

碟形扁壳在均布载荷下的 非线性稳定分析*

刘 东¹ 陈山林¹

(1995年11月3日收到)

摘 要

本文对碟形扁壳的非线性稳定问题进行了分析。用修正迭代法得到了弹性特征的二次近似表达式, 给出了一组算例, 并讨论了参数 β 和 k 对稳定特性的影响。

关键词 碟形扁壳 非线性稳定 修正迭代法

一、前 言

碟形扁壳是指由圆平板和扁锥壳构成的一类薄扁壳, 它失稳时的跳跃现象在仪表压力温度自控系统中常被作为一种控制信号。对碟形扁壳非线性特性的理论分析是设计实践所需要的。圆板和扁锥壳非线性性质的研究一直受到国内外学者的关注, 已有若干研究成果^{[1]~[9]}, 但碟形扁壳非线性特性的研究工作尚未见报道。目前的设计基本上仍是在经验-试验的基础上完成的, 缺乏足够的理论依据。因此, 从理论上对碟形扁壳的非线性特性进行研究是有意义的。

本文对几种常见边界条件下, 碟形扁壳在均布载荷下的非线性稳定问题进行了研究。首先将问题的控制微分方程组转化为一组等价的积分方程, 然后用修正迭代法求解。由于得到了一个能使计算大为简化的积分, 使本文的迭代计算更为简明。文中给出了碟形扁壳非线性屈曲的二次近似特征关系, 并给出了周边固定筒支情形碟形扁壳的特征曲线和稳定曲线。

二、基本方程及其积分方程化

考虑图1所示碟形扁壳。中心平板部份的半径为 b , 扁锥壳底面半径为 a , 平板及扁锥壳的厚度均为 h 。选取如下无量纲量

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{r}{a}, \quad \bar{w} = \sqrt{12(1-\mu^2)} \frac{w}{h}, \quad \vartheta = \frac{dw}{dx} \end{aligned} \right\}$$

* 国家自然科学基金资助课题。

¹ 重庆建筑大学, 重庆 630045.

$$\left. \begin{aligned} k &= \sqrt{12(1-\mu^2)} \frac{f}{h}, \quad s = -\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3} a^2 x N_r, \\ Q &= \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{Dh} a^4 q, \quad \beta = \frac{b}{a} \end{aligned} \right\} (2.1)$$

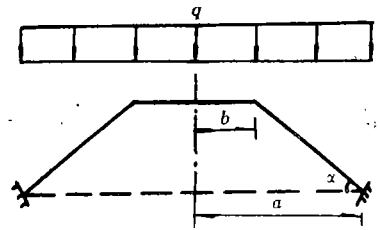


图1 碟形壳尺寸

式中

w 为挠度, f 为扁锥壳矢高($f = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$), q 为载荷参数, D 为抗弯刚度, μ , E 为泊松比和弹性模量.

平板部份的无量纲非线性控制微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x\theta) &= xQ - \frac{s}{x} \theta \\ \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (xs) &= \frac{1}{2x} \theta^2 \end{aligned} \right\} (2.2)$$

扁锥壳部份的无量纲非线性控制微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x\theta) &= xQ - \frac{s}{x} (\theta + k) \\ \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (xs) &= \frac{\theta}{x} \left(\frac{\theta}{2} + k \right) \end{aligned} \right\} (2.3)$$

引入Heaviside阶跃函数

$$\mathcal{H}(x-\beta) = \begin{cases} 1 & (x \geq \beta) \\ 0 & (x < \beta) \end{cases} (2.4)$$

于是图1所示碟形扁壳非线性屈曲的无量纲控制微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x\theta) &= xQ - \frac{s}{x} [\theta + \mathcal{H}(x-\beta) \cdot k] \\ \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (xs) &= \frac{\theta}{x} \left[\frac{\theta}{2} + \mathcal{H}(x-\beta) \cdot k \right] \end{aligned} \right\} (2.5)$$

边界条件的一般提法为

$$\left. \begin{aligned} x=0: \quad \theta &= 0, \quad s=0 \\ x=1: \quad \frac{d\theta}{dx} + \nu_1 \theta &= 0, \quad \frac{ds}{dx} - \nu_2 s = 0 \end{aligned} \right\} (2.6)$$

ν_1 与 ν_2 和边界约束有关, 对常见边界情形取值为

$$\left. \begin{aligned} \text{固定夹紧} \quad \nu_1 &= \infty, \quad \nu_2 = \mu \\ \text{可移夹紧} \quad \nu_1 &= \infty, \quad \nu_2 = \infty \\ \text{可移铰支} \quad \nu_1 &= \mu, \quad \nu_2 = \infty \\ \text{固定铰支} \quad \nu_1 &= \mu, \quad \nu_2 = \mu \end{aligned} \right\} (2.7)$$

令

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= -s[\theta + \mathcal{H}(x-\beta) \cdot k] \\ f(x) &= \theta \left[\frac{\theta}{2} + \mathcal{H}(x-\beta) \cdot k \right] \end{aligned} \right\} (2.8a, b)$$

代入(2.5), 并直接积分, 同时引入边界条件(2.6), 可得与边值问题(2.5)、(2.6)等价的积

分方程组

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{1}{8}(x^3 - ex)Q + \int_0^1 K_1(x, \xi)F(\xi)d\xi \\ s &= \int_0^1 K_2(x, \xi)f(\xi)d\xi \end{aligned} \right\} \quad (2.9a, b)$$

式中 $K_1(x, \xi)$, $K_2(x, \xi)$ 为积分核

$$\left. \begin{aligned} K_1(x, \xi) &= \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(Gx\xi + \frac{\xi}{x}\right) & (0 \leq \xi \leq x) \\ -\frac{1}{2}\left(G\xi x + \frac{x}{\xi}\right) & (x \leq \xi \leq 1) \end{cases} \\ K_2(x, \xi) &= \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(gx\xi + \frac{\xi}{x}\right) & (0 \leq \xi \leq x) \\ -\frac{1}{2}\left(g\xi x + \frac{x}{\xi}\right) & (x \leq \xi \leq 1) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.10a, b)$$

e , G , g 是与边界约束有关的常数

$$e = \frac{3 + \nu_1}{1 + \nu_1}, \quad G = \frac{1 - \nu_1}{1 + \nu_1}, \quad g = \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} \quad (2.11)$$

至此, 本文问题归结为求解积分方程组(2.9a, b)

三、迭代求解

若记中心挠度为 w_0 ($w_0 = w|_{x=0}$), 则

$$w_0 = \int_1^0 \theta dx \quad (3.1)$$

将(2.9a)代入(3.1), 得

$$w_0 = \frac{2e-1}{32}Q + \int_1^0 \int_0^1 K_1(x, \xi)F(\xi)d\xi dx \quad (3.2)$$

将(3.2)式展开并注意到有下式成立

$$\int_1^0 x dx \int_0^1 x F(x) dx + \int_1^0 x dx \int_1^x \frac{F(x)}{x} dx = 0 \quad (3.3)$$

于是(3.2)式可写为

$$Q = \frac{32}{2e-1}w_0 - \frac{8(1+G)}{2e-1} \int_0^1 x F(x) dx - \frac{16}{2e-1} \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^x x F(x) dx \quad (3.4)$$

用(3.4)式计算碟形扁壳的弹性特征, 可大为简化计算过程。

本文用修正迭代法求解。在一次近似中, 忽略 s 的影响, 即在(2.8a)中取

$$F_1(x) = 0 \quad (3.5)$$

由(2.9a)得一次近似为

$$\theta_1 = \frac{1}{8}(x^3 - ex)Q \quad (3.6)$$

代入(3.1)式或直接由(3.4)式得一次近似的特征关系

$$Q = \frac{32}{2e-1}w_0 \quad (3.7)$$

(3.7)式即圆板小挠度解^[9]。将(3.7)代入(3.6)有

$$\theta_1 = \frac{4}{2e-1}(x^3 - ex)\bar{w}_0 \quad (3.8)$$

二次近似的迭代格式为

$$\left. \begin{aligned} s_2 &= \int_0^1 K_2(x, \xi) f_1(\xi) d\xi \\ \theta_2 &= \frac{1}{8}(x^3 - ex)Q + \int_0^1 K_1(x, \xi) F_2(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (3.9a, b)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} f_1(\xi) &= \theta_1 \left[\frac{\theta_1}{2} + \mathcal{Z}(\xi - \beta) \cdot k \right] \\ F_2(\xi) &= -s_2 [\theta_1 + \mathcal{Z}(\xi - \beta) \cdot k] \end{aligned} \right\} \quad (3.10a, b)$$

由(3.8), (3.9a, b), (3.10a, b), 经计算后得

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{8\bar{w}_0^2}{(2e-1)^2} \left(c_1 x + \frac{e^2}{8} x^3 - \frac{e}{12} x^5 + \frac{1}{48} x^7 \right) + \frac{4k}{(2e-1)} c_2 x \bar{w}_0 \\ &+ \frac{4k}{(2e-1)} \bar{w}_0 \mathcal{Z}(x - \beta) \left[\left(\frac{\beta^2}{10} - \frac{e}{6} \right) \frac{\beta^3}{x} + \left(\frac{e}{2} - \frac{\beta^2}{6} \right) \beta x \right. \\ &\left. + \frac{1}{15} x^4 - \frac{e}{3} x^2 \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

式中

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{6} + \frac{e}{2} + \frac{\beta^3}{6} - \frac{e\beta}{2} - \frac{g}{10} + \frac{eg}{6} + \frac{g\beta^5}{10} - \frac{eg\beta^8}{6} \\ c_2 &= \frac{e}{4} - \frac{1}{12} - \frac{e^2}{4} - \frac{g}{16} + \frac{g^2}{6} - \frac{ge^2}{8} \end{aligned} \quad (3.12)$$

我们只计算到二次近似, 因此, 直接由(3.4)式计算弹性特征是方便的, 这样可避免 θ_2 的繁复计算。此时, (3.4)式可写为

$$Q = \frac{32}{2e-1} \bar{w}_0 - \frac{8(1+G)}{2e-1} \int_0^1 x F_2(x) dx - \frac{16}{2e-1} \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^x x F_2(x) dx \quad (3.13)$$

将(3.8), (3.11), (3.10a)诸式代入(3.12), 计算后可得

$$Q = (F + Ak^2)\bar{w}_0 + Bk\bar{w}_0^2 + C\bar{w}_0^3 \quad (3.14)$$

此即本文所求碟形扁壳二次近似的特征关系。式中 F, A, B, C 是常数

$$F = \frac{32}{2e-1}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{32}{(2e-1)^2} \left\{ (1+G) \left[\frac{1}{3}(1-\beta^3)c_1 + \left(-\frac{\beta^3}{18} + \frac{\beta^5}{10} - \frac{\beta^8}{18} \right) \right. \right. \\ &+ \frac{1}{90} + e \left(-\frac{1}{12} + \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^3}{6} + \frac{\beta^4}{12} \right) \left. \right] + \frac{2(1-\beta^3)}{9} - c_1 \\ &+ \frac{1}{270} + \left(-\frac{\beta^3}{27} + \frac{\beta^5}{5} - \frac{\beta^8}{6} \right) + e \left(-\frac{1}{24} + \frac{\beta}{9} - \frac{\beta^3}{3} \right. \\ &\left. \left. + \frac{19\beta^4}{72} \right) + \ln \beta \cdot \left(\frac{2c_1}{3} \beta^3 - \frac{e\beta^4}{6} + \frac{\beta^6}{9} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = & \frac{32}{(2e-1)^3} \left\{ (1+G) \left[\frac{37}{1080} + \left(-\frac{\beta^3}{9} + \frac{\beta^5}{10} - \frac{5\beta^9}{216} \right) \right. \right. \\
& + e \left(-\frac{53}{210} + \frac{\beta}{3} - \frac{\beta^5}{5} + \frac{5\beta^7}{42} \right) + e^2 \left(\frac{19}{60} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^3}{3} - \frac{3\beta^5}{20} \right) \\
& + \left(\frac{2}{3} - e \right) c_1 + \frac{2}{3} (1-\beta^3) c_2 \left. \right] + \left(\frac{2}{9} - \frac{e}{2} \right) c_1 \\
& + \frac{4}{9} (1-\beta^3) c_2 + \frac{37}{4860} + \left(-\frac{\beta^3}{27} + \frac{\beta^5}{20} - \frac{5\beta^9}{243} \right) + e \left(-\frac{53}{735} \right. \\
& + \frac{\beta}{9} - \frac{\beta^5}{5} + \frac{71\beta^7}{441} \left. \right) + e^2 \left(\frac{19}{150} - \frac{\beta}{4} + \frac{\beta^3}{3} - \frac{63\beta^5}{300} \right) \\
& + \ln \beta \cdot \left(\frac{4}{3} c_2 \beta^3 + \frac{5\beta^9}{108} - \frac{5e\beta^7}{21} + \frac{3e^2\beta^5}{10} \right) \left. \right\} \\
C = & \frac{8}{(2e-1)^4} \left\{ (1+G) \left[\frac{1}{18} - \frac{e}{3} + \frac{5e^2}{6} - \frac{2e^3}{3} + \frac{8}{3} (2-3e) \cdot c_2 \right] \right. \\
& + \left. \left(\frac{16}{9} - 4e \right) c_2 + \frac{1}{108} - \frac{e}{15} + \frac{5e^2}{24} - \frac{2e^3}{9} \right\} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

在压力-温度自控系统中, 我们最为关心的是上、下临界载荷值, 它可由(3.14)方便地求出. 由 $\frac{dQ}{d\omega_0} = 0$ 得

$$F + Ak^2 + 2Bk\omega_0 + 3C\omega_0^2 = 0 \quad (3.16)$$

其解为
$$\omega_{01,2} = \frac{1}{3C} [-Bk \mp \sqrt{B^2k^2 - 3(F + Ak^2)C}] \quad (3.17)$$

此解只有当下式满足时, 才有实根

$$k \geq k_{cr} = \sqrt{\frac{3CF}{B^2 - 3CA}} \quad (3.18)$$

(3.18)式给出了碟形扁壳失稳的几何必要条件. 即只有 $k > k_{cr}$ 的壳体才会产生跳跃现象. 将(3.17)代入(3.14), 即得上、下临界载荷值 Q_1^* 和 Q_2^*

$$Q_{1,2}^* = (F + Ak^2)\omega_{01,2} + Bk\omega_{01,2}^2 + C\omega_{01,2}^3 \quad (3.19)$$

四、算 例

算例1 均布压力作用下的扁锥壳

在(3.14)中取 $\beta=0$, 即得圆底扁锥壳的弹性关系, 对边缘固定铰支情形, 有

$$\nu_1 = \nu_2 = \mu \quad (4.1)$$

若 $\mu=0.3$, 则(3.14)为

$$Q = (7.84906 + 1.61920k^2)\omega_0 - 3.12183\omega_0^2 + 1.36268\omega_0^3 \quad (4.2)$$

此解与文[3]用摄动法求得的解答是接近的*. 当取 $k=0$ 时, 得圆薄板大挠度解, 与文[1]的

* 经验算, 文[3]中(4.1)式有误, 应为

$$\bar{Q} = (1.4376 + 3.2384f^2)\omega_0 - 6.3404f\omega_0^2 + 2.7253\omega_0^3 \quad (4.1)$$

解是一致的。

算例2 碟形扁壳, 取

$$\beta=0.3, \mu=0.3 \text{ 及 } \nu_1=\nu_2=\mu$$

则由(3.13)式得均布载荷作用下边缘固定铰支碟形扁壳无量纲载荷参数与中心挠度的关系

$$Q=(7.84906+1.43224k^2)w_0-2.95783kw_0^2+1.36268w_0^3 \quad (4.3)$$

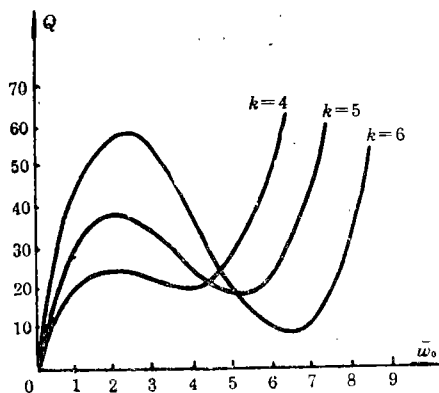


图2 碟形壳的特征曲线($\beta=0.3$)

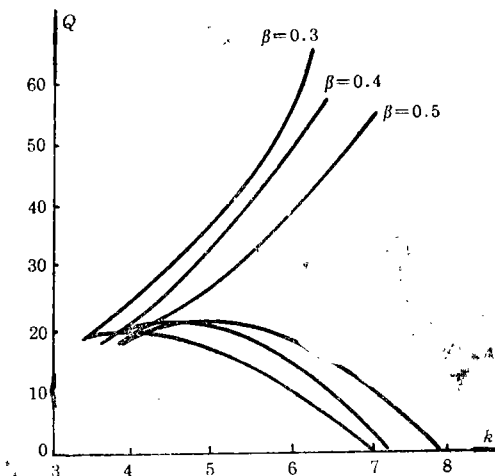


图3 碟形壳的稳定曲线

壳体的临界几何参数为

$$k_{cr}=3.32996$$

由(3.19)可求出各个 k 值下的上、下临界载荷值。

图2给出了不同 k 值下碟形扁壳($\beta=0.3$)的特征曲线。可以看到, $k > k_{cr}$ 的碟形扁壳存在跳跃现象。仪器中正是利用这一现象作为控制信号。图3给出了不同 β 下碟形扁壳的稳定曲线。图形表明, 当 β 不变时, 随着 k 的增大, 上临界载荷不断增大, 且上、下临界载荷差也持续增大。对于具有相同 k 值的碟形扁壳, β 越大, 其上临界载荷越小, 即壳体越易失稳。

五、结 语

本文对碟形扁壳的非线性稳定问题进行了较为全面的分析。所用方法可以看作是积分方程法和修正迭代法的结合。导出的(3.14)式可用于计算四种常见边界情形下碟形壳的弹性特征。本文结果可供工程设计参考。

参 考 文 献

- [1] C. Y. Chia, *Non Linear Analysis of Plate*, Megram-hill, Inc., (1980).
- [2] 陈山林, 浅正弦波纹圆板在均布载荷下的大挠度弹性特征, *应用数学和力学*, 1(2)(1980), 261-272.
- [3] 王虎、王俊奎, 扁圆锥壳在均布载荷作用下的非线性稳定分析, *工程力学*, 7(1) (1990), 27-33.
- [4] J. Famili Asymmetric buckling of finitely deformed conical shells, *AIAA*, 3(8) (1965), 1456-1461.

- [5] L. K. Chagn and S. Y. Lu, Nonlinear thermal buckling of conical shells, *Nuclear Engng. and Design*, 7(1) (1968), 159—169.
- [6] M. Baruch, K. Harari and J. Singer, Low buckling loads of axially compressed conical shells, *J. Appl. Mech.*, 37 (1970), 384—392.
- [7] J. Tani and N. Yamaki, Buckling of truncated conical shells under axial compression, *AIAA J.*, 8(1) (1970), 568—570.
- [8] C. G. Forster, Axially compression buckling of conical and cylindrical shells, *Experimental Mech.*, (1987), 255—261.
- [9] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, 《板壳理论》, 科学出版社, 北京 (1977).

Snap-Buckling of Dished Shallow Shells under Uniform Loads

Liu Dong

Chen Shanlin

(Chongqing Jianshu University, Chongqing 630045, P.R.China)

Abstract

A theoretical analysis is presented for the snap-buckling behaviour of dished shallow shells under uniform loads. By means of the modified iteration method, the second approximate formula of elastic behaviour and set of numerical solutions are given. And effects of parameters and on the snap-buckling behaviour are discussed.

Key words dished shallow shells, snap-buckling, modified iteration method