应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于某些非线性偏微分方程的准确解*

施惟慧[1]　陈达段[1]　唐一鸣[1]

（钱伟长推荐，1996年1月4日收到）
（仅以此文献给敬爱的老师　H. Cartan院士，祝贺他的九十寿辰）

摘　　要

以分层理论为基础，对偏微分方程给以一种全新的分类。

关键词　Janet数　坏方程组　好方程组

一、序　　言

众所周知，某些非线性偏微分方程的准确解，在物理、力学问题的研究中，起了非常重要的作用。而对一些尚不能求得准确解的方程组，法国数学家 E. Picard 曾引进有限差分法，以离散化了的微分去寻找其近似解，从此以后在数值计算方法和理论研究方面都有了很重要的进展，比如泛函空间的算子理论；伪李群论；Lagrang方法；Cauchy-Kowalewskaya 定理以及众多的存在与唯一性定理等等。但是这些研究并未给出如何求得（或写出）一个方程组的准确解的方法。因而，为了求解工程技术或物理、力学中的偏微分方程组，数值计算方法仍然是最被感兴趣的方法。本文的目的，是阐述偏微分方程的一种新分类法，并由此回答如何对某些方程组求其准确解的问题。

为简单起见，以下所说的方程组指的都是非线性偏微分方程组。

二、好方程组

有如在所有的数学研究中那样，我们考虑所有的C^{∞}-非线性偏微分方程组的集合，将它记为$\mathscr{D}$。这里有两点需要注意。第一，R. Thom坚持主张[8]，凡是来自自然的问题，解析函数类是首先被考虑的。第二，根据J. Hadamard的理论，如果一个方程组的未知函数依赖于时间t，但在$\{t=t_0\}$这一超平面上的 Cauchy 问题却不具有适定的初始条件，那末这样的方程组就不能真实地反映物理或力学现象。

现在我们考虑$\mathscr{D}$的两个不相交的子集合$\mathscr{A}$和$\mathscr{M}$

$$\mathscr{D}=\mathscr{A}\cup\mathscr{M}$$

* 本文是国家自然科学基金资助研究项目的部分结果。

1 上海大学，上海　200072。

其定义如下：一个方程组$D\in\mathscr{M}$，当且仅当D的任何一个解，无论在那一个超曲面上的限制(restriction)，都不能定义D的一种适定问题．而$\mathscr{A}$是$\mathscr{M}$在$\mathscr{D}$中的余集．因此，根据J. Hadamard，$\mathscr{M}$的元素是那些没有物理（或力学）意义的方程组，所以称它们是“坏方程组”，这也就是引进另一个$\mathscr{D}$的子集合——“好方程组”的原因．$\mathscr{D}$的子集合$\mathscr{B}$，$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{D}$如下定义：

一个方程组$D\in\mathscr{B}$，当且仅当D是一个解析方程组，并且它的Janet数$i(D)\in\mathbb{R}_{+}^{*}$[4]．

例1 以下的方程组都是“好方程组”：

流体力学中的Euler方程[7]；Landau-Lifchitz方程（即粘性可压流体的完备方程组）[7]；弹性力学方程组[2]；广义相对论中的Einstein方程[3]；椭圆型方程；波动方程；热传导方程；Monge-Ampère方程．

我们有以下的定理：

定理1 设$D\in\mathscr{B}$．那末D的所有准确解都可以收敛级数的形式给出[5]．

特别要指出的是，例1中所列的那些方程组在这个意义下都是可解的．

例2 考虑无粘性、不可压流体的Euler方程，外力$\boldsymbol{F}(x,t)=(x_1x_3t^2,t^2,t^2)$．

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_1}-x_1x_3t^2=0\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_2}-t^2=0\\
&\frac{\partial u_3}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_3}-t^2=0\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0
\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

那末我们有它在$\mathbb{R}^4$中的整体解：

$$\left.\begin{aligned}
&u_1=c\qquad(c\neq0)\\
&u_2=\frac{x_1}{c}\left(\frac{1}{3c^2}x_1^2-\frac{1}{c}x_1t+t^2\right)\\
&u_3=\frac{x_1}{c}\left(\frac{1}{3c^2}x_1^2-\frac{1}{c}x_1t+t^2-\frac{1}{5!c^2}x_1^4+\frac{2}{4!c}x_1^3t-\frac{1}{3!}t^2x_1^2\right)\\
&p=\frac{\rho}{2}x_1^2x_3t^2+p_0
\end{aligned}\right\}$$

（c，p_0为常数）

关于Landau-Lifchitz方程，其所有准确解也都已给出[7]．

注 广义相对论中的Einstein方程的无穷远边值问题以及Landau-Lifchitz方程的混合问题也都已得到了解决[3]．

三、算法过程

已经存在一种程序[6],[2]，可以提供我们去实现：

——$D\in\mathscr{D}$，检验D是否属于$\mathscr{A}$；

——如果$D\in\mathscr{D}$是一个解析方程组，它可检验在某个
——解析超曲面上给出的初始条件是否适定；
在适定的情形下，这个程序可以Taylor 级数的形式，写出所对应的解析解（到任意阶数）.

特别要指出的是，如果$D\in\mathscr{B}$，那末D的所有解析解都将由这个程序完全自动给出. 这个程序的发明制作者给它起名为Algorithme 仁均和.

四、坏方程组

以下所列都是坏方程组：流体力学中的Navier-Stokes 方程；Boussinesq 方程；大气动力学中的强迫耗散非线性系统方程；Navier-Stokes类型方程（参看定理 2)，都是坏方程组，即都是$\mathscr{M}$中的元素。

可是尽管如此，而且前述的计算程序不再能应用，但我们仍有一种巧妙的方法去求得它们的某些准确解[7].

例3 Navier-Stokes方程. $\boldsymbol{F}(x,t)=(t^2,0,x_1x_2)$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial x_1}+\nu\Delta u_1+t^2\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial u_2}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial x_2}+\nu\Delta u_2+0\\
&\frac{\partial u_3}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial x_3}+\nu\Delta u_3+x_1x_2\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0
\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

可以验证，以下两组实函数都是(4.2)的解，它们在超平面$\{t=0\}\subseteq\mathbb{R}^4$上满足同样的初始条件：

$$u^{(1)}\begin{cases}
u_1^{(1)}=\dfrac{1}{3}t^3,\\[2mm]
u_2^{(1)}=0,\\[2mm]
u_3^{(1)}=x_1x_2t-\dfrac{1}{15}x_2t^5,\\[2mm]
p^{(1)}=p_0+p_1t+\dfrac{p_2}{2}t^2+\dfrac{p_3}{6}t^3.
\end{cases}$$

$$u^{(2)}\begin{cases}
u_1^{(2)}=\dfrac{1}{3}t^3,\\[2mm]
u_2^{(2)}=-\dfrac{\nu^2}{6\rho}t^3,\\[2mm]
u_3^{(2)}=x_1x_2t-\dfrac{\nu^2}{6\rho}t^3+\dfrac{t^5}{5!}\left(\dfrac{4\nu^3}{\rho}x_1-8x_2\right)-\dfrac{\nu^2}{405\rho}t^9,\\[2mm]
p^{(2)}=p_0+p_1t+\dfrac{\nu^2}{2}t^2(x_2+x_3)
\end{cases}$$

$$u^{(1)}\Big|_{t=0}=u^{(2)}\Big|_{t=0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\p_0\end{pmatrix}\qquad (p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3\text{为常数})$$

值得注意的是，构造同一Cauchy问题唯一解的反证，是一件非常重要的工作，对某些坏方程组来说，我们有一个一般方法，这里就不多说了。此外，如果$D\in\mathscr{M}$，虽然依J. Hadamard 所说，D不具有物理意义，但对于数学研究，却可能具有十分重要的价值。事实上，E. Cartan 的外微分，构成了上同调理论的基础，而它是$\mathscr{M}$的一个元素。我们有理由相信，$\mathscr{M}$的元素对$\mathscr{D}$来说都不是平凡的。所以，为了求某个$D_0\in\mathscr{A}$的准确解或研究讨论其固有特性，就不能期望从某个$D\in\mathscr{M}$出发而获得正确的结论。

例4 考虑流体力学中的 Euler 方程，简记为(E)，和 Navier-Stokes 方程，简记为(N)，假设外力均以解析函数形式给出。按照某些观点，当粘性系数$\nu\to 0$时，(N) 方程变成(E)方程，遗憾的是，我们不能从(N)的解空间构造出发而获得(E)的解空间构造。事实上，代表方程特性的不变量Janet数，$i((E))=2$，而$i((N))=0$[4]。在[2] 中给出的 Burger 方程D_a的准确解说明，当以改换方程的阶数来研究某种扰动问题时，即使所有的D_a都属于$\mathscr{A}$，$D_a\in\mathscr{A}$，但也会出现意外，因而这种方法并不完全可靠，必须引起我们的警惕。另外，存在这样的方程组D，$D\in\mathscr{D}$，但$D\notin\mathscr{B}$，$D\notin\mathscr{M}$。

五、Navier-Stoke类型的方程

考虑下述方程组：

$$D_{f,g,A}:\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_4}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-\dfrac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,u_4+\nu\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}(x,v,\partial v),\\ \mathrm{div}\quad \boldsymbol{u}=0\\ \displaystyle\sum_{l=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{4}A_{ij}^{lm}(x,\mu,\ \partial\mu)\frac{\partial^2 v_e}{\partial x_i\partial x_j}=g_m(x,\mu,\partial\mu)\qquad (m=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

自变量$x=(x_1,x_2,\ x_3,\ x_4)\in\mathbb{R}^4$，未知函数组是$\mu=(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ v_1,\cdots,\ v_n)\in\mathbb{R}^{n+4}$，并记$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$，这里$\boldsymbol{f}$，$g_m$，$A_{ij}^{lm}$都被假设为$C^2$类函数。显然，如果$n=0$，$A_{ij}^{lm}=g_m=0$，$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(x)$，那末$D_{fgA}$就是通常所谓的Navier-Stokes 方程。

现在以A，g，f代表由A_{ij}^{lm}，g_m，$\boldsymbol{f}$所定义的三个C^2对应：

A：$\mathbb{R}^{5n+24}\longrightarrow M_{n,10n}(\mathbb{R})$.

g：$\mathbb{R}^{5n+24}\longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$.

f：$\mathbb{R}^{5n+24}\longrightarrow M_{3,1}(\mathbb{R})$.

设$\beta\in\mathbb{R}^{5n+24}$，那末定义：

$$A(\beta)=\|A_{ij}^{lm}\|,$$

$$g(\beta)=\begin{pmatrix}g_1\\\vdots\\g_m\end{pmatrix},$$

$$f(\beta)=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

这里$M_{p,q}(\mathbb{R})$代表p行q列的实矩阵空间．以$M^0_{n,10n}(\mathbb{R})$代表$M_{n,10n}(\mathbb{R})$中所有具有最大秩的矩阵所构成的子空间．那末我们有以下的定理：

定理2 如果

$$\operatorname{Im} A \subseteq M^0_{n,10n}(\mathbb{R}),$$

那末 $D_{f,g,A}\in\mathscr{M}$，$i(D_{fgA})=0$．

定理的证明我们将在另外的文章中给出．

例5 D_{fgA}的一个特例．

$$n=1,\ \rho=1,$$
$$x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(x,\ y,\ z,\ t)\in\mathbb{R}^4,$$
$$\boldsymbol{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)=(u,\ v,\ w)$$
$$\mu=(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ v_1)=(u,\ v,\ w,\ p,\ T)\in\mathbb{R}^5,$$
$$\boldsymbol{f}=(f_1,\ f_2,\ f_3)=(0,\ 0,\ g\varepsilon T)$$
$$g_1=\frac{\partial T}{\partial x}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z},$$
$$A^{11}_{11}=A^{21}_{22}=A^{31}_{33}=x,\ 其它\ A^{lm}_{ij}=0.$$

那末这时的D_{fgA}就是大气动力学中的一个重要方程组——强迫耗散非线性系统方程：

$$(D):\ \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial p}{\partial x}-\nu\nabla^2 u=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial p}{\partial y}-\nu\nabla^2 v=0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}+\dfrac{\partial p}{\partial z}-\nu\nabla^2 w-g\varepsilon T=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial t}+u\dfrac{\partial T}{\partial x}+v\dfrac{\partial T}{\partial y}+w\dfrac{\partial T}{\partial z}-\chi\nabla^2 T=0 \end{cases}$$

可以验证以下两组定义在$\mathbb{R}^4$上的实函数都是D的解：

$$U^{(1)}:\ \begin{cases} u^{(1)}=-\dfrac{1}{2}t^2x_2, \\ v^{(1)}=-\dfrac{1}{2}t^2x_1, \\ w^{(1)}=(g\varepsilon T_0)t, \\ p^{(1)}=p_0+tx_1x_2-\dfrac{1}{8}t^4(x_1^2+x_2^2), \\ T^{(1)}=T_0 \end{cases}$$

$$U^{(2)}:\begin{cases} u^{(2)}=-\frac{1}{2}t^2x_2 \\ v^{(2)}=-\frac{1}{2}t^2x_1 \\ w^{(2)}=(g\varepsilon T_0)t-\frac{1}{24}t^4, \\ p^{(2)}=p_0+tx_1x_2+\frac{1}{6}t^3x_3-\frac{1}{8}t^4(x_1^2+x_2^2) \\ T^{(2)}=T_0\ (p_0\in R,\ T_0\in R\text{为常数}) \end{cases}$$

并且有 $U^{(1)}-U^{(2)}\not\equiv 0,$

$U^{(1)}|_{t=0}=U^{(2)}|_{t=0},\ (\partial U^{(1)}|_{t=0}=\partial U^{(2)}|_{t=0})$

我们可以同样的方法给出初始条件，使得D不存在任何C^2解，或者给出初始条件，使得D存在唯一解，但却是不稳定的。结论是：

$D\in\mathscr{M}$

注 定理1 的证明完成于1978年，发表于1986年[5]，计算程序编制完成于1989年，发表于1994年[2]。广义相对论中的Einstein方程的无穷远边值问题[3]完成于1991年，但直到如今尚未被接受发表，理由在于其使用的方法与结果都不同于某些权威。作者以为，在数学研究中，需要的是一个安静的环境，诚意的合作与友好的争论。但是那种固守自己的山头与野蛮的竞争已产生了非常严重的后果。比如用论文的数量和参加会议的多少来衡量一个人的水平与能力，会使年青人逐渐失去对数学的兴趣，也造成并日渐加深老一辈与年青数学家之间的误会与隔阂。更坏的是使数学研究的分支越来越细和专门化，从而更加重各个集团之间的矛盾与压力。而在数学研究上的一个直接后果，就是一些人顽固地坚持要用线性的方法去求解非线性的问题，尽管所有的人都知道，自有了Galois定理，单纯使用线代数的方法去求多项式的根是徒劳的。

参考文献

[1] J. Hadamard, *La Théorie des Equations aux Dérivées Partielles*, Éditions Scientifiques, Pekin (1964).

[2] J. A. Shih, Sur la saturation, la stabilité des systèmes d'équations aux dérivées partielles et le calcul formel, Thèse (1994).

[3] J. E. Shih. Un problème aux limites pour l'équation d'Einstein, à paraître.

[4] W. Shih, Comptes rendus de l'Académie, 364 (1987), 535.

[5] W.Shih. Une méthode élémentaire pour l'étude des équations aux dérivées partielles, Diagrammes 16, Paris (1986).

[6] W. Shih, Sur la stratification et let équations anx dérivées partielles, à paraître.

[7] W. H. Shih, *Sur les Solutions Analytiques de Quelques équations aux dérivées Partielles en Mécaniqus des Fluides*, Hermann Éditeurs, Paris (1992).

[8] R. Thom, La philosophie des singularités, IRMA de l'Université de Lille, Colloque en l'honneur de Mme Schwartz (1986).

On the Exact Solution to Certain Non-Linear Partial Differential Equations

Shi Weihui Chen Daduan Tang Yiming

(*Shanghai University, Shanghai* 200072, *P. R. China*)

Abstract

This paper, based on the theory of stratifications, gives a brand-new classification of partial differential equations.

Key words Janet number, bad system of equations, good system of equations