\Gamma_t}+\int_0^t\langle -f',\varphi^n\rangle_{V'V}d\tau$$

$$+\int_0^t\langle -f_0',r_1\varphi^n\rangle_{\Gamma_t}d\tau\leqslant C_5+\alpha_1C_4\int_0^t|\dot{\varphi}^n|_H^p d\tau+|f(t)|_{V'}|\varphi^n(t)|_V$$

$$+|f_0(t)|_{F_2'}|r_1\varphi^n(t)|_{F_2}+\int_0^t\langle -f',\varphi^n\rangle_{V'V}d\tau+\int_0^t\langle -f_0',r_1\varphi^n\rangle_{\Gamma_t}d\tau$$

$$(C_5>0) \qquad (2.5)$$

由Cauchy不等式

$$a\cdot b\leqslant\frac{\varepsilon^p}{p}|a|^p+\frac{\varepsilon^{-p'}}{p'}|b|^{p'} \qquad (a,\ b\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0)$$

$$|f(t)|_{V'}\cdot|\varphi^n(t)|_V\leqslant\frac{\varepsilon^p}{p}|\varphi^n(t)|_V^p+\frac{\varepsilon^{-p'}}{p'}|f(t)|_{V'}^{p'}\leqslant\frac{\varepsilon^p}{p}|\varphi^n(t)|_V^p+\frac{\varepsilon^{-p'}}{p'}C_2^{p'}$$

$$|f_0(t)|_{F_2'}\cdot|r_1\varphi^n|_{F_2}\leqslant\frac{\varepsilon^p}{p}|r_1\varphi^n|_{F_2}^p+\frac{\varepsilon^{-p'}}{p'}|f_0(t)|_{F_2'}^{p'}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon^p}{p}|r_1|^p\cdot|\varphi^n(t)|_V^p+\frac{\varepsilon^{-p'}}{p'}\cdot C_2^{p'}$$

取定ε足够小，使

$$\frac{\varepsilon^p}{p}+\frac{\varepsilon^p|r_1|^p}{p}\leqslant\frac{C}{2}$$

于是积分

$$\left|\int_0^t\langle -f',\varphi^n\rangle_{V'V}d\tau\right|\leqslant\left(\int_0^t|\varphi^n|_V^p d\tau\right)^{1/p}\cdot\left(\int_0^t|f'|_{V'}^{p'}d\tau\right)^{1/p'}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon_1^p}{p}\int_0^t|\varphi^n|_V^p d\tau+\frac{\varepsilon_1^{-p'}}{p'}\int_0^T|f'|_{V'}^{p'}d\tau$$

$$\left|\int_0^t\langle -f_0',r_1\varphi^n\rangle_{\Gamma_t}d\tau\right|\leqslant\left(\int_0^t|r_1\varphi^n|_{F_2}^p d\tau\right)^{1/p}\cdot\left(\int_0^t|f_0'|_{F_2'}^{p'}d\tau\right)^{1/p'}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon_1^p|r_1|^p}{p}\int_0^t|\varphi^n|_V^p d\tau+\frac{\varepsilon_1^{-p'}}{p'}\int_0^T|f_0'|_{F_2'}^{p'}d\tau$$

取定ε_1足够小，使

$$\varepsilon_1^p/p+\varepsilon_1^p|r_1|^p/p\leqslant 2C\alpha_1C_4$$

结合不等式(2.5)，又有

$$C|\varphi^n|_V^p+|\dot{\varphi}^n|_H^2\leqslant C_6+2\alpha_1C_4\int_0^t|\dot{\varphi}^n|_H^p d\tau+2\alpha_1C_4C\int_0^t|\varphi^n|_V^p d\tau$$

$$(C_6>0) \tag{2.6}$$

令

$$K(t)=C|\varphi^n|_V^p+|\dot{\varphi}^n(t)|_H^2$$

若$p=2$，上式(2.6)便是

$$K(t)\leqslant C_6+2\alpha_1C_4\int_0^t K(\tau)d\tau$$

从而

$$K(t)\leqslant C_6\exp[2\alpha_1C_4t] \tag{2.7}$$

若$1<p<2$，则

$$\int_0^t|\dot{\varphi}^n|_H^p d\tau\leqslant\left(\int_0^t|\dot{\varphi}^n|_H^2 d\tau\right)^{p/2}\cdot\left(\int_0^t 1d\tau\right)^{1/r'}$$

$$\leqslant(\varepsilon_2^r/r)\int_0^t|\dot{\varphi}^n|_H^2 d\tau+(\varepsilon_2^{-r'}/r')T$$

此处$r=2/p\geqslant1$，$1/r+1/r'=1$。取定ε_2足够小使得$\varepsilon_2^r/r\leqslant1$。于是由(2.6)有

$$K(t)\leqslant C_7+2\alpha_1C_4\int_0^t K(\tau)d\tau\qquad(C_7>0)$$

$$K(t)\leqslant C_7\exp[2\alpha C_4t] \tag{2.8}$$

由(2.7)，(2.8)可知$K(t)$总是满足：$K(t)\leqslant C_8$ $(C_8>0)$。其中$C_i(i=1,2,\cdots,8)$均是与n，T_n无关的常数。因此$I_n=I$，$\{\varphi^n\}$，$\{\dot{\varphi}^n\}$分别是$L^\infty(I,V)$，$L^\infty(I,H)$中的有界集。

从(2.3)，$\forall\eta\in\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_n\}$

$$|\langle\ddot{\varphi}^n,\eta\rangle_{V'V}|\leqslant|\langle W'(A\varphi^n),A\eta\rangle_{V'V}|+|\langle f,\eta\rangle_{V'V}+\langle f_0,r_1\eta\rangle_{\Gamma_t}|$$

$$\leqslant|W'(A\varphi^n)|_S\cdot|A|\cdot|\eta|_V+|f|_{V'}\cdot|\eta|_V+|f_0|_{F_2'}\cdot|r_1|\cdot|\eta|_V$$

其中 $|A|$是线性有界算子A的模（易见$|A|\leqslant1$）

$$|\ddot{\varphi}^n|_{V'}=\sup_{|\eta|_V=1}|\langle\ddot{\varphi}^n,\eta\rangle_{V'V}|=\sup_{\substack{\eta\in\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_n\}\\ |\eta|_V=1}}|\langle\ddot{\varphi}^n,\eta\rangle_{V'V}|$$

$$\leqslant|f|_{V'}+|f_0|_{F_2'}\cdot|r_1|+|W'(A\varphi^n)|_S\cdot|A|$$

由设iii)，W'是从$L^p(I,E)$到$L^{p'}(I,S)$的弱连续算子，因而是有界算子，所以$\{W'(A\varphi^n)\}$是$L^{p'}(I,S)$中有界集，进而可知$\{\ddot{\varphi}^n\}$是$L^{p'}(I,V')$中的有界集。因此存在着子列$\{\varphi^{n_k}\}\subset\{\varphi^n\}$，$\varphi^0\in L^\infty(I,V)$，$\dot{\varphi}^0\in L^\infty(I,H)$，$\ddot{\varphi}^0\in L^{p'}(I,V')$，使得

$\varphi^{n_k}\to\varphi^0$弱在$L^\infty(I,V)$

$\dot{\varphi}^{n_k}\to\dot{\varphi}^0$弱在$L^\infty(I,H)$

$\ddot{\varphi}^{n_k}\to\ddot{\varphi}^0$弱在$L^{p'}(I,V')$

很明显$\varphi^0\in C(I,H)$，$\dot{\varphi}^0\in C(I,V')$

从(2.3)有

$$\int_I\langle\ddot{\varphi}^{n_k},\psi e_i\rangle_{V'V}dt=-\int_I\langle W'(A\varphi^{n_k}),A\psi e_i\rangle_{SE}dt+\int_I\langle f,\psi e_i\rangle_{V'V}dt+\int_I\langle f_0,r_1\psi e_i\rangle_{\Gamma_t}dt$$

$$(\forall i=1,2,\cdots n_k;\ \psi\in L^p(I)) \tag{2.9}$$

取极限，便有

$$\int_I\langle\ddot{\varphi}^0,\psi e_i\rangle_{V'V}dt=-\int_I\langle W'(A\varphi^0),A\psi e_i\rangle_{SE}dt+\int_I\langle f,\psi e_i\rangle_{V'V}dt+\int_I\langle f_0,r_1\psi e_i\rangle_{\Gamma_t}dt$$

$$(\forall i=1,2,\cdots;\ \psi\in L^p(I)) \tag{2.10}$$

$$\int_I \langle \ddot{\varphi}^0 - \operatorname{div} W'(A\varphi^0) - f, \psi e_i\rangle_{V'V} dt + \int_I \langle W'(A\varphi^0)n - f_0, r_1\psi e_i\rangle_{\Gamma_t} dt = 0$$

$$(\forall i=1,\ 2,\ \cdots;\ \psi \in L^p(I))$$

因此有

$$\ddot{\varphi}^0 - \operatorname{div} W'(A\varphi^0) - f = 0 \qquad (\text{在} L^{p'}(I,\ V'))$$
$$W'(A\varphi^0)n - f_0 = 0 \qquad (\text{在} L^{p'}(I,\ (r_1V)') \cong L^{p'}(I,\ F_2'))$$

任取$\psi \in C^1(I)$，$\psi(T)=0$，对(2.9)，(2.10)左端分部积分有

$$-\langle \dot{\varphi}^{n_k}(0), \psi(0)e_i\rangle_{V'V} - \int_I \langle \dot{\varphi}^{n_k}, \dot{\psi} e_i\rangle_{V'V} dt = (2.9)\text{右端} \tag{2.11}$$

$$-\langle \dot{\varphi}^0(0), \psi(0)e_i\rangle_{V'V} - \int_I \langle \dot{\varphi}^0, \dot{\psi} e_i\rangle_{V'V} dt = (2.10)\text{右端} \tag{2.12}$$

比较(2.11)及(2.12)式易知

$$\lim_{k\to\infty} \langle \dot{\varphi}^{n_k}(0) - \dot{\varphi}^0(0),\ e_i\rangle_{V'V} = 0 \qquad (\forall i=1,\ 2,\ \cdots)$$

所以$\dot{\varphi}^{n_k}(0) \rightharpoonup \dot{\varphi}^0(0)$在$V'$，但显然有$\dot{\varphi}^{n_k} \to u_1$（按$V'$范数），$\dot{\varphi}^0(0)=u_1$。

若取$\psi \in C^2(I)$，$\psi(T)=0$，$\dot{\psi}(T)=0$，对(2.11)(2.12)式左端再次分部积分并比较结果得到

$\lim\limits_{k\to\infty} \langle \varphi^{n_k}(0) - \varphi^0(0), e_i\rangle_{V'V} = \lim\limits_{k} \langle \varphi^{n_k}(0) - \varphi^0(0), e_i\rangle_H = 0$ $(\forall i=1,\ 2,\ \cdots)$ 这说明

$\varphi^{n_k}(0) \rightharpoonup \varphi^0(0)$在$H$，但$\varphi^{n_k}(0) \to u_0$在$H$，所以$\varphi^0(0)=u_0$在$H$。

注1 若假定$f \in L^{p'}(I,H)$，且在本定理中的假设ii)，iii)不变，则定理1中的结论仍然成立。如此的假设只是针对f，f_0不可微的情形（见[3]）。注意到(2.4)中$\langle f, \dot{\varphi}^n\rangle_{V'V} = \langle f, \dot{\varphi}^n\rangle_H$，从(2.4)及假设ii)，利用Holder及Cauchy不等式，易知(2.6)式仍成立。继续本定理证明便知结论成立。

注2 若设W满足

ii)′ $W(Au) + \alpha_1|u|_H^r \geqslant C|u|_V^p + \alpha_2$ $(C,\ \alpha_1 > 0,\ 1 \leqslant r \leqslant 2,\ p \geqslant r,\ p > 1)$

定理1中的假设i) iii)，仍然有效，则定理1中的结论亦真，这从证明过程中也容易看出。

注3 若$\Gamma_t = \phi$（即纯边位移情形）。零位移边值约束下的弹性动力学系统解的存在性只是上面定理1的一个简单简化。此时取$V=(H_0^1(\Omega))^3$，$F=(H^{-1}(\Omega))^3$。对于任何非零边位移约束是很容易转化为零位移边值的情形。

定理2 若W是凸的G-可微函数，W，f，f_0满足定理1的条件，则$\forall u_0 \in V$，$u_1 \in H$ 存在

$$u \in L^\infty(I,\ V) \cap C(I,\ H)$$
$$\dot{u} \in L^\infty(I,\ H)$$
$$\ddot{u} \in L^{p'}(I,\ V')$$

使得

$$\ddot{u} - \operatorname{div} W'(Au) - f = 0 \qquad (\text{在} V',\ \text{a.e.},\ t \in I)$$
$$W'(Au)\cdot n - f_0 = 0 \qquad (\text{在} F_2',\ \text{a.e.},\ t \in I)$$
$$u(0) = u_0 \qquad (\dot{u}(0) = u_1)$$

这也等价于如下不等方程

$$\langle \ddot{u}(t), v - u(t)\rangle_{V'V} + W(Av) - W(Au(t_1)) \geqslant \langle f(t), v - u(t)\rangle_{V'V} + \langle f_0(t), v - u(t)\rangle_{\Gamma_t}$$
$$(\text{a.e.},\ t \in I,\ \forall v \in V)$$

证明 设u是定理1所述意义下的解，则有

$$\int_I \{\langle \ddot{u}, v-u\rangle_{V'V} + \langle W'(Au), Av-Au\rangle - \langle f, v-u\rangle_{V'V} - \langle f_0, v-u\rangle_{\Gamma_t}\}dt = 0$$

$$(\forall v \in L^p(I, V))$$

因W是凸的，$\langle W'(Au),\ Av-Au\rangle \leqslant W(Av)-W(Au)$。因此，

$$\int_I \{\langle \ddot{u}, v-u\rangle_{V'V} + W(Av) - W(Au) - \langle f, v-u\rangle_{V'V} - \langle f_0, v-u\rangle_{\Gamma}\}dt \geqslant 0$$

$$(\forall v \in L^p(I, V)) \qquad (2.13)$$

任取I的可测子集M，$h\in V$。令

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & (t \in I-M) \\ h & (t\in M) \end{cases}$$

代入上不等式(2.13)中，便有

$$\int_M \{\langle \ddot{u}, h-u\rangle_{V'V} + W(Ah) - W(Au) - \langle f, h-u\rangle_{V'V} - \langle f_0, h-u\rangle_{\Gamma_t}\}dt \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \ddot{u}(t), h-u(t)\rangle_{V'V} + W(Ah) - W(Au(t)) - \langle f(t), h-u(t)\rangle_{V'V}$$
$$-\langle f_0(t), h-u(t)\rangle_{\Gamma_t} \geqslant 0 \qquad (\text{a.e.},\ t\in I,\ \forall h\in V)$$
$$\Leftrightarrow \langle \ddot{u}(t), h-u(t)\rangle_{V'V} + \langle W'(Au), Ah-Au(t)\rangle - \langle f(t), h-u(t)\rangle_{V'V}$$
$$-\langle f_0(t),\ h-u(t)\rangle_{\Gamma_t} = 0 \qquad (\forall h\in V, \text{a.e.},\ t\in I)$$

而$\langle W'(Au), Ah-Au\rangle_{SE} = \langle -\mathrm{div}W'(Au), h-u\rangle_{V'V} + \langle W'(Au)\cdot n, h-u\rangle_{\Gamma_t}$，所以

$$\ddot{u}(t) - \mathrm{div}W'(Au) - f = 0 \qquad (\text{在}V'\ \text{a.e.},\ t\in I)$$
$$W'(Au)\cdot n - f_0 = 0 \qquad (\text{在}\Gamma_2',\ \text{a.e.},\ t\in I)$$

注4 在上面的定理1,2中如是只设$W'(\cdot)$连续且有界（替代iii)），结论仍然成立，这里不累述。

经典弹性力学模型在数学上等价于取$W(Au)=a(u,u)/2$，$a(u,v)$是一个强制、对称非负的连续双线性型，Duvaut 等曾详细地讨论了经典动力学问题解的存在性、唯一性[3]，从[3]中的讨论与定理2及注解1～4比较知，本文可以在更弱的条件下得到经典动力学问题的解的存在性。当$W(Au)=a(u,u)/2$时，容易证明解的唯一性。

参 考 文 献

[1] M. E. Gurtin, The linear theory of elasticity; G. Fichera, Existence Theorems in Elasticity. *Handbuch der Physik*, Vol. VIa/2, Springer, Berlin, (1972).

[2] T. Valent, *Boundary Value Problems of Finite Elasticity*, Springer-Verlag, (1988).

[3] G. Duvaut and J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer, Berlin, (1976).

[4] F. Lene, Sur les matériaux élastiques à énergie de déformation non quadratique, *J. Méc.*, 13(1974), 499—534.

[5] J. J. Moreau, La notion de sur-potentiel et les Liaisons unilatérales en élastostatique, *C. R. Acad. Sci, Pairs*, Ser. A, 267(1968), 954—957.

[6] B. Nayroles, *Duality and Convexity in Solid Equálibrium Problems*, Laboratoire Méc. et d'Acoustique, C. N. R. S., Marseille (1974).
[7] P. D. Panagitopolous, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhaüser, Basel (1985).
[8] 郭友中，固体力学中的不等式问题，《现代数学与力学》，北京大学出版社（1987),143—164.

The Existence of Solutions in Nonlinear Elastodynamics

Guo Xingming

(Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract

Under the small deformation assumption, this paper shows the existence of solution for the system of elastic dynamics with the general nonlinear constitutive laws, and the existence of classical solution which can be found under weaker conditions.

Key words nonlinear, constitutive law, elastodynamics, existence