应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

用独立变量表示的约束Birkhoff系统的运动稳定性*

梅凤翔[1]

（樊大钧推荐，1995年10月16日收到）

摘　要

首先提出Pfaff-Birkhoff-D′Alembert原理，并由此原理导出约束Birkhoff系统用独立变量表示的运动方程；其次建立系统的受扰运动微分方程；最后利用 Ляпунов 直接法和一次近似理论得到系统运动稳定性的一些判据。

关键词　动力学　Birkhoff系统　运动稳定性

一、前　　言

1927年美国数学家Birkhoff G．D在其名著《动力系统》中给出比 Hamilton方程更为普遍的一类动力学方程[1]．1978年美国物理学家Santilli R．M建议将方程命名为Birkhoff方程[2]．1989年苏联学者 Галиуллин А．С 认为对Birkhoff方程的研究是近代分析力学的一个重要发展方向[3]．在文献[4～10]中，研究了非完整力学系统的 Birkhoff 表示，系统动力学逆问题，Birkhoff系统的Noether理论，Birkhoff 系统的平衡稳定性和运动稳定性等．这些研究的对象属于所谓自由Birkhoff系统．本文研究非自由 Birkhoff 系统，或称约束Birkhoff系统的运动稳定性问题．首先，提出 Pfaff-Birkhoff-D′Alembert原理，由此导出约束 Birkhoff系统的运动方程；其次，由得到的运动方程和所要研究的无扰运动出发，建立受扰运动方程；最后，利用 Ляпунов 直接法和一次近似稳定性理论，得到判断系统稳定性的一些判据，并举例说明其应用．

二、用独立变量表示的约束Birkhoff系统的运动方程

Pfaff-Birkhoff原理为[2,4]

$$\delta A=\delta\int_{t_1}^{t_2}\Big(\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \dot{a}^\mu-B\Big)dt=0 \tag{2.1}$$

---

* 国家自然科学基金和高校博士点专项基金资助课题．

1 北京理工大学应用力学系，北京 100081．

$$d\delta a^{\mu}=\delta d a^{\mu} \tag{2.2}$$

$$\delta a^{\mu}|_{t=t_1}=\delta a^{\mu}|_{t=t_2}=0 \qquad (\mu=1, \cdots, 2n) \tag{2.3}$$

由原理(2.1)出发，利用交换关系(2.2)及端点条件(2.3)，可得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\mu=1}^{2n}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right\}\delta a^\mu dt=0 \tag{2.4}$$

由原理(2.4)中积分区间$[t_1, t_2]$的任意性，得到

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right\}\delta a^\mu=0 \tag{2.5}$$

称原理(2.5)为Pfaff-Birkhoff-D'Alembert原理.

如果系统是自由Birkhoff系统，则原理(2.5)中的δa^μ是彼此独立的，任意的，故可由原理(2.5)导出Birkhoff方程

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0 \qquad (\mu=1, \cdots, 2n) \tag{2.6}$$

现假设变量a^μ不全是独立的，而受到约束，表为

$$a^i=\varphi_i(a^k, t) \qquad (i=1, \cdots, 2m;\ k=2m+1, \cdots, 2n) \tag{2.7}$$

对式(2.7)取等时变分，得

$$\delta a^i=\sum_{k=2m+1}^{2n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}\delta a^k \tag{2.8}$$

将式(2.8)代入原理(2.5)，并注意到$\delta a^k(k=2m+1, \cdots, 2n)$是彼此独立的，得到

$$\sum_{i=1}^{2m}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\omega_{i\nu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^i}-\frac{\partial R_i}{\partial t}\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}+\sum_{\nu=1}^{2n}\omega_{k\nu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^k}-\frac{\partial R_k}{\partial t}=0$$

$$(k=2m+1, \cdots, 2n) \tag{2.9}$$

将式(2.7)对时间t求导数，得到

$$\dot{a}^i=\sum_{k=2m+1}^{2n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}\dot{a}^k+\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} \tag{2.10}$$

将式(2.10)代入方程(2.9)，得到

$$\sum_{l=2m+1}^{2n}\left\{\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{2m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}\omega_{ij}\frac{\partial\varphi_j}{\partial a^l}+\sum_{i=1}^{2m}\left(\omega_{il}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}+\omega_{ki}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^l}\right)+\omega_{kl}\right\}\dot{a}^l$$

$$-\sum_{i=1}^{2m}\frac{\partial B}{\partial a^i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}-\frac{\partial B}{\partial a^k}+\sum_{i=1}^{2m}\left(\sum_{j=1}^{2m}\omega_{ij}\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}-\frac{\partial R_i}{\partial t}\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}$$

$$+\sum_{i=1}^{2m}\omega_{ki}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}-\frac{\partial R_k}{\partial t}=0 \tag{2.11}$$

令

$$\tilde{\omega}_{kl}=\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{2m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}\omega_{ij}\frac{\partial\varphi_j}{\partial a^l}+\sum_{i=1}^{2m}\left(\omega_{il}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}+\omega_{ki}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^l}\right)+\omega_{kl}$$

$$\tilde{B}(a^k, t)=B(\varphi_i(a^k, t), a^k, t) \tag{2.12}$$

则方程(2.11)可写成形式

$$\sum_{l=2m+1}^{2n}\tilde{\omega}_{kl}\dot{a}^l-\frac{\partial\tilde{B}}{\partial a^k}-\sum_{i=1}^{2m}\frac{\partial R_i}{\partial t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}-\frac{\partial R_k}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2m}\left(\sum_{j=1}^{2m}\omega_{ji}\frac{\partial\varphi_j}{\partial a^k}+\omega_{ki}\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=0$$

$$(k=2m+1,\ \cdots,\ 2n) \tag{2.13}$$

其中的a^i用φ_i替代. 方程(2.13)称为用独立变量表示的运动方程.

特别地，对于定常约束Birkhoff自治系统，有

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=\frac{\partial R_k}{\partial t}=0$$

方程(2.13)有简单形式

$$\sum_{l=2m+1}^{2n}\tilde{\omega}_{kl}\dot{a}^l-\frac{\partial\tilde{B}}{\partial a^k}=0\qquad(k=2m+1,\ \cdots,\ 2n) \tag{2.14}$$

且$\tilde{\omega}_{kl}$，$\tilde{B}$不显含时间t. 将方程(2.14)反转，得

$$\dot{a}^k-\sum_{l=2m+1}^{2n}\tilde{\omega}^{kl}\frac{\partial\tilde{B}}{\partial a^l}=0\qquad(k=2m+1,\ \cdots,\ 2n) \tag{2.15}$$

其中矩阵$\tilde{\omega}^{kl}$为矩阵$\tilde{\omega}_{kl}$的逆.

三、约束Birkhoff系统的受扰运动方程

设方程(2.14)或(2.15)有解

$$a^k=a_0^k(t)\qquad(k=2m+1,\ \cdots,\ 2n) \tag{3.1}$$

即满足

$$\sum_{l=2m+1}^{2n}(\tilde{\omega}_{kl})_0\dot{a}_0^l-\left(\frac{\partial\tilde{B}}{\partial a^k}\right)_0=0 \tag{3.2}$$

$$\dot{a}_0^k=\sum_{l=2m+1}^{2n}(\tilde{\omega}^{kl})_0\left(\frac{\partial\tilde{B}}{\partial a^l}\right)_0 \tag{3.3}$$

这里下标0表示其中的a^k用$a_0^k(t)$替代的结果. 取式(3.1)无扰运动，并令

$$a^k=a_0^k(t)+\xi^k \tag{3.4}$$

其中 ξ^k为扰动. 将式(3.4)代入方程(2.14)并注意到式(3.2)，得到受扰运动方程

$$\sum_{l=2m+1}^{2n}(\tilde{\omega}_{kl})_0\dot{\xi}^l-\sum_{l=2m+1}^{2n}\left(\frac{\partial^2\tilde{B}}{\partial a^k\partial a^l}\right)_0\xi^l=F_k(\xi^l,\ \dot{\xi}^l,\ t) \tag{3.5}$$

$$(k=2m+1,\ \cdots,\ 2n)$$

这里 F_k为ξ^l，$\dot{\xi}^l$，的二阶项和更高阶项. 将式(3.4)代入方程(2.15)，得到受扰运动方程

$$\dot{\xi}^k=-\dot{a}_0^k+\sum_{l=2m+1}^{2n}(\tilde{\omega}^{kl})_1\left(\frac{\partial\tilde{B}}{\partial a^l}\right)_1\qquad(k=2m+1,\ \cdots,\ 2n) \tag{3.6}$$

这里下标 1 表示其中的a^k用$a_0^k(t)+\xi^k$替代的结果.

四、约束Birkhoff系统运动稳定性的直接方法

假设受扰运动方程(3.6)不显含时间t，研究函数$\tilde{B}$沿方程(3.6)求对时间 t 的全导数，考

虑到$\tilde{\omega}^{kl}$的反对称性，有

$$\left.\frac{d\tilde{B}}{dt}\right|_{(3.6)}=\sum_{k=2m+1}^{2n}\frac{\partial\tilde{B}}{\partial a^k}(\dot{a}_0^k+\dot{\xi}^k)=\sum_{k=2m+1}^{2n}\sum_{l=2m+1}^{2n}\left(\frac{\partial\tilde{B}}{\partial a^k}\tilde{\omega}^{kl}\frac{\partial\tilde{B}}{\partial a^l}\right)_1=0 \qquad (4.1)$$

根据Ляпунов直接法得到

命题1 如果嵌入约束后的 Birkhoff 函数$\tilde{B}$在解(3.1)附近相对ξ^k是定号的，正定的或负定的，那么系统的无扰运动(3.1)是稳定的。

五、约束Birkhoff系统运动稳定性的一次近似方法

假设方程(3.5)中不显含时间t，即

$$(\tilde{\omega}_{kl})_0=\text{const.},\ \left(\frac{\partial^2\tilde{B}}{\partial a^k\partial a^l}\right)_0=\text{const.},\ F_k=F_k(\xi^l,\ \dot{\xi}^l) \qquad (5.1)$$

则方程(3.5)的一次近似方程为

$$\sum_{l=2m+1}^{2n}(\tilde{\omega}_{kl})_0\dot{\xi}^l-\sum_{l=2m+1}^{2n}(\tilde{\Omega}_{kl})_0\xi^l=0 \qquad (k=2m+1,\ \cdots,\ 2n) \qquad (5.2)$$

其中

$$\tilde{\Omega}_{kl}=\frac{\partial^2\tilde{B}}{\partial a^k\partial a^l} \qquad (5.3)$$

一次近似方程(5.2)的特征方程为

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} -(\tilde{\Omega}_{2m+1\ 2m+1})_0 & (\tilde{\omega}_{2m+1\ 2m+2})_0\lambda-(\tilde{\Omega}_{2m+1\ 2m+2})_0 & \cdots & (\tilde{\omega}_{2m+1\ 2n})_0\lambda-(\tilde{\Omega}_{2m+1\ 2n})_0 \\ (\tilde{\omega}_{2m+2\ 2m+1})_0\lambda-(\tilde{\Omega}_{2m+2\ 2m+1})_0 & -(\tilde{\Omega}_{2m+2\ 2m+2})_0 & \cdots & (\tilde{\omega}_{2m+2\ 2n})_0\lambda-(\tilde{\Omega}_{2m+2\ 2n})_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\tilde{\omega}_{2n\ 2m+1})_0\lambda-(\tilde{\Omega}_{2n\ 2m+1})_0 & (\tilde{\omega}_{2n\ 2m+2})_0\lambda-(\tilde{\Omega}_{2n\ 2m+2})_0 & \cdots & -(\tilde{\Omega}_{2n\ 2n})_0 \end{vmatrix}=0 \qquad (5.4)$$

由$\tilde{\omega}_{kl}$的反对称性和$\tilde{\Omega}_{kl}$的对称性，得知

$$\Delta(\lambda)=\Delta(-\lambda) \qquad (5.5)$$

于是有

命题2 对于满足条件(5.1)的定常约束 Birkhoff自治系统，其一次近似方程的特征方程的根总是成对互为反号出现的，若有根λ，必有根$(-\lambda)$。

利用Ляпунов一次近似理论及命题2，得到

命题3 对于满足件条(5.1)的定常约束 Birkhoff 自治系统，如果特征方程(5.4)有实部不为零的根，则无扰运动(3.1)是不稳定的。

六、算　例

4阶Birkhoff系统的Birkhoff函数为

$$B=\frac{1}{2}\{(a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2+(a^4)^2\}+a^3a^4 \tag{6.1}$$

Birkhoff张量为

$$\omega=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

所受约束为

$$\varphi_1=a^1=-a^3,\quad \varphi_2=a^2=-a^4 \tag{6.3}$$

试研究系统的运动稳定性。

按公式(2.12)计算得

$$\tilde{\omega}_{34}=\omega_{32}\frac{\partial\varphi_2}{\partial a^4}=1 \tag{6.4}$$

$$\tilde{B}=(a^3)^2+(a^4)^2+a^3a^4$$

方程(2.14)给出为

$$\begin{aligned} &\dot{a}^4-2a^3-a^4=0 \\ &-\dot{a}^3-2a^4-a^3=0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

方程(6.5)有解

$$a_0^3=a_0^4=0 \tag{6.6}$$

取其为无扰运动，并令

$$a^3=a_0^3+\xi^3,\quad a^4=a_0^4+\xi^4 \tag{6.7}$$

将其代入方程(6.5)，得到受扰运动方程

$$\dot{\xi}^4-2\xi^3-\xi^4=0,\quad -\dot{\xi}^3-2\xi^4-\xi^3=0 \tag{6.8}$$

其特征方程为

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} -2 & \lambda-1 \\ -\lambda-1 & -2 \end{vmatrix}=\lambda^2+3=0 \tag{6.9}$$

它有一对纯虚根。因方程(6.8)是线性的，知其奇点(0，0)是中心，平衡位置(6.6)是稳定的。若取V函数为

$$V=\tilde{B}=(\xi^3)^2+(\xi^4)^2+\xi^3\xi^4 \tag{6.10}$$

它对ξ^3，ξ^4是正定的。由命题1知，平衡位置(6.6)是稳定的。

方程(6.5)有解

$$a_0^3=\sin\sqrt{3}t,\quad a_0^4=-\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t+\sin\sqrt{3}t) \tag{6.11}$$

令

$$a^3=a_0^3+\xi^3,\quad a^4=a_0^4+\xi^4 \tag{6.12}$$

将其代入方程(6.5)，仍得受扰运动方程(6.8)．类似于前面讨论知，无扰运动(6.11)也是稳定的．

参 考 文 献

[1] G.D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, AMS College Publ., Providence RI (1927), 89—91.

[2] Santilli, R. M., *Foundations of Theoretical Machanics* Ⅱ, Springer-Verlag, New York (1983), 30—40.

[3] А. С. Галиуллин, Аналитинеская динамика, *Высшая Школа*, Москва (1989), 249—263.

[4] 梅凤翔、史荣昌，关于 Pfaff-Birkhoff 原理，北京理工大学学报，13 (2Ⅱ) (1993)，256—273.

[5] 戴贤扬、赵关康、梅凤翔，Chaplygin 非完整系统的 Birkhoff 表示，《中国非完整力学三十年》，河南大学出版社，开封 (1994)，107—109.

[6] 梅凤翔，Birkhoff系统的Noether理论，中国科学，A辑，23(7) (1993)，709—717.

[7] 梅凤翔，Birkhoff系统动力学逆问题，北京师范学院学报，4 (1992)，32—36.

[8] 梅凤翔，Birkhoff自治系统的平衡稳定性，科学通报，38(4) (1993)，311—313.

[9] Shi Rongchang, Mei Fengxiang and Zhu Haiping, On the stability of the motion of a Birkhoff system, *Mechanics Research Communications*, 21(3) (1994), 269—272.

[10] 吴惠彬、梅凤翔，广义Birkhoff系统的变换理论，科学通报，40(10) (1995)，885—888.

Stability of Motion for a Constrained Birkhoff's System in Terms of Independent Variables

Mei Fengxiang

(Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, *P. R. China)*

Abstract

This paper proposes the Pfaff-Birkhoff-D'Alembert's principle and obtains the equations of motion in terms of the independent variables for a constrainted Birkhoff's system from the principle. It establishes the equations of perturbation of the system. It obtains the stability criteria by using the Liapunov direct method and the firstly approximately method.

Key words dynamics, Birkhoff's system, stability of motion